ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

Е. Н. Бажанова, В. А. Ведерников

Получено полное описание строения конечной группы, каждая подгруппа Шмидта которой холлова.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, группа Фробениуса, холлова подгруппа, гиперцентр группы.

E. N. Bazhanova, V. A. Vedernikov. Finite groups with Hall Schmidt subgroups.

We obtain a complete description for the structure of a finite group in which any Schmidt subgroup is a Hall subgroup.

Keywords: finite group, Schmidt group, Frobenius group, Hall subgroup, hypercenter of a group.

MSC: 20DXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-3-11

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] О. Ю. Шмидт исследовал строение ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта.

На возможности применения групп Шмидта к исследованию подгруппового строения групп, по-видимому, впервые обратил внимание С. А. Чунихин (см. [2, гл. 4], а также обзор [3]). В работах [4; 5] было доказано, что нормальная неабелева силовская p-подгруппа группы Шмидта изоморфна U/Z, где U — силовская p-подгруппа группы $U_3(p^n)$ для некоторого целого числа $n \geq 1$ и подходящей подгруппы Z из $Z(U)$. В ряде работ изучались группы, представимые в виде произведения подгрупп Шмидта (см., например, [4; 6]). В статьях [7; 8] было получено полное описание строения групп, в которых каждая подгруппа Шмидта субнормальна.

В работе [9] В. Н. Князиной и В .С. Монаховым изучены свойства ненильпотентной группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова. В частности, в работе [9] доказано, что G содержит нормальную нильпотентную холлову подгруппу H и фактор-группа G/H является циклической группой. В данной работе установлены необходимые и достаточные условия для групп с такими свойствами.

В работе [1] доказано, что группа Шмидта G бипримарна, т. е. $\pi(G) = \{p, q\}$, силовская p-подгруппа G_p нормальна в G, $G_q := \langle x \rangle$ — циклическая группа, $\langle x^q \rangle = O_q(G) \leq Z(G)$, $|G_p/\Phi(G_p)| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q и $G_p/\Phi(G_p)$ является главным фактором группы G. В работах [10–12] были установлены дополнительные свойства группы Шмидта, а именно $|\Phi(G_p)| \leq p^{m/2}$, $\Phi(G_p) = [G_p, G_p] \leq Z(G)$, $exp(G_p)$ равна p при $p > 2$ и не превосходит 4 при $p = 2$. Из свойств группы Шмидта непосредственно следует, что если в группе Шмидта G силовская p-подгруппа G_p абелева, то $G_p \cdot\!\lhd G$ и $|G_p| = p^m \equiv 1 \pmod q$. Группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой, следуя [6], коротко будем называть $S_{\langle p,q \rangle}$*-группой*. Группа называется *неразложимой*, если она не может быть представлена в виде прямого произведения двух различных собственных подгрупп.

Для полного описания строения группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова, нам потребуется понятие $F_{\langle n,d\rangle}$-группы, дополняющее понятие группы Фробениуса, а также понятие S-накрывающей группы для $F_{\langle n,d\rangle}$-группы. Свойства $F_{\langle n,d\rangle}$-группы исследованы в лемме 7. Из примера 1 следует, что $F_{\langle n,d\rangle}$-группа не обязана быть группой Фробениуса. В частности, одной из таких является $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группа, а в примере 2 приведена ее S-накрывающая группа, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова.

Определение 1. Ненильпотентную неразложимую группу G назовем $F_{\langle n,d\rangle}$-группой, если $G := [M]H$, где $M := Soc(G)$ — нильпотентная нормальная холлова подгруппа порядка n, H — циклическая подгруппа порядка d в группе G, причем для любого $p \in \pi(M)$ и любого $q \in \pi(H/C_H(M_p))$ в H существует подгруппа Q такая, что $|Q| = q$ и $[M_p]Q$ является группой Шмидта.

Определение 2. Группу U назовем S-накрывающей $F_{\langle n,d\rangle}$-группы G, если в U существует нормальная подгруппа A такая, что $U/A \cong G$, $A \le \Phi(U) \cap Z(U)$ и для любого $p \in \pi(A)$ силовская p-подгруппа группы A содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.

