ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.853.65

НОВЫЙ КЛАСС ТЕОРЕМ ОБ АЛЬТЕРНАТИВАХ[1]

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Показана связь теорем об альтернативах линейных систем равенств и/или неравенств и теорем двойственности линейного программирования. Приводятся новые варианты теорем об альтернативах, при которых альтернативные системы имеют различные матрицы разных размеров.

Ключевые слова: теоремы об альтернативах, системы линейных равенств и неравенств, линейное программирование, двойственность.

A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. A new class of theorems of the alternative.

The connection is established between theorems of the alternative for linear systems of equations and/or inequalities and duality theorems in linear programming. We give new versions of theorems of the alternative in which the alternative systems have different matrices of various sizes.

Keywords: theorems of the alternative, systems of linear equations and inequalities, linear programming, duality.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-44-49

Введение

Существуют различные варианты теорем об альтернативах, применяющиеся в основном для доказательства теорем существования, вывода условий экстремума в задачах оптимизации (см., например, [1;2]). Теоремы об альтернативах имеют не только теоретическое значение, но весьма полезны с вычислительной точки зрения [3; 4]. Они дают возможность вычислять нормальные решения систем линейных равенств и неравенств, находить направление наискорейшего спуска в задачах нелинейного программирования, строить разделяющие гиперплоскости, производить коррекцию несобственных задач, конструировать новые алгоритмы решения задач линейного программирования и т. д.

В формулировках теорем об альтернативах всегда присутствуют две системы равенств и/или неравенств, которые обозначим соответственно через I и II. Теоремы об альтернативах утверждают, что всегда разрешима одна и только одна из систем (либо I, либо II), но не обе одновременно.

Входными данными систем I и II являются элементы матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и компоненты вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

Пусть система, определяющая множество X, имеет вид

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

где A — матрица размерности $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|b\| \neq 0$. Альтернативная система, определяющая множество U, записывается в виде

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-07-00805 и 15-01-08259), ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (номер государственной регистрации проекта 0115PK00554).

Здесь и всюду ниже ρ — произвольная фиксированная положительная константа.

Всегда совместна одна и только одна из систем: (I) или (II). Это утверждение при использовании в (II) записи $b^\top u > 0$ известно как лемма Фаркаша (теорема Фаркаша) (см., например, [1; 4]).

Если в (I) вместо системы линейных равенств при неотрицательных переменных используется система неравенств

$$Ax \leq b,$$

то по аналогии с (II) альтернативной будет согласно теореме Гейла [1; 4] следующая система:

$$A^\top u = 0_m, \quad -b^\top u = \rho > 0, \quad u \geq 0_m.$$

В теоремах Фаркаша и Гейла для альтернативных линейных систем используются одни и те же матрица A и вектор b. Ниже в разд. 1 приведены новые альтернативные системы, которые строятся по-иному, с использованием различных матриц разной размерности. Более того, в разд. 2 показано, что альтернативными могут быть два семейства систем. При этом любая система из одного семейства альтернативна любой системе из другого семейства.

1. Новые варианты теорем об альтернативах

Рассмотрим частный случай системы

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

когда матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет ранг m, т. е. $m < n$, и $\|b\| \neq 0$. Именно для этого частного случая матрицы A ранга m покажем, что система, альтернативная к (I), может иметь вид, отличный от используемой в теореме Фаркаша:

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

Покажем, что в альтернативной системе будет присутствовать матрица, отличная от $A^\top$, и вместо $b^\top$ будет использоваться иной вектор.

Для этого, следуя [5–8], введем в рассмотрение матрицу $K \in \mathbb{R}^{\nu \times n}$, где $\nu = n - m$ — дефект матрицы A. Строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A, и поэтому натянутое на них подпространство $\operatorname{im} K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы A. Поэтому $AK^\top = 0_{m\nu}$. Здесь через 0_{ij} обозначена матрица размерности $(i \times j)$ с нулевыми элементами.

В выборе матрицы K имеется определенный произвол. Она может быть построена различными способами. Если матрицу A представить в блочном виде $A = [B \,|\, N]$, где B невырождена, то матрицу K можно записать в следующем виде: $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \,|\, I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса — Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \,|\, N]$, то матрица K представима в виде $K = [-N^\top \,|\, I_\nu]$.

Так как матрица A имеет ранг m, система

$$Ax = b \tag{1}$$

всегда разрешима, но среди ее решений может и не быть неотрицательных. Обозначим через $\bar{X}$ множество решений системы (1). Подчеркнем, что множество $\bar{X}$ всегда непусто в отличие от множества X — множества решений системы (I). Запишем общее решение неоднородной системы (1) в виде

$$x = \bar{x} - K^\top y, \tag{2}$$

где $\bar{x}$ — произвольное частное решение системы (1), т. е. $\bar{x} \in \bar{X}$, а $K^\top y$ — общее решение однородной системы $Ax = 0_m$ и $y \in \mathbb{R}^\nu$.

