ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.532.2

ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ЭПИГРУПП. I[1]

Б. М. Верников, Д. В. Скоков

В работе получено описание многообразий эпигрупп, содержащих по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу, решетка подмногообразий которых модулярна, дистрибутивна, дезаргова или полумодулярна.

Ключевые слова: эпигруппа, многообразие, решетка подмногообразий, дистрибутивность, дезарговость, модулярность, полумодулярность.

B. M. Vernikov, D. V. Skokov. Semimodular and Arguesian varieties of epigroups. I.

We describe varieties of epigroups such that they contain at least one 3-step nilpotent epigroup and their lattice of subvarieties is modular, distributive, Arguesian, or semimodular.

Keywords: epigroup, variety, lattice of subvarieties, distributivity, Arguesian variety, modularity, semimodularity.

MSC: 20M07, 08B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-31-43

1. Введение и формулировки результатов

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти в работах [10; 17]. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя, в частности, все периодические полугруппы (которые можно определить как полугруппы, в которых некоторая степень каждого элемента лежит в некоторой конечной циклической подгруппе) и все вполне регулярные полугруппы (т. е. полугруппы, в которых каждый элемент является групповым).

Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией, которая вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно (см., например, [10; 17]), что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$. Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Отображение $x \longmapsto \overline{x}$ и есть упомянутая выше унарная операция на эпигруппе S. Элемент $\overline{x}$ называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в указанной сигнатуре. Хорошо известно, что во всякой периодической эпигруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение (см., например, [10; 17]). Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

[1]Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства и образования и науки РФ), поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и РФФИ (грант 14-01-00524).

Некоторая информация о многообразиях эпигрупп приведена в [10; 11; 17]. Там же сформулирован ряд открытых проблем. В частности, в этих работах Л. Н. Шевриным была поставлена задача описания многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Не менее естественным представляется и рассмотрение многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых удовлетворяет другим решеточным тождествам (прежде всего, дистрибутивности и дезарговости), а также некоторым близким условиям (таким, как полумодулярность).

Отметим, что все эти условия были рассмотрены ранее первым автором и М. В. Волковым применительно к решеткам многообразий полугрупп. При этом были получены следующие результаты:

1) описаны многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий (анонсировано в [7], доказательство по модулю ниль-случая опубликовано в [4–6; 21], а в ниль-случае — в [1; 3; 8]);

2) описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых дезаргова, полумодулярна вверх, слабо полумодулярна вверх, полумодулярна вниз или слабо полумодулярна вниз [1; 3; 8]; в частности, показано, что первые три из этих пяти ограничений на решетку подмногообразий эквивалентны модулярности, а два последних — эквивалентны между собой, но не эквивалентны модулярности;

3) описаны (по модулю многообразий периодических групп) многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий за пределами одного, достаточно узкого, класса[2] (легко извлекается из результатов работ [4–6; 19]).

Более подробную информацию обо всех этих результатах можно найти в § 11 обзорной статьи [11]. Отметим, что для многообразий, содержащих 3-ступенно нильпотентные полугруппы, эти результаты имеют две особенности. Во-первых, в данном случае модулярность решетки подмногообразий эквивалентна выполнению в этой решетке некоторых тождеств, намного более сильных, чем дезарговость (а именно тождеств решетки $M_{4,3}$, изображенной на рис. 1). Во-вторых, многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий описаны здесь не по модулю групп, а полностью.

В силу сказанного выше результаты, указанные в пп. 1)–3), дают описание периодических многообразий эпигрупп с упомянутыми в пп. 1)–3) свойствами. В данной работе авторами получены аналоги этих результатов для непериодических многообразий эпигрупп, содержащих по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Отметим, что для многообразий эпигрупп, не содержащих 3-ступенно нильпотентных эпигрупп, аналогичные результаты получены первым автором, М. В. Волковым и В. Ю. Шапрынским. Они будут опубликованы отдельно. Все полученные результаты в совокупности дают полный эпигрупповой аналог результатов, упомянутых в пп. 1)–3). Тем самым в частности, полностью решена упомянутая выше проблема Шеврина об описании многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

Чтобы привести точные формулировки основных результатов работы, нам понадобится ряд обозначений и определений. Напомним, что решетка $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется [*слабо*] *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ [x и y покрывает $x \wedge y$], вытекает, что $x \vee y$ покрывает y. Двойственно определяются [*слабо*] *полумодулярные вниз* решетки. Как обычно, через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\mathrm{var}\,\Sigma$ — многообразие эпигрупп, заданное системой тождеств Σ. Легко понять, что условия [слабой] полумодулярности (как вверх, так и вниз), вообще говоря, не наследуются подрешетками. Но эти условия, очевидно, наследуются интервалами решеток. Отсюда вытекает, что указанные условия переносятся с решетки подмногообразий данного многообразия на решетки подмногообразий содержащихся в нем многообразий (так как если $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, то $L(\mathcal{U})$ — интервал в $L(\mathcal{V})$). Мы будем придерживаться обычного соглашения, в соответствии с которым через $w = 0$ обозначается система тождеств вида $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая

[2]Этот класс состоит из *многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом*, т. е. многообразий, в которых квадрат всякой полугруппы является вполне регулярной полугруппой.