Цель настоящей работы — получить необходимые и достаточные условия, при которых в ненильпотентной группе каждая подгруппа Шмидта холлова.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *В ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда группа $G := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times N$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t, N$ — нормальные холловы подгруппы группы G, $1 \le N \le F(G)$ и A_i является S-накрывающей $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.*

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Применяем следующие обозначения и определения: Z_n — циклическая группа порядка n; E_{p^n} — элементарная абелева p-группа порядка p^n; π — некоторое множество простых чисел; π' — дополнение к множеству π во множестве всех простых чисел $\mathbb{P}$; $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n; если $\pi(n) \subseteq \pi$, то натуральное число n называется *π-числом*; делитель d натурального числа n называется *холловым делителем*, если $(n, n/d) = 1$; символ $:=$ означает равенство по определению; $|G|$ — порядок группы G; $\pi(G) := \pi(|G|)$; если $\pi(G) \subseteq \pi$, то группа G называется *π-группой*; $|G : X|$ — индекс подгруппы X в группе G; G_p означает одну из силовских p-подгрупп группы G; $Soc(G)$ — цоколь группы G; $L \cdot\!\lhd G$ означает, что L — минимальная нормальная подгруппа группы G; K char G означает, что K — характеристическая подгруппа группы G; если H — подгруппа группы G и $(|G : H|, |H|) = 1$, то H называется *холловой подгруппой группы G*; если H — π-подгруппа группы G и $|G : H|$ является π'-числом, то H называется *π-холловой подгруппой группы G*; $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ — соответственно центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные p- и p'-подгруппы соответственно группы G; $G := [A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B группы G. Группа $G = [M]H$ называется *группой Фробениуса* с нормальным множителем M и дополнительным множителем H, если $1 < H < G$ и $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \backslash H$. Группа (подгруппа) называется *pd-группой* (*pd-подгруппой*), если ее порядок делится на p, где p — простое число. Последний член верхнего центрального ряда группы G называется *гиперцентром* G и обозначается $H(G)$. Следуя [9], обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, в которых каждая подгруппа Шмидта холлова. Группа, принадлежащая классу $\mathfrak{H}$, называется *$\mathfrak{H}$-группой.*

Неприведенные обозначения и определения можно найти в [2; 13–15].

Лемма 1 (теорема Шура — Цассенхауза [15, теорема 4.32]). *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Если $|N| = n$, $|G : N| = m$ и $(m, n) = 1$, то в группе G существует подгруппа порядка m и любые две подгруппы порядка m в группе G сопряжены.*

Лемма 2 [8, лемма 1]. *Пусть G — группа, $N \lhd G$, $A \le G$, $H(G)$ – гиперцентр группы G и $N \le H(G)$. Тогда*

(1) $A \cap H(G) \le H(A)$;

(2) $H(G/N) = H(G)/N$ *и* $F(G/N) = F(G)/N$;

(3) *если* $N \ne 1$, *то* $N \cap Z(G) \ne 1$.

Лемма 3 [9, лемма 3]. *Если группа $G \in \mathfrak{H}$, то каждая подгруппа группы G и каждая фактор-группа группы G принадлежат $\mathfrak{H}$.*

При доказательстве теоремы 1 существенно применяется следующий результат работы [9].

Лемма 4 [9, теорема]. *Пусть G — ненильпотентная $\mathfrak{H}$-группа. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если P — ненормальная силовская p-подгруппа группы G, то P является циклической и максимальная подгруппа из P содержится в $Z(G)$*;

(2) *если P является нормальной силовской p-подгруппой группы G и G не является p-разложимой, то либо P является минимальной нормальной подгруппой в группе G, либо P неабелева, $\Phi(P) = P' = Z(P)$ и $P/\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в фактор-группе $G/\Phi(P)$*;

(3) *если P_1 — нормальная p-подгруппа группы G, не являющаяся силовской p-подгруппой группы G и G не p-разложима, то P_1 содержится в $Z(G)$*;

(4) *если $Z(G) = 1$, то группа G содержит нормальную абелеву холлову подгруппу A, в которой каждая силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой в G, G/A является циклической и число $|G/A|$ свободно от квадратов.*

Докажем два свойства гиперцентра, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 5. *Пусть G — группа, $H(G)$ — гиперцентр группы G, $R \le H(G)$. Если R — холлова подгруппа в группе G, то в G существует подгруппа A такая, что $G = A \times R$.*

Доказательство. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. Так как $H(G)$ char G, $H(G)$ нильпотентна и по условию R — холлова подгруппа в G, а значит и в $H(G)$, то R char $H(G)$ и, значит, R char G. Если $R = 1$, то $G = A \times R$ и $A = G$. Пусть $R \ne 1$. По п. (3) леммы 2 имеем $Z := R \cap Z(G) \ne 1$. Рассмотрим фактор-группу G/Z. Так как $|G/Z| < |G|$ и по п. (2) леммы 2 $H(G/Z) = H(G)/Z$, то по индукции $G/Z = (R/Z) \times (B/Z)$. Тогда $G = RB$, $B \lhd G$ и $R \cap B = Z$. Пусть $\pi := \pi(R)$. Так как $G/R \cong B/B \cap R = B/Z$, то B/Z является π'-группой. Поскольку $Z \le R$, то Z — π-группа. По лемме 1 в группе B существует подгруппа A такая, что $B = A[Z]$. Поскольку $Z \le Z(G)$, то $B = A \times Z$. Так как $B \lhd G$ и $A = O_{\pi'}(B)$ char B, то $A \lhd G$ и $G = R \times A$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — группа, $N \lhd G$ и $N \le H(G)$. Если $A/N \le G/N$, $\pi := \pi(A/N)$ и A/N является π-холловой подгруппой группы G/N, то в G существует π-холлова подгруппа B такая, что $A/N = BN/N$ и $A = B \times N_{\pi'}$.*