Определим множество

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^\nu \colon \bar{x} - K^\top y \geq 0_n\}.$$

Формулу (2) можно рассматривать как аффинное отображение из $\mathbb{R}^\nu$ в $\mathbb{R}^n$. При этом образом множества Y является множество X, задаваемое системой (I). Между непустыми множествами X и Y существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, для любого $y \in Y$ по формуле (2) однозначно определяется $x \in X$, т. е.

$$X = \bar{x} - K^\top Y. \tag{3}$$

Для переопределенной системы (2) полного ранга, содержащей n линейных уравнений и ν неизвестных y, всегда определено псевдорешение

$$y = (KK^\top)^{-1}K(\bar{x} - x) = (K^\top)^+(\bar{x} - x), \tag{4}$$

которое является единственным решением системы (2) тогда и только тогда, когда $\bar{x} - x \in \operatorname{im} K^\top$. Это включение имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \bar{X}$. Для любого $x \in \bar{X}$ формула (4) определяет аффинное преобразование, обратное к (2). Поэтому можно записать

$$Y = (K^\top)^+(\bar{x} - X). \tag{5}$$

Таким образом, либо одновременно множества $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$, либо одновременно $X = \varnothing$ и $Y = \varnothing$, как следует из (2).

Итак, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Две системы*

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

$$K^\top y \leq \bar{x} \tag{I_y}$$

либо одновременно разрешимы, и множества их решений связаны между собой соотношениями (3) *и* (5)*, либо одновременно неразрешимы.*

По теореме Гейла для системы (I_y) альтернативной будет система, определяющая множество

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n \colon Kv = 0_\nu,\ -\bar{x}^\top v = \rho > 0,\ v \geq 0_n\}. \tag{II_v}$$

Общее решение однородной системы $Kv = 0_\nu$ всегда можно выразить с помощью матрицы A следующим образом:

$$v = -A^\top u. \tag{6}$$

Поэтому, сделав в (II_v) замену переменных $v = -A^\top u$ и учитывая, что $A\bar{x} = b$ и $KA^\top = 0_{\nu n}$, систему (II_v) можно записать в виде

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

Если множество V непусто, то $v \geq 0_n$ и из (6) следует, что непусто и множество U, задаваемое системой (II).

Верно и обратное. Если $U \neq \varnothing$, то $-A^\top u \geq 0_n$ и из (6) следует, что непусто и множество V. При этом между этими множествами существует взаимно однозначное соответствие, выражаемое формулами

$$V = -A^\top U, \quad U = -(A^\top)^+ V, \tag{7}$$

где псевдообратная матрица $(A^\top)^+$ имеет вид $(A^\top)^+ = (AA^\top)^{-1}A$.

Как следует из (6), множества V и U могут быть несовместны только одновременно.

Отсюда следует лемма.

Лемма 2. *Две системы*

$$A^\top u \le 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0, \tag{II}$$

$$Kv = 0_\nu, \quad -\bar{x}^\top v = \rho > 0, \quad v \ge 0_n \tag{II_v}$$

либо одновременно разрешимы, и множества их решений связаны между собой соотношениями (7), *либо одновременно неразрешимы.*

Леммы 1 и 2 выделяют семейства I и II, состоящие из систем, которые одновременно разрешимы или неразрешимы. В этом смысле системы (I) и (I_y) из семейства I эквивалентны. Аналогично эквивалентны системы (II) и (II_v) из семейства II.

Следующая теорема об альтернативах является аналогом теорем Фаркаша и Гейла.

Теорема. *Пусть матрица* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *имеет ранг* m, *а матрица* $K \in \mathbb{R}^{\nu\times n}$ *имеет ранг* $\nu = n - m$ *и* $AK^\top = 0_{m\nu}$, *вектор* $\|b\| \ne 0$, ρ — *любое положительное число, вектор* $\bar{x}$ *есть произвольное решение системы линейных уравнений* $Ax = b$. *Тогда*:

1) *всегда совместна либо система*

$$Ax = b, \quad x \ge 0_n, \tag{I}$$

либо система

$$Kv = 0_\nu, \quad -\bar{x}^\top v = \rho > 0, \quad v \ge 0_n; \tag{II_v}$$

2) *всегда совместна либо система*

$$K^\top y \le \bar{x}, \tag{I_y}$$

либо система

$$A^\top u \le 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как согласно лемме 1 системы (I) и (I_y) эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а система (I_y) по теореме Гейла альтернативна системе (II_v), то системы (I) и (II_v) альтернативны.

2) Поскольку согласно лемме 2 системы (II) и (II_v) эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а системы (II) и (I) по теореме Фаркаша альтернативны, то система (II) также альтернативна системе (I_y).

Теорема доказана.

Связь между альтернативными системами представлена на схеме.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathrm{I}:\quad Ax = b,\ x \ge 0_n} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \boxed{\mathrm{I}_y:\quad K^\top y \le \bar{x}} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\boxed{\mathrm{II}:\ \begin{matrix} A^\top u \le 0_n, \\ b^\top u = \rho > 0 \end{matrix}} \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\mathrm{II}_v:\ \begin{matrix} Kv = 0_\nu,\ v \ge 0_n, \\ -\bar{x}^\top v = \rho > 0 \end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

Двойные стрелки обозначают, что системы эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а обычные стрелки обозначают альтернативность систем. Вертикальная стрелка слева соответствует теореме Фаркаша, а вертикальная справа — теореме Гейла.