в слово w. Если n — натуральное число, а π — перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, то через $p_n[\pi]$ обозначается тождество $x_1x_2 \cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$. Если перестановка π нетривиальна, то тождество $p_n[\pi]$ называется *перестановочным*. Через $\mathcal{AG}$ обозначается многообразие всех абелевых групп, через $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток, а через $\mathcal{T}$ — тривиальное многообразие. Положим $\mathcal{C}_m = \mathrm{var}\,\{x^m = x^{m+1},\ xy = yx\}$, где m — произвольное натуральное число. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Для удобства изложения будем также считать, что $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Многообразие эпигрупп называется *многообразием ступени* n, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\le n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Отметим, что многообразия ступени 1 — это в точности вполне регулярные многообразия. Будем говорить, что многообразие эпигрупп имеет *ступень* $> n$, если оно не является многообразием ступени $\le n$. Отметим, что многообразие эпигрупп имеет ступень > 2 тогда и только тогда, когда оно содержит по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Обозначим через $M_{4,3}$ решетку, изображенную на рис. 1, а через $\mathbf{M}_{4,3}$ — многообразие, порожденное этой решеткой. Отметим, что решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

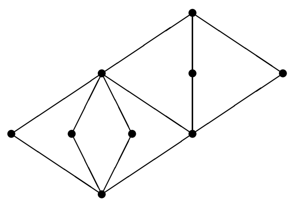

Рис. 1. Решетка $M_{4,3}$.

Первым из двух основных результатов данной работы является

Теорема 1. *Для непериодического многообразия эпигрупп* $\mathcal{V}$ *ступени* > 2 *следующие условия эквивалентны*:

а) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *слабо полумодулярна вверх*;
б) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *слабо полумодулярна вниз*;
в) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вверх*;
г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз*;
д) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна*;
е) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова*;
ж) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$;
з) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где* $0 \le m \le 2$, *а многообразие* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0 \tag{1}$$

и $p_4[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок*

$$(123),\ (124),\ (134),\ (234),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23); \tag{2}$$

и) *многообразие* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\overline{\overline{x}},\ p_4[\pi], \tag{3}$$

где π *— одна из перестановок* (2).

Как видно из теоремы 1, для непериодических многообразий эпигрупп ступени > 2 слабая полумодулярность вниз решетки его подмногообразий эквивалентна ее модулярности. В периодическом случае это не так (см. [1]).

Вторым основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны*:

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна*;

б) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где* $0 \le m \le 2$, *а многообразие* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам* (1) *и* $p_3[\pi]$, *где* π — *одна из перестановок*

$$(12),\ (13),\ (23),\ (123); \tag{4}$$

в) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\,\overline{\overline{x}},\ p_3[\pi],$$

где π — *одна из перестановок* (4).

Для полноты картины укажем кратко, как выглядят аналоги теорем 1 и 2 для периодических многообразий. Если $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого удовлетворяет одному из условий а)–ж) теоремы 1, то согласно результатам работ [1; 3; 8] либо $\mathcal{V}$ содержится в некотором непериодическом многообразии с тем же свойством (и потому “покрывается” теоремой 1), либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств, в явном виде перечисленных в [1] (а также в [3]). Число этих систем тождеств составляет 146 — для условий а), в), д), е) и ж) теоремы 1 и 113 — для условий б) и г) этой теоремы, и мы не будем здесь их приводить. Как вытекает из результатов работ [4–6; 19], аналогично устроены и периодические многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, не являющиеся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Многообразие $\mathcal{N}$ в этом случае удовлетворяет одной из 21 системы тождеств, указанных в [19] (а также в [18]).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 2 собраны необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения, разд. 3 посвящен доказательству основных результатов, а в разд. 4 указаны некоторые следствия из основных результатов данной работы и результатов работ [1; 3; 8].

2. Предварительные сведения

Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{Gr}\, S$ множество всех групповых элементов эпигруппы S. Для удобства ссылок сформулируем в виде леммы несколько часто используемых в дальнейшем простых фактов.