Доказательство. Так как $\pi = \pi(A/N)$ и N — нильпотентная группа, то $N = N_\pi \times N_{\pi'}$. Если $N_{\pi'} = 1$, то A является π-группой и поскольку $|G/N : A/N| = |G : A|$ — π'-число, то отсюда следует, что A — π-холлова подгруппа группы G. Тогда полагаем $B = A$. Пусть $N_{\pi'} \ne 1$. По п. (1) леммы 2 получим, что $N_{\pi'} \le N \le A \cap H(G) \le H(A)$ и $N_{\pi'}$ является π'-холловой подгруппой группы A. Тогда по лемме 5 в A существует подгруппа B такая, что $A = B \times N_{\pi'}$. Так как B является π-холловой подгруппой группы A и $|G : A|$ — π'-число, то B является π-холловой подгруппой группы G, причем $A/N = BN/N$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть группа $G = [E_4 \times E_{11} \times E_{31}](Z_3 \times Z_5)$, где $[E_4]Z_3$, $[E_{11}]Z_5$, $[E_{31}]Z_3$ и $[E_{31}]Z_5$ являются группами Шмидта. Тогда G является $F_{\langle 1364,15 \rangle}$-группой. Отметим, что $E_4 \times Z_5$

и $E_{11} \times Z_3$ являются бипримарными холловыми нильпотентными подгруппами группы G и $(Z_3 \times Z_5) \cap (Z_3 \times Z_5)^a = Z_5$, где $1 \neq a \in E_4$. Следовательно, группа G не является группой Фробениуса.

Основные свойства $F_{\langle n,d \rangle}$-группы содержатся в следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть* $G := [M]H$ *является* $F_{\langle n,d \rangle}$*-группой,* $M := M_{p_1} \times M_{p_2} \times \ \ldots \times M_{p_s} := Soc(G)$, $|M_{p_i}| := p_i^{k_i}$, $k_i > 0$ *— целое число,* $i = 1, 2, \ldots s$, $\pi(H) := \{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$, $H := \langle h \rangle$, $h_j \in H$ *и* $|h_j| := q_j$, $j = 1, 2, \ldots, t$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\Phi(G) = Z(G) = 1$;

(2) *если* $L \cdot \lhd G$, *то существует* $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ *такое, что* $L = M_p$;

(3) $N_G(H) = H$;

(4) *для каждого* $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ *существует* $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ *такое, что* $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ *является группой Шмидта, причем* $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_j}$;

(5) *для каждого* $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ *существует* $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ *такое, что* $[M_{p_r}]\langle h_m \rangle$ *является группой Шмидта, причем* $p_r^{k_r} \equiv 1 \pmod{q_m}$;

(6) *если* $s = 1$ *или* $t = 1$, *то группа* G *является группой Фробениуса*;

(7) *каждая подгруппа Шмидта является холловой в* G *тогда и только тогда, когда* $|H|$ *свободен от квадратов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. Пусть $L \cdot \lhd G$, $L \leq \Phi(G)$. Тогда $L \leq M = Soc(G)$, и по [15, лемма 2.37] $M = L \times K$, причем $K \lhd G$. Отсюда следует, что $G = L(KH)$, причем $KH < G$. Так как $L \leq \Phi(G)$, то из $G = L(KH)$ вытекает, что $G = KH$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Допустим, что $Z = Z(G) \neq 1$. Тогда по [13, лемма 7.9] подгруппа Z дополняема в G. Следовательно, существует в G подгруппа A такая, что $G = ZA = Z \times A$ и, значит, группа G разложима, что противоречит определению 1. Следовательно, $Z(G) = 1$.

(2) Пусть $p \in \pi(L)$. Так как $M_p \lhd G$ и M_p является силовской p-подгруппой группы G, то $L \leq M_p$. Поскольку $Z(G) = 1$, то $C_G(L) < G$. По [15, лемма 2.37] существует такая подгруппа K, что $M = L \times K$ и, значит, $M \leq C_G(L)$. Тогда по модулярному тождеству $C_G(L) = M(C_G(L) \cap H)$, причем $C_H(L) = C_G(L) \cap H < H$. Поэтому существует $q \in \pi(H/C_H(L))$. Так как $C_H(M_p) \leq C_H(L)$, то $q \in \pi(H/C_H(M_p))$. По определению 1 в H существует подгруппа Q такая, что $|Q| = q$ и $[M_p]Q$ является группой Шмидта. Допустим, что $L < M_p$. Тогда из свойств группы Шмидта следует, что $L \leq \Phi(M_p)$. По модулярному тождеству получим, что $M_p = L \times (M_p \cap K)$; это невозможно. Следовательно, $L = M_p$.