2. Альтернативные системы и линейное программирование

Приведем интерпретацию теоремы Фаркаша об альтернативах с точки зрения линейного программирования. Систему (I) можно рассматривать как задачу линейного программирования на минимум с вектором коэффициентов целевой функции, все компоненты которого тождественно равны нулю:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{0_n^\top x\colon Ax=b,\ x\geq 0_n\}. \tag{P}$$

Двойственная задача к (P) имеет вид

$$\max_{u\in\mathbb{R}^m}\{b^\top u\colon A^\top u\leq 0_n\}. \tag{D}$$

Известно, что для пары двойственных задач линейного программирования всегда имеет место один из следующих случаев [9]:

1) прямая и двойственная задачи имеют решения;

2) прямая задача несовместна, двойственная задача неограничена;

3) двойственная задача несовместна, прямая задача неограничена;

4) прямая и двойственная задачи несовместны.

Для задач (P) и (D) последние два условия не могут быть выполнены, так как ограничения в (D) всегда совместны, вектор $u=0_m$ является допустимым.

Возможны только два первых случая.

В случае 1) оптимальные значения целевых функций задач (P) и (D) равны нулю, и в силу слабой теоремы двойственности имеет место неравенство $b^\top u\leq 0$ для всех допустимых векторов u. Отсюда следуют разрешимость системы (I) и, при любом неотрицательном ρ, неразрешимость системы

$$A^\top u\leq 0_n,\quad b^\top u=\rho>0. \tag{II}$$

В случае 2) система (I) несовместна, и в силу неограниченности двойственной задачи (D) система (II) совместна при любом $\rho>0$.

Итак, используя специальный вид задач линейного программирования (P) и (D) и привлекая его теорию двойственности, получаем простейшее доказательство альтернативности систем (I) и (II).

В работе [8] приведены различные эквивалентные постановки задач линейного программирования с использованием матрицы K и произвольного решения $\bar{x}$ системы $Ax=b$. Из этих постановок легко следуют новые варианты теорем об альтернативах, если положить все коэффициенты целевой функции в семействе прямых задач равными нулю и ограничиться случаем, когда ранг матрицы $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ равен m и $m<n$. Итак, существует произвольное решение $\bar{x}$ системы $Ax=b$. Тогда из [8, следствие 3, теорема 1 (о слабой двойственности)] получаем два семейства альтернативных систем I и II.

$$\begin{array}{lll}
\text{I:} & \text{II:} & \\
Ax=b,\ \ x\geq 0_n, & Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n, & -\bar{x}^\top v=\rho>0,\\
K^\top y\leq\bar{x}, & A^\top u\leq 0_n, & b^\top u=\rho>0,\\
Ax=b,\ \ x\geq 0_n, & A^\top u\leq 0_n, & b^\top u=\rho>0,\\
K^\top y\leq\bar{x}, & Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n, & -\bar{x}^\top v=\rho>0,\\
K^\top y+x=\bar{x},\ \ x\geq 0_n, & A^\top u+v=0_n,\ \ v\geq 0_n, & -\bar{x}^\top v=\rho>0,\\
Aw=0_m,\ \ w\leq\bar{x}, & Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n, & -\bar{x}^\top v=\rho>0,\\
K^\top y\leq\bar{x}, & A^\top u+v=0_n,\ \ v\geq 0_n, & -\bar{x}^\top v=\rho>0.
\end{array}$$

В первом столбце приводится множество ограничений соответствующей прямой задачи из семейства эквивалентных прямых задач линейного программирования. Отметим еще раз, что целевая функция этих прямых задач тождественно равна нулю. Таким образом, первый столбец представляет семейство эквивалентных в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости систем. Это семейство обозначено через I. Во втором столбце приведены множества ограничений задач из семейства эквивалентных двойственных задач. В третьем столбце представлено неравенство для целевой функции двойственной задачи, которое может выполняться на допустимых векторах только тогда, когда двойственная задача неограничена сверху. Второй и третий столбец определяют альтернативную систему из семейства II. Отметим, что можно комбинировать каждую систему из семейства I с любой из семейства II и получить дополнительно альтернативные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mangasarian O. L.** Nonlinear programming. Philadelphia: SIAM, 1994. 220 p.
2. **Giannessi F.** Theorems of the alternative and optimization // Encyclopedia of Optimization. Dordrecht [et al.]: Kluwer Acad. Publ., 2001. Vol. 5. P. 437–444.
3. **Dax A.** The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review // Ann. Operat. Res. 1993. Vol. 46, no. 1. P. 11–60.
4. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 354–375.
5. **Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.** Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. 76 с.
6. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. Chichester: Wiley, 1997. 508 p.
7. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1766–1386.
8. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Два параметрических семейства задач линейного программирования и их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 4. С. 31–44.
9. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Поступила 21.04.2016

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
директор
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
e-mail: evt@ccas.ru