Лемма 1. *Пусть S — эпигруппа.*

(i) *Эпигруппа S вполне регулярна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству*

$$x = \overline{\overline{x}}\,. \tag{5}$$

(ii) *Если S — нильполугруппа, то она удовлетворяет тождеству*

$$\overline{x}\ = 0. \tag{6}$$

(iii) *Если S удовлетворяет тождеству $x^m = x^{m+1}$, то в S выполнены тождества $\overline{x} = \overline{\overline{x}} = x^m$.* □

Положим $\mathcal{P} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\, x^2y^2 = y^2x^2\}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{var}\,\{xy = xy^2,\, x^2y^2 = y^2x^2\}$. Следующее утверждение было приведено без доказательства в [20, теорема 3.2][3]. Его доказательство можно найти в [13, предложение 2.12].

[3]В формулировке этого результата в [20] допущена опечатка: вместо слов “правый идеал” написано “левый идеал”.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп. Во всякой эпигруппе $S \in \mathcal{V}$ множество* $\mathrm{Gr}\ S$ *является правым идеалом тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$.* $\square$

Через $\mathrm{var}\ S$ обозначается многообразие эпигрупп, порожденное эпигруппой S. Из предложения 1 легко вытекает

Следствие 1. *Если S — эпигруппа с единицей такая, что многообразие* $\mathrm{var}\ S$ *не содержит многообразий $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$, то эпигруппа S вполне регулярна.*

Доказательство. Согласно предложению 1 множество $\mathrm{Gr}\ S$ — правый идеал в S. Единица эпигруппы S является ее групповым элементом, а значит, $x = 1 \cdot x \in \mathrm{Gr}\ S$ для любого $x \in S$. Следовательно, $S \subseteq \mathrm{Gr}\ S$. В силу очевидности обратного включения имеем $S = \mathrm{Gr}\ S$, т. е. S — вполне регулярная эпигруппа. $\square$

Положим $\mathcal{LZ} = \mathrm{var}\,\{xy = x\}$ и $\mathcal{RZ} = \mathrm{var}\,\{xy = y\}$. Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов.

Предложение 2 [16, предложение 2.6]. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, не содержащее многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* $\square$

Следующее утверждение (точнее, его полугрупповой аналог) является частью полугруппового фольклора. Поскольку оно легко выводится из предложения 2, мы, для полноты изложения, приводим его доказательство.

Следствие 2. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп, то $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.*

Доказательство. Многообразие $\mathcal{V}$ очевидным образом не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$ и $\mathcal{SL}$. Поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, два последних многообразия также не содержатся в $\mathcal{V}$. Согласно предложению 2 многообразие $\mathcal{V}$ представимо в виде $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{C}_2$, значит, $\mathcal{C}_2 \nsubseteq \mathcal{V}$. Далее из следствия 1 вытекает, что эпигруппа, порождающая многообразие $\mathcal{M}$, вполне регулярна. Значит, и само многообразие $\mathcal{M}$ вполне регулярно. Но, как хорошо известно, всякое вполне регулярное многообразие, не содержащее нетривиальных полугрупп идемпотентов, является многообразием групп. $\square$

Лемма 2 [16, лемма 2.7]. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{M}$ порождается коммутативной эпигруппой с единицей, то $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$.* $\square$

Для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ положим $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие всех групп (иными словами, $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{V})$ — наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$). Напомним, что многообразие эпигрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны.

Лемма 3. *Если $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{K}$ — комбинаторное многообразие эпигрупп, то* $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K}) = \mathcal{G}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что любое тождество, выполненное в $\mathcal{G}$, выполнено и в $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. Будучи комбинаторным, многообразие $\mathcal{K}$ удовлетворяет тождеству $x^n = x^{n+1}$ для некоторого n. Пусть $u = v$ — тождество многообразия $\mathcal{G}$. Тогда в $\mathcal{G} \vee \mathcal{K}$ выполнено тождество

$u^{n+1}v^n = u^n v^{n+1}$. Сокращая это тождество слева на u^n и справа на v^n, получаем, что $u = v$ в $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. □

В заключение раздела приведем необходимую для дальнейшего информацию о нильмногообразиях полугрупп со слабо полумодулярной вверх, слабо полумодулярной вниз или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Поскольку нильмногообразия полугрупп периодичны, ее можно применять и при рассмотрении многообразий эпигрупп с теми же свойствами. Из теорем 1 и 2 работы [1], доказательство которых можно найти в [1; 3; 8], вытекает

Лемма 4. *Если нильмногообразие полугрупп имеет слабо полумодулярную вверх или вниз решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству* $p_4[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок* (2). *Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (1), *то решетка его подмногообразий принадлежит* $\mathbf{M}_{4,3}$. □

Следующая лемма непосредственно вытекает из описания нильмногообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, полученного в [19] и передоказанного более простым и коротким способом в [18, предложение 4.2].