(3) Допустим, что $H < T := N_G(H)$. По условию $G = [M]H$. Тогда по модулярному тождеству $T = H(T \cap M)$. Так как $H \lhd T$, $T \cap M \lhd T$ и $(T \cap M) \cap H = 1$, то $T = H \times (T \cap M)$. Из определения 1 и [15, лемма 2.37, п. 2)] следует, что M является абелевой с элементарными абелевыми силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi(M)$. Тогда $C_G(T \cap M) \geq \langle M \cup H \rangle = G$ и, значит, $Z(G) \neq 1$. Получили противоречие с п. (1). Следовательно, $N_G(H) = H$.

(4) Пусть $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Допустим, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ группа $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ является нильпотентной. Тогда $C_G(h_j) \geq \langle M \cup H \rangle = G$ и, значит, $Z(G) \neq 1$, что противоречит п. (1). Следовательно, существует $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ такое, что $q_j \in \pi(H/C_H(M_{p_i}))$ и по определению 1 $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ является группой Шмидта. Так как M_{p_i} является элементарной абелевой p_i-группой (см. доказательство п. (3)), то из свойств группы Шмидта $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ следует, что $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_j}$.

(5) Пусть $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Допустим, что для любого $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ группа $[M_{p_r}]H_{q_m}$ является нильпотентной. Тогда $C_G(M_{p_r}) \geq H_{q_m}$ для любого $m = 1, 2, \ldots, t$ и, значит, $C_G(M_{p_r}) \geq \langle M \cup H \rangle = G$. Поэтому $Z(G) \neq 1$, что противоречит п. (1). Следовательно, существует $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ такое, что $q_m \in \pi(H/C_H(M_{p_r}))$ и по определению 1 $[M_{p_r}]\langle h_m \rangle$ является группой Шмидта, причем $p_r^{k_r} \equiv 1 \pmod{q_m}$.

(6) Пусть $s = 1$. Тогда $G = [M_{p_1}]\langle h\rangle$, $M = M_{p_1} = Soc(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $H = \langle h\rangle$ является максимальной подгруппой группы G, причем по п. (3) $N_G(H) = H$.

Допустим, что существует $g \in G \setminus H$ такой, что $D = H \cap H^g \neq 1$. Тогда $C_G(D) \geq \langle H, H^g\rangle = G$, что противоречит п. (1). Следовательно, $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и, значит, G — группа Фробениуса с нормальным множителем M и дополнительным множителем H.

Пусть $t = 1$. Тогда $G = [M]H$, $\pi(H) = \{q_1\}$, $H = \langle h\rangle$ — циклическая q_1-группа и $|h_1| = q_1$. По п. (5) $[M_{p_i}]\langle h_1\rangle$ является группой Шмидта, причем $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_1}$ для любого $i = 1, 2, \dots, s$. По п. (3) $N_G(H) = H$. Допустим, что существует $x \in G \setminus H$ такой, что $D := H \cap H^x \neq 1$. Тогда по п. (3) $H^x \neq H$ и $T := N_G(D) \geq \langle H, H^x\rangle > H$. По модулярному тождеству $T = H(M \cap T)$, причем $L := M \cap T \neq 1$ и $G = MT$. Так как $L \lhd M$ и $L \lhd T$, то $L \lhd G$. Пусть $p_i \in \pi(L)$. Тогда в силу п. (2) $M_{p_i} \leq L$. Так как $H = \langle h\rangle$ — циклическая q_1-группа, $|h_1| = q_1$ и $1 \neq D < H$, то H содержит единственную подгруппу Q порядка q_1 и, значит, $h_1 \in Q \leq D$. Следовательно, $M_{p_i}\langle h_1\rangle \leq L \times D$ и, значит, $M_{p_i}\langle h_1\rangle$ — нильпотентная группа, что противоречит п. (5). Поэтому $H \cap H^x = 1$ для любого $x \in G \setminus H$ и G является группой Фробениуса.

(7) Пусть в группе G каждая подгруппа Шмидта является холловой. Так как для любого $q_j \in \pi(H)$ по п. (4) в группе G существует подгруппа Шмидта $[M_{p_i}]\langle h_j\rangle$, которая является холловой в G, то $\langle h_j\rangle$ — силовская q_j-подгруппа группы G и, значит, $|H_{q_j}| = q_j$ для любого $q_j \in \pi(H)$. Поэтому $|H|$ свободен от квадратов.

Пусть в $F_{\langle n,d\rangle}$-группе $G = [M]H$ порядок подгруппы H свободен от квадратов. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G. Тогда $S_p = S \cap M_p \lhd S$. Так как $S_q \not\subseteq C_G(S_p)$ и $C_G(M_p) \leq C_G(S_p)$, то $q \in \pi(G/C_G(M_p)) = \pi(H/C_H(M_p))$. Тогда по определению 1 в G существует подгруппа Шмидта $[M_p]Q$, где $Q \leq H$ и $|Q| = q$. Пусть $|M_p| := p^k$. Тогда $p^k \equiv 1 \pmod{q}$ и k — показатель числа p по модулю q. Так как $|S_p|$ также обладает этим свойством, то $|S_p| = |M_p|$. Поскольку $|H|$ свободен от квадратов, то отсюда следует, что S является холловой подгруппой группы G. Лемма доказана.

3. Доказательство основных результатов

Теорема 2. *Если в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова, то $G/H(G) := F_1 \times \ldots \times F_r$, где F_i — холлова подгруппа в $G/H(G)$, изоморфная $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группе, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \dots, r$.*

Доказательство. Пусть в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. Пусть $Z := Z(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z$. По лемме 3 в группе $\overline{G}$ каждая подгруппа Шмидта холлова. Так как $|\overline{G}| < |G|$, то по индукции для группы $\overline{G}/H(\overline{G})$ заключение теоремы выполняется. По п. (2) леммы 2 $H(G/Z) = H(G)/Z$. Тогда $\overline{G}/H(\overline{G}) \cong G/H(G)$ и, значит, для группы G заключение теоремы выполняется. Следовательно, $Z(G) = 1$.

Допустим, что $\Phi := \Phi(G) \neq 1$. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G, $M \leq \Phi(G)$ и M — элементарная абелева p-группа. По [13, лемма 3.9] $O_p(G/C_G(M)) = 1$. Так как $Z(G) = 1$, то $C_G(M) \neq G$. Пусть $x \in G \setminus C_G(M)$, x — q-элемент, где $q \neq p$. Тогда $[M]\langle x\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть V — некоторая подгруппа Шмидта группы $[M]\langle x\rangle$. Тогда V — $S_{\langle p,q\rangle}$-группа, $V_p \leq M$. По условию V — холлова подгруппа группы G. Следовательно, V_p — силовская p-подгруппа группы G и, значит, $V_p = M = G_p$, что невозможно из-за $M \leq \Phi(G)$.

Итак, $\Phi(G) = 1$. Пусть $F := F(G)$. Тогда по [13, лемма 7.9] $G = [F]H$, причем по п. (4) леммы 4 F является холловой подгруппой в G, силовские подгруппы из F суть минимальные нормальные подгруппы группы G, а H — циклическая группа порядка, свободного от квадратов.

Допустим, что группа G разложима. Тогда в G существуют собственные нормальные подгруппы A и B такие, что $G := A \times B$. Так как $Z(G) = 1$, то $Z(A) = Z(B) = 1$ и, значит, A и B — ненильпотентные подгруппы группы G. Поскольку $A \lhd G$ и $F(A)$ char A, то $F(A) \lhd G$. Следовательно, $F(A) \leq F(G)$ и $F(A) = A \cap F(G)$. По [15, лемма 2.37, п. 1] $F(A)F(G) = F(G) = F(A) \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы G и N_i — силовская подгруппа группы G, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $F(G)$ — холлова подгруппа в группе G, то отсюда следует, что $F(A)$ — холлова подгруппа в группе G. Аналогично $F(B)$ — нормальная холлова подгруппа в группе G, причем $F(G) = F(A) \times F(B)$. Из того что $G/F(G) \cong A/F(A) \times B/F(B)$ — группа порядка, свободного от квадратов, следует: A и B — холловы подгруппы группы G.

Поскольку $|A| < |G|$ и каждая подгруппа Шмидта группы A холлова в G, а значит, и в группе A, то по индукции $A = F_1 \times \ldots \times F_m$, где F_i — $F_{\langle n_i, d_i \rangle}$-подгруппа группы A, $i = \overline{1, m}$, причем $|F_1|, \ldots, |F_m|$ попарно взаимно просты. Аналогично $B = F_{m+1} \times \cdots \times F_t$ и, значит, $G = F_1 \times \ldots \times F_t$, где $|F_1|, \ldots, |F_t|$ попарно взаимно просты, и G удовлетворяет заключению теоремы. Получили противоречие. Следовательно, группа G не является разложимой группой.

Допустим, что $F < Soc(G) := C$. Тогда по модулярному тождеству получим, что $C = F(C \cap H)$, причем $C \cap H \neq 1$. Так как $C_G(C \cap H) \geq \langle C, H \rangle = G$, то $C \cap H \leq Z(G) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, $F = Soc(G)$. Пусть $p \in \pi(F)$. Так как $Z(G) = 1$, то $C_G(F_p) < G$. Пусть $q \in \pi(G/C_G(F_p))$. Так как $F \leq C_G(F_p)$, то $G = HC_G(F_p)$ и, значит, $G/C_G(F_p) \cong H/C_H(F_p)$. Тогда $[F_p]H_q$ является ненильпотентной подгруппой группы G для любого $q \in \pi(H/C_H(F_p))$. Поэтому группа $[F_p]H_q$ содержит $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппу S. По условию S является холловой подгруппой группы G. Следовательно, $S = [F_p]H_q$. Так как $|H|$ свободен от квадратов, то $|H_q| = q$. По определению 1 G является $F_{\langle n,d \rangle}$-группой, где $n := |F|$ и $d := |H|$. Получили противоречие. Теорема 2 доказана.