Лемма 5. *Если нильмногообразие полугрупп имеет дистрибутивную решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству* $p_3[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок* (4). *Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (1), *то решетка его подмногообразий дистрибутивна.* □

3. Доказательства основных утверждений

Мы будем доказывать теоремы 1 и 2 параллельно. Доказательство теоремы 1 будет проводиться по схеме

$$\begin{tikzcd}
\text{в)} \arrow[rrr] & & & \text{а)} \arrow[d] & \\
\text{д)} \arrow[u] \arrow[d] & \text{е)} \arrow[l] & \text{ж)} \arrow[l] & \text{з)} \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{и).} \\
\text{г)} \arrow[rrr] & & & \text{б)} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Импликации ж) $\longrightarrow$ е) $\longrightarrow$ д) $\longrightarrow$ в) $\longrightarrow$ а) и д) $\longrightarrow$ г) $\longrightarrow$ б) этой теоремы очевидны, поэтому нам достаточно доказать только импликации а) $\longrightarrow$ з) $\longrightarrow$ ж), б) $\longrightarrow$ з), з) $\longrightarrow$ и) и и) $\longrightarrow$ з). Доказательство теоремы 2 будет проводиться по схеме а) $\longleftrightarrow$ б) $\longleftrightarrow$ в). Оставшаяся часть раздела делится на четыре подраздела.

3.1. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликация а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2

Чтобы доказать эти импликации, нам понадобится ряд лемм. Положим

$$\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\,\{xy = 0\}, \quad \mathcal{F}_3 = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyz = 0,\, xy = yx\} \text{ и } \mathcal{N}_3 = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyz = 0\}.$$

Хорошо известно и легко проверяется, что интервал $[\mathcal{ZM}, \mathcal{N}_3]$ решетки многообразий полугрупп состоит только из трех введенных сейчас многообразий.

Лемма 6. *Если* $\mathcal{X}$ *— либо одно из многообразий* $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ *и* $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, *либо неабелево многообразие групп, то решетка* $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ *не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз.*

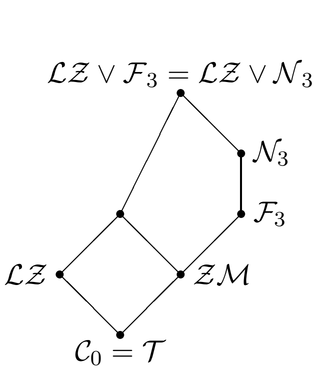

Рис. 2. Решетка $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{F}_3)$.

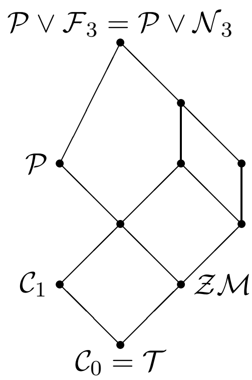

Рис. 3. Решетка $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{F}_3)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Как проверено в [1], решетки $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{F}_3)$ и $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{F}_3)$ имеют вид, изображенный на рис. 2 и 3 соответственно. Очевидно, что ни одна из этих решеток не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Поскольку двойственные друг к другу многообразия имеют изоморфные решетки подмногообразий, указанными свойствами не обладают и решетки $L(\mathcal{RZ} \vee \mathcal{F}_3)$ и $L(\overleftarrow{\mathcal{P}} \vee \mathcal{F}_3)$.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ — неабелево многообразие групп. Многообразие $\mathcal{X}$ содержит минимальное неабелево многообразие $\mathcal{X}'$. Обозначим через $\mathcal{G}$ объединение всех собственных подмногообразий многообразия $\mathcal{X}'$. Ясно, что $\mathcal{X}'$ покрывает $\mathcal{G}$ в решетке $L(\mathcal{X}')$. Покажем, что интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ не является слабо полумодулярным ни вверх, ни вниз. Пусть $\mathcal{W}$ — любое многообразие из этого интервала. Заметим, что в многообразии $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$ выполнено тождество $x\overline{x} = y\overline{y}$. В силу леммы 1(iii) в любом многообразии идемпотентных эпигрупп это тождество равносильно тождеству $x = y$. Это значит, что многообразие $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$, а следовательно, и $\mathcal{W}$, не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп. Используя следствие 2, получаем, что $\mathcal{W} = \mathcal{H} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{H}$ — некоторое многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Согласно лемме 3 $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{W}) = \mathrm{Gr}\,(\mathcal{H} \vee \mathcal{N}) = \mathcal{H}$ и $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3) = \mathcal{X}'$. Поскольку, $\mathcal{W} \in [\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$, получаем, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}'$, а значит $\mathcal{H}$ — одно из многообразий $\mathcal{G}$ или $\mathcal{X}'$. Заметим, что $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_3$, а значит, $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{F}_3$ или $\mathcal{N}_3$. Следовательно, многообразие $\mathcal{W}$ совпадает с одним из шести многообразий: $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_3$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{N}_3$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$ или $\mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Дословно повторяя соответствующую часть доказательства леммы 1 работы [4], можно проверить, что если $\mathcal{Y}$ — некоммутативное многообразие эпигрупп, то $\mathcal{Y} \vee \mathcal{F}_3 \supseteq \mathcal{N}_3$. Это означает, что $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3 = \mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Следовательно, интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ имеет вид, изображенный на рис. 4. В частности, он не является слабо полумодулярным ни вверх, ни вниз. □