П р и м е р 2. Пусть группа $U = [Q_8 \times E_{11} \times E_{31}](Z_9 \times Z_{125})$, где Q_8 — группа кватернионов, $[Q_8]Z_9$, $[E_{11}]Z_{125}$, $[E_{31}]Z_9$, $[E_{31}]Z_{125}$ являются группами Шмидта, а $Q_8 \times Z_{125}$ и $E_{11} \times Z_9$ — бипримарными холловыми нильпотентными подгруппами группы U. Тогда U является S-накрывающей $F_{\langle 1364,15 \rangle}$-группы $U/Z(U)$ из примера 1, причем в группе U каждая подгруппа Шмидта холлова.

З а м е ч а н и е 1. Группа U, приведенная в примере 2, является накрывающей $F_{\langle 1364,15 \rangle}$-группы G из примера 1, причем группа U получена путем замены каждой подгруппы Шмидта в G ее накрывающей. Ранее подгруппы Шмидта назывались подгруппами типа S (см. [2]). В связи с этим согласно определению 2 группу U называем S-накрывающей группой $F_{\langle 1364,15 \rangle}$-группы G.

Теорема 3. *Пусть U является S-накрывающей группой $F_{\langle n,d \rangle}$-группы G и $Z := Z(U)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$Z = \Phi(U)$, $U/Z \cong G$ и для любого $p \in \pi(Z)$ силовская p-подгруппа группы Z содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.*

(2) *Если S — $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа группы U, то $S \cap Z$ является $\{p, q\}$-холловой подгруппой группы Z.*

(3) *В группе U каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда в $F_{\langle n,d \rangle}$-группе G число d свободно от квадратов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Так как U является S-накрывающей группой $F_{\langle n,d \rangle}$-группы G, то по определению 2 в группе U существует нормальная подгруппа A такая, что $U/A \cong G$, $A \leq \Phi(U) \cap Z(U)$ и для любого $p \in \pi(A)$ силовская p-подгруппа группы A содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U. По п. (1) леммы 7 $\Phi(U/A) = Z(U/A) = 1$, а по [14, лемма III, п. 3.4b)] $\Phi(U/A) = \Phi(U)/A = 1$. Отсюда следует, что $\Phi(U) = A$. Так как $Z(U)/A \leq Z(U/A) = 1$, то $Z(U) = A$. Следовательно, $Z = Z(U) = \Phi(U) = A$ и для любого $p \in \pi(Z)$ силовская p-подгруппа группы Z содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.

(2) Пусть $r \in \pi(S \cap Z)$. Тогда $r \in \pi(Z)$ и по п. (1) $Z_r \leq S$. Следовательно, $S \cap Z$ является $\{p, q\}$-холловой подгруппой группы Z.

(3) Пусть в группе U каждая подгруппа Шмидта холлова. Тогда по лемме 3 в U/Z каждая подгруппа Шмидта холлова. Так как U/Z является $F_{\langle n,d\rangle}$-группой, то по п. (7) леммы 7, число d свободно от квадратов.

Пусть в $F_{\langle n,d\rangle}$-группе U/Z число d свободно от квадратов и S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы U. Тогда $SZ/Z \cong S/S\cap Z$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой $F_{\langle n,d\rangle}$-группы U/Z. По п. (7) леммы 7 SZ/Z является холловой подгруппой в группе U/Z и, значит, $|U/Z : SZ/Z| = |U : SZ| := k$ является $\{p,q\}'$-числом. Поскольку $k = |U|/|SZ| = (|U||S\cap Z|)/(|S||Z|)$, то $|U|/|S| = k|Z|/|S\cap Z|$. Так как по п. (2) $|Z|/|S\cap Z|$ является $\{p,q\}'$-числом, то $|U|/|S|$ — $\{p,q\}'$-число. Следовательно, S — холлова подгруппа группы U. Теорема 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Пусть в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова и G — контрпример минимального порядка. Тогда по теореме 2 $G/H(G) = F_1\times\ldots\times F_t$, где F_i является холловой подгруппой в $G/H(G)$, изоморфной $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группе, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Допустим, что $R := H(G) = 1$. Тогда $G = F_1 \times \ldots \times F_t$ является группой из заключения теоремы. Получили противоречие. Следовательно, $R \neq 1$.

Пусть $\pi := \pi(G/R)$. Так как G/R является π-холловой подгруппой группы G/R, то по лемме 6 в группе G существует π-холлова подгруппа B такая, что $G = B \times R_{\pi'}$. Допустим, что $R_{\pi'} \neq 1$. Пусть S — некоторая подгруппа Шмидта группы B. Тогда S — подгруппа Шмидта в группе G; по условию S холлова в G и, значит, S — холлова подгруппа в B. Так как $|B| < |G|$, то по индукции B удовлетворяет заключению теоремы. Пусть $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times M$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t, M$ — нормальные холловы подгруппы группы B, $1 \leq M \leq F(B)$ и A_i является S-накрывающей $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $G = B\times R_{\pi'} = A_1 \times A_2 \times\cdots\times A_t \times N$, где $N := M \times R_{\pi'} \leq F(G)$ и группа G удовлетворяет заключению теоремы. Получили противоречие. Следовательно, $R_{\pi'} = 1$. Тогда R является π-группой и $\pi = \pi(G)$.

Пусть $F_i := B_i/R$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $B_i \lhd G$, $i = 1, 2, \ldots, t$ и $G = B_1B_2\ldots B_t$. Пусть $\pi_i := \pi(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как $G/R = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_t$, причем F_i — холлова подгруппа в G/R для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ и $\pi = \pi(G/R)$, то $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_t$ и $\pi_i \cap (\pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_{i-1} \cup \pi_{i+1} \cup \ldots \cup \pi_t) = \varnothing$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. По п. (1) леммы 2 $R \leq H(B_i)$. Так как B_i/R является π_i-холловой подгруппой группы G/R, то по лемме 6 в группе G существует π_i-холлова подгрупа A_i такая, что $B_i = A_i \times R_{\pi_i'}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Поскольку $B_i \lhd G$ и A_i char B_i, то $A_i \lhd G$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $G = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t)R$, причем A_i является π_i-холловой подгруппой в группе G для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как R является π-группой и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_t$, то для любого $p \in \pi(R)$ существует $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ такое, что $p \in \pi_i$. Тогда $R_p \leq A_i$ и, значит, $A_iR_p = A_i$. Поэтому $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$.

Покажем, что A_i является S-накрывающей группой $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть $t = 1$. Тогда $G = A_1$, $R = H(G)$, $\pi = \pi(G) = \pi(G/R)$ и G/R является $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группой, причем d_1 свободно от квадратов. По пп. (4), (5) леммы 7, для любого $r \in \pi(R)$ в группе G/R существует rd-подгруппа Шмидта B/R. По п. (1) леммы 2 $R \leq H(B)$. Пусть $\pi(B/R) := \{r, s\}$. Тогда по лемме 6 $B = C \times R_{\{r,s\}'}$, где C — холлова $\{r, s\}$-подгруппа группы B. Так как $B/R = CR/R \cong C/C \cap R$ — группа Шмидта, то C — ненильпотентная $\{r, s\}$-группа. Тогда C содержит подгруппу Шмидта, которая по условию холлова в G и, значит, совпадает с C. Так как $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$ и фактор-группа G/R по определению 1 не является разложимой, то группа G не является p-разложимой для любого $p \in \{r, s\}$. Тогда по пп. (2), (3) леммы 4 $Z(C) \leq Z(G) \leq R$. Следовательно, $Z(C) \leq C \cap R$. Так как по п. (1) леммы 2 и по свойствам группы Шмидта C имеем $C \cap R \leq H(C) = Z(C)$, то $Z(C) = C \cap R \leq Z(G)$. Поскольку C холлова в группе G, то $C \cap R$ является холловой $\{r, s\}$-подгруппой группы R. Тогда силовская p-подгруппа $R_p \leq C \cap R \leq Z(G)$ для любого $p \in \pi(R)$ и, значит, $R \leq Z(G)$. Поскольку $Z(G) \leq R$, то $R = Z(G)$. По свойствам группы Шмидта имеем $Z(C) = \Phi(C)$. Допустим, что $Z(C) \nsubseteq \Phi(G)$. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа M, не содержащая

$Z(C)$ и, значит, $G = Z(C)M$. По модулярному тождеству получим, что $C = Z(C)(C \cap M) = \Phi(C)(C \cap M) = C \cap M$ и, значит, $Z(C) \leq C \leq M$. Получили противоречие. Следовательно, $Z(C) = \Phi(C) \leq \Phi(G)$. Тогда $R_p \leq Z(C) \leq \Phi(G)$ для любого $p \in \pi(R)$ и, значит, $R \leq \Phi(G)$. Так как G/R является $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группой, то по п. (1) леммы 7 $\Phi(G/R) = 1$. По [14, лемме III, 3.4 b)] $\Phi(G/R) = \Phi(G)/R = 1$. Поэтому $R = \Phi(G)$. Так как для любого $p \in \pi(R)$ любая pd-подгруппа Шмидта T является холловой в G, то $R_p \leq T$. Тогда по определению 2 $G = A_1$ является S-накрывающей группой $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группы $A_1/Z(A_1)$ и, значит, $G = A_1$ — эта группа из заключения теоремы 1. Получили противоречие.