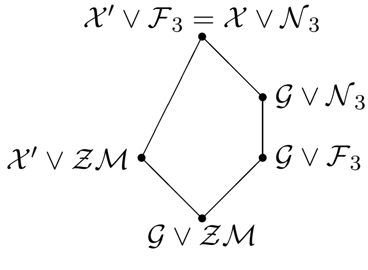

Рис. 4. Интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$.

Лемма 7. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, а $\mathcal{X}$ — подмногообразие ступени ≤ 2 многообразия $\mathcal{V}$, то многообразие $\mathcal{X}$ коммутативно.*

Доказательство. Согласно лемме 6 многообразие $\mathcal{X}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Используя предложение 2, получаем, что $\mathcal{X} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ является многообразием, порожденным эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразием. Поскольку $\mathcal{X}$ — многообразие ступени ≤ 2, многообразие $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{ZM}$. В частности, оно коммутативно. Осталось показать, что многообразие $\mathcal{M}$ также коммутативно. Очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ не является многообразием ступени ≤ 2. Следовательно, оно не может содержаться в многообразии $\mathcal{X}$, а значит и в $\mathcal{M}$. В силу следствия 1 многообразие $\mathcal{M}$ порождается вполне регулярной эпигруппой. Известно, что любая вполне регулярная полугруппа является полурешеткой прямоугольных связок групп. Поскольку многообразие $\mathcal{X}$, а значит и $\mathcal{M}$, не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$, многообразие $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток групп. Из леммы 6 следует, что $\mathcal{M}$ не содержит неабелевых многообразий групп. Следовательно, $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток абелевых групп, а значит, оно коммутативно. □

Будем называть слово *полугрупповым*, если оно не содержит операции псевдообращения. Напомним, что полугрупповое слово называется *линейным*, если всякая буква входит в него не более одного раза.

Лемма 8. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, то всякая эпигруппа с единицей из $\mathcal{V}$ коммутативна.*

Доказательство. Обозначим через S произвольную эпигруппу с единицей, принадлежащую $\mathcal{V}$. Положим $\mathcal{R} = \mathrm{var}\{x^2 = xyx = 0\}$. Из леммы 4 легко вытекает, что решетка $L(\mathcal{R})$ не является слабо полумодулярной ни вверх, ни вниз, а значит, $\mathcal{R} \nsubseteq \mathcal{V}$. Следовательно, существует тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{V}$, но не выполненное в $\mathcal{R}$. Отметим, что тождество $u = v$ выполнено в эпигруппе S. Если каждое из эпигрупповых слов u и v содержит операцию псевдообращения, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$ в силу леммы 1(ii). Поэтому без ограничения общности можно считать, что слово u является полугрупповым.

Предположим сначала, что слово v также является полугрупповым. Если существует буква x, входящая в запись одного из слов u и v, но не входящая в запись другого, то, подставив в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что S удовлетворяет тождеству $x^n = 1$ для некоторого натурального n. Но тогда в $\mathrm{var}\, S$ выполнено тождество $x = x^{n+1}$, а значит, многообразие $\mathrm{var}\, S$ является многообразием ступени 1. Согласно лемме 7 оно коммутативно. Следовательно, эпигруппа S будет коммутативной.

Далее будем считать, что слова u и v зависят от одних и тех же букв. Если ни одно из этих слов не является линейным, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$. Без ограничения общности будем считать, что слово u линейно. Если слово v также линейно, то $u = v$ — перестановочное тождество. Всякая эпигруппа с единицей, удовлетворяющая перестановочному тождеству, коммутативна. Пусть, наконец, слово v не линейно, т. е. существует буква x, входящая в запись v более одного раза. Подставляя в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что $\mathrm{var}\, S$ удовлетворяет тождеству $x^m = x$ для некоторого $m > 1$. Как и выше, из леммы 7 вытекает, что эпигруппа S коммутативна.

Осталось рассмотреть случай, когда слово v содержит операцию псевдообращения. В силу леммы 1(ii) в этом случае $v = 0$ в любом нильмногообразии. Если слово u не линейно, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$. Поэтому далее можно считать, что u линейно, т. е. совпадает со словом $x_1x_2 \cdots x_n$ для некоторого n. В любой нильполугруппе из $\mathcal{V}$ выполнены тождества $x_1x_2 \cdots x_n = v = 0$. Следовательно, $\mathcal{V}$ не содержит многообразия $\mathcal{C}_2$. Поскольку решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ слабо полумодулярна вверх или вниз, из леммы 6 вытекает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Пользуясь следствием 1, получаем, что эпигруппа S вполне регулярна. Вновь из леммы 7 вытекает, что эта эпигруппа коммутативна. $\square$

Положим $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\,\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$.

Лемма 9. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, и $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, то либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{N} \nsubseteq \mathcal{Z}$. В силу леммы 8 многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Из леммы 2 вытекает, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из теорем 1 и 2 работы [1] вытекает, что при $m > 1$ решетка $L(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $m \leq 1$. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{G}$ нетривиально. Тогда $\mathcal{G}$ содержит нетривиальное многообразие периодических групп $\mathcal{H}$. Многообразие $\mathcal{H} \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из результатов работ [1;3;8] вытекает, что решетка $L(\mathcal{H} \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $\mathcal{G} = \mathcal{T}$, и потому $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. $\square$

Приступим к непосредственной проверке импликаций а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликации а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2. Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз. В силу леммы 7 всякое содержащееся в $\mathcal{V}$ многообразие ступени ≤ 2 коммутативно. В частности, это означает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. В силу предложения 2 $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В силу леммы 8 многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Применяя лемму 2, мы получаем, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. При этом $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$, так как в противном случае многообразие $\mathcal{M}$, а значит и многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, периодично. Как хорошо известно, всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее нильподмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Nil}\,(\mathcal{X})$. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично. Положим $\mathcal{N}' = \mathrm{Nil}\,(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$. Ясно, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$. В силу леммы 9 либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$. Но первый случай невозможен, так как в этом случае многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$ было бы периодическим. Следовательно, $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$, и потому $\mathrm{Nil}\,(\mathcal{C}_m) = \mathrm{var}\,\{x^m = 0,\ xy = yx\} \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$. Поскольку, очевидно, $\mathrm{var}\,\{x^m = 0,\ xy = yx\} \nsubseteq \mathcal{Z}$ при $m > 2$, мы получаем, что $m \leq 2$. Кроме того, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$, т. е. $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1), а из леммы 4 вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 доказаны.

Предположим теперь, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. В силу сказанного выше $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1). Очевидно, что решетка $L(\mathcal{N})$ дистрибутивна. Поэтому из леммы 5 вытекает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $p_3[\pi]$, где π — одна из перестановок (4). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию б) теоремы 2. Тем самым мы доказали импликацию а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2.

3.2. Импликации з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2

В силу [16, предложение 2.9] решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфна прямому произведению решеток $L(\mathcal{AG})$ и $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$. Обозначим через C_3 3-элементную цепь $\mathcal{T} \subset \mathcal{SL} \subset \mathcal{C}_2$. Поскольку многообразие $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z}$ периодично, оно может рассматриваться как многообразие полугрупп. Как показано в [5, лемма 3] (а также в [19, лемма 7]), решетка $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфна подпрямому произведению решеток C_3 и $L(\mathcal{Z})$. Из сказанного вытекает, что решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфно вкладывается в прямое произведение решетки $L(\mathcal{AG})$, 3-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{Z})$. Общеизвестно, что решетка $L(\mathcal{AG})$ дистрибутивна. Из леммы 4 теперь вытекает, что если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, удовлетворяющее условию ж) теоремы 1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Мы доказали импликацию з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1. Аналогично ссылка на лемму 5 завершает доказательство импликации б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2.

3.3. Импликации з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2

Предположим, что $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \le m \le 2$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1) и $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). В силу леммы 1 многообразие $\mathcal{AG}$ удовлетворяет тождеству (5), многообразие $\mathcal{C}_2$ — тождеству $\overline{\overline{x}} = x^2$, а многообразие $\mathcal{N}$ — тождеству (6). Учитывая еще, что многообразия $\mathcal{AG}$ и $\mathcal{C}_2$ коммутативны, а $\mathcal{C}_2$, кроме того, удовлетворяет тождеству $x^2 = x^3$, легко убедиться в том, что в каждом из многообразий $\mathcal{AG}$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{N}$, а значит и в $\mathcal{V}$, выполнены тождества

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y, \quad xyx = xy\overline{\overline{x}}\,.$$

Кроме того, ясно, что всякое перестановочное тождество, выполненное в $\mathcal{N}$, выполнено и в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (3), где π — одна из перестановок (2). Это доказывает импликацию з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1. Импликация б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2 проверяется вполне аналогично.