Пусть $t > 1$. Тогда $|A_i| < |G|$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Пусть S — подгруппа Шмидта группы A_i. Тогда по условию S холлова в группе G и, значит, S является холловой в группе A_i. По индукции $A_i = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_s \times N_i$, где C_r, N_i холловы подгруппы группы A_i, C_r является S-накрывающей группой $F_{\langle m_r,k_r\rangle}$-группы $C_r/Z(C_r)$, где k_r свободно от квадратов для любого $r = 1, 2, \ldots, s$ и $1 \leq N_i \leq F(A_i)$. Так как $F_i = B_i/R = A_iR/R \cong A_i/A_i \cap R$ является $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группой, $\pi_i = \pi(F_i) = \pi(A_i/Z(A_i)) = \pi(A_i)$, то $A_i \cap R$ является π_i-группой для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. По п. (1) леммы 2 $A_i \cap R \leq H(A_i)$, а по п. (1) леммы 7 $Z(A_i/A_i \cap R) = 1$. Тогда $A_i \cap R = H(A_i) \geq N_i$. Поэтому $A_i/A_i \cap R \cong (A_i/N_i)/(A_i \cap R/N_i)$ и, значит, $\pi(A_i/N_i) = \pi_i$. Так как N_i — холлова подгруппа группы A_i и $\pi(A_i) = \pi(A_i/N_i) = \pi_i$, то отсюда следует, что $N_i = 1$. Тогда $A_i = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_s$ и $H(A_i) = H(C_1) \times H(C_2) \times \cdots \times H(C_s)$. Так как по определению 1 группа $A_i/H(A_i) \cong C_1/H(C_1) \times C_2/H(C_2) \times \cdots \times C_s/H(C_s)$ не разложима, то $s = 1$ и $A_i = C_1$ является S-накрывающей группой $F_{\langle m_1,k_1\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ и, значит, G — группа из заключения теоремы 1. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times N$, где A_i — нормальная холлова подгруппа группы G, являющаяся S-накрывающей группой $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$ такой, что d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$, N — нормальная холлова нильпотентная подгруппа в G и S — подгруппа Шмидта группы G. Если P — силовская подгруппа группы A_i, а Q — силовская подгруппа в N или в A_j, $i \neq j$, то P и Q поэлементно перестановочны и, значит, PQ — нильпотентная группа. Так как по теореме Ф. Холла S содержится в некоторой бипримарной холловой подгруппе группы G, то S содержится в A_i для некоторого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда по п. (3) теоремы 3 S является холловой подгруппой в A_i и, значит, S — холлова подгруппа в группе G. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть G — ненильпотентная группа и $Z(G) = 1$. В группе G каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда группа $G := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t$ — нормальные холловы подгруппы группы G, A_i является $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группой, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.*

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1–3 доказаны без применения классификации конечных простых групп и анонсированы в тезисах [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. **Чунихин С.А.** Подгруппы конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1964. 158 с.
3. **Шеметков Л.А.** О.Ю.Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, вып. 5. С. 585–590.
4. **Мазуров В.Д., Сыскин С.А.** О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, вып. 2. С. 217–222.
5. **Журтов А.Х., Сыскин С.А.** О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 26, вып. 1. С. 74–78.
6. **Монахов В.С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. Сек. 1. Киев, 2001. С. 81–90.
7. **Монахов В.С., Княгина В.Н.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, вып. 6. С. 1316–1322.
8. **Ведерников В.А.** Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта// Алгебра и логика. 2007. Т. 46, вып. 6. С. 669–687.

9. **Kniahina V.N., Monakhov V.S.** Finite groups with hall Schmidt subgroups // Publ. Math. Debrecen. 2012. Vol. 81, no. 3-4, P. 341–350.
10. **Iwasawa K.** Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind // Proc. Phys.-Math. Soc. III Ser. Japan, 1941. Vol. 23. P. 1–4.
11. **Гольфанд Ю.А.** О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, вып. 8. С. 1313–1315.
12. **Redei L.** Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math. Debrecen. 1956. № 4. P. 303–324.
13. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 267 с.
14. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
15. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Высш. шк., 2006. 207 с.
16. **Ведерников В.А., Бажанова Е.Н.** Конечные группы с холловыми подгруппами Шмидта // Абелевы группы: материалы Междунар. симпозиума, посвящ. 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова / Моск. педагог. гос. ун-т. М., 2014. С. 21–22.

Ведерников Виктор Александрович Поступила 20.07.2015
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ
e-mail: vavedernikov@mail.ru

Бажанова Екатерина Николаевна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ
e-mail: DeminaENmf@yandex.ru