3.4. Импликации и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (3), где π — одна из перестановок (2). Очевидно, что эта система тождеств не выполнена в многообразиях $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. А из [9, лемма 7] и двойственного утверждения вытекает, что она не выполнена и в многообразиях $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, ни одно из этих четырех многообразий не содержится в $\mathcal{V}$. Кроме того, все эпигруппы с единицей в $\mathcal{V}$ коммутативны, поскольку в систему тождеств (3) входит перестановочное тождество. Из предложения 2 и леммы 2 вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \ge 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ непериодично, $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$. Далее, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = \overline{\overline{x}}^{\,2}y$. В силу леммы 1(iii) в многообразии $\mathcal{C}_m$ правая часть этого тождества равна $x^{2m}y$. Ясно, что при $m > 2$ тождество $x^2y = x^{2m}y$ в $\mathcal{C}_m$ не выполнено. Следовательно, $0 \le m \le 2$. Наконец, из выполнимости в $\mathcal{V}$ системы тождеств (3) и леммы 1(ii) вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1), а выполнимость в нем тождества вида $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2), вытекает из выполнимости тождества такого вида в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Мы доказали импликацию и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1. Импликация в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2 проверяется вполне аналогично. Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны. □

4. Следствия

Теоремы 1 и 2 относятся к непериодическим многообразиям эпигрупп. В этом разделе указываются некоторые следствия из этих теорем и результатов работ [1; 3; 8], относящихся к произвольным эпигрупповым многообразиям.

Следствие 3. *Для произвольного многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 условия* а), в), д), е) *и* ж) *теоремы* 1 *эквивалентны.*

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из [1, теорема 2; 3, следствие 6.2] вытекает, что если многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Если же $\mathcal{V}$ не комбинаторно, то, с учетом того что $\mathcal{V}$ — многообразие ступени > 2, из [1, теорема 2]

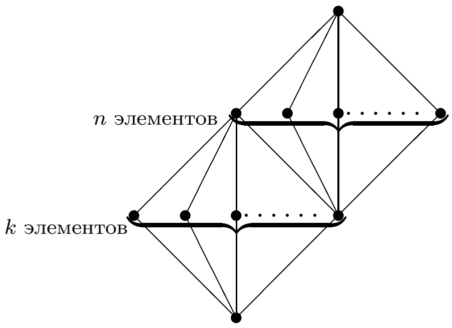

Рис. 5. Решетка $M_{k,n}$.

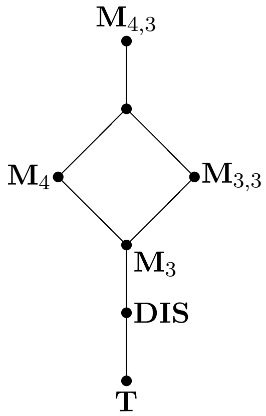

Рис. 6. Решетка $L(\mathbf{M}_{4,3})$.

вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующему "периодическому аналогу" условия з) теоремы 1: $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, $0 \le m \le 2$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1) и $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). Положим $\mathcal{W} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$. В силу теоремы 1 $L(\mathcal{W}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Поскольку $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. $\square$

Мы показали, в частности, что в решетках многообразий эпигрупп ступени > 2 дезарговость эквивалентна принадлежности многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$. Отметим, что в абстрактных решетках второе из этих условий является намного более сильным ограничением, чем первое. Чтобы придать этому высказыванию более строгий смысл, сравним число подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ и многообразия всех дезарговых решеток. Последнее многообразие имеет континуум подмногообразий (это легко вытекает из доказательства основного результата работы [12]; см. также [14, теорема 3.12]). В то же время многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет всего семь подмногообразий. Чтобы перечислить эти подмногообразия, введем некоторые новые обозначения. Для произвольных натуральных чисел k и n мы обозначим через M_k решетку, состоящую из наименьшего и наибольшего элементов и k атомов, а через $M_{k,n}$ — решетку, изображенную на рис. 5. Как и в случае эпигрупп, будем обозначать через $\mathrm{var}\, L$ многообразие решеток, порожденное решеткой L. Положим $\mathbf{M}_k = \mathrm{var}\, M_k$ и $\mathbf{M}_{k,n} = \mathrm{var}\, M_{k,n}$. Легко проверяется, что список неодноэлементных подпрямо неразложимых подрешеток решетки $M_{4,3}$ исчерпывается 2-элементной цепью и решетками M_3, M_4, $M_{3,3}$ и $M_{4,3}$. Отсюда вытекает, что решетка подмногообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет вид, изображенный на рис. 6, где через **T** и **DIS** обозначены тривиальное многообразие решеток и многообразие всех дистрибутивных решеток соответственно.

Отметим, что следствие 3 нельзя усилить, заменив в его формулировке многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ каким-либо его собственным подмногообразием: используя теорему 1 и результаты работы [2], легко привести примеры многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, но не принадлежит никакому собственному подмногообразию многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она принадлежит многообразию, порожденному некоторой конечной решеткой.*

Доказательство. Если многообразие $\mathcal{V}$ не периодично, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$ в силу теоремы 1, а если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх, то тот же вывод вытекает из следствия 3. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично и решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз, но не слабо полумодулярна вверх. Из теорем 2 и 3 работы [1] вытекает, что в этом случае многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно. Требуемое заключение непосредственно вытекает теперь из [3, следствие 6.3]. $\square$

Хорошо известно, что всякая конечная решетка порождает наследственно конечно базируемое многообразие решеток [15]. Поэтому из следствия 4 непосредственно вытекает

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она имеет конечный базис тождеств.* □

Следующее утверждение для периодических многообразий эпигрупп вытекает из доказательств [4, теорема 1; 5, теорема 2], а для непериодических — из доказательства теоремы 1.

Следствие 6. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, а $\mathbf{L}$ — нетривиальное квазимногоообразие модулярных решеток, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \leq m \leq 2$, многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (1) *и $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.* □

Нильмногообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному, наперед заданному, квазимногообразию модулярных решеток $\mathbf{L}$, полностью описаны в работе [2]. Таким образом, следствие 6 фактически дает описание многообразий эпигрупп ступени > 2 с тем же свойством. Обозначим через C_2 2-элементную цепь. Будем говорить, что две решетки [*квази*]*эквационально эквивалентны*, если они порождают одно и то же [квази]многообразие решеток. Из следствия 6 и теорем 1–4 работы [2] вытекает

Следствие 7. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2 с модулярной решеткой подмногообразий, то решетка $L(\mathcal{V})$ [квази]эквационально эквивалентна одной из решеток $C_2, M_3, M_4, M_{3,3}, M_4 \times M_{3,3}$ и $M_{4,3}$.* □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верников Б. М.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2002. № 22 (4). С. 16–42.
2. **Верников Б. М.** Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2005. № 38 (8). С. 5–35.
3. **Верников Б. М., Волков М. В.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2004. № 30 (6). С. 5–36.
4. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 51–60.
5. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 3–8.
6. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Изв. вузов. Математика. 1992. № 8. С. 21–29.
7. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. Акад. наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.
8. **Волков М. В.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2002. № 22 (4). С. 43–61.
9. **Голубов Э. А., Сапир М. В.** Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 21–29.
10. **Шеврин Л. Н.** К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.
11. **Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В.** Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2009. № 3. С. 3–36.
12. **Baker K. A.** Equational classes of modular lattices // Pacific J. Math. 1969. Vol. 28, no. 1. P. 9–15.
13. **Gusev S.V., Vernikov B.M.** Endomorphisms of the lattice of epigroup varieties [Электрон. ресурс]. P. 22. URL: http://arxiv.org/pdf/1404.0478v4.
14. **Jipsen P., Rose H.** Varieties of lattices. Berlin: Springer Verlag, 1992. 162 p. (Lect. Notes Math.; vol. 1533.)
15. **McKenzie R.N.** Equational bases for lattice theories // Math. Scand. 1970. Vol. 27, no. 1. P. 24–38.
16. **Shaprynskiĭ V.Yu., Skokov D.V., Vernikov B.M.** Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis. 2016. Vol. 76, iss. 1. P. 1–30.

17. **Shevrin L. N.** Epigroups // Structural theory of automata, semigroups, and universal algebra. Dordrecht: Springer, 2005. P. 331–380.
18. **Vernikov B. M., Volkov M. V.** Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
19. **Volkov M. V.** Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 3. P. 295–316.
20. **Volkov M. V.** "Forbidden divisor" characterizations of epigroups with certain properties of group elements // RIMS Kokyuroku. (Algebraic Systems, Formal Languages and Computations). 2000. Vol. 1166. P. 226–234.
21. **Volkov M. V., Ershova T. A.** The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory. N. Y.: World Sci. Publ., 1991. P. 306–322.

Поступила 02.08.2015

Верников Борис Муневич
профессор
кафедра алгебры и дискретной математики
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: bvernikov@gmail.com

Скоков Дмитрий Вячеславович
ассистент
кафедра алгебры и дискретной математики
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dmitry.skokov@gmail.com