ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ И ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ УНИТАРНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ ТРИ

А. А. Шлепкин

В данной работе установлены структура силовской 2-подгруппы периодической группы и структура периодической части группы Шункова, насыщенных унитарными группами степени три над конечными полями.

Ключевые слова: группа, насыщенная множеством групп, периодическая группа, группа Шункова, унитарная группа.

A. A. Shlepkin. On periodic groups and Shunkov groups saturated with unitary groups of degree 3.

We find the structure of a Sylow 2-subgroup of a periodic group and of the periodic part of a Shunkov group saturated with unitary groups of degree 3 over finite fields.

Keywords: group saturated with a set of groups, periodic group, Shunkov group, unitary group.

MSC: 20E26
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-299-307

1. Введение

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ (см. [10]).

Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$ и K — подгруппа из G. Через $\mathfrak{X}(K)$ обозначим множество всех подгрупп из G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, если 1 — единичная подгруппа G, то $\mathfrak{X}(1)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$.

Группа G называется *группой Шункова* (*сопряженно-бипримитивно конечной группой*), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть G — группа. Через $T(G)$ будем обозначать подгруппу группы G, порожденную всеми элементами конечных порядков, при условии, что эта подгруппа периодическая. Будем называть $T(G)$ *периодической частью* группы G (см. [4, с. 90, 150]).

В [6] доказано, что периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{U_3(2^m) \mid m$ — натуральное нефиксированное число$\}$, изоморфна $U_3(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле четной характеристики. В [8] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{U_3(p^n) \mid p$ — простое нефиксированное число, n — натуральное нефиксированное число$\}$, изоморфна $U_3(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. В данной работе мы отказываемся от ограничения на характеристику поля (см., например, [6]) и от ограничения на периодичность группы Шункова (см., например, [8]). Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(p^n) \mid p$ — простое нефиксированное число, n — натуральное нефиксированное число$\}$. Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы.

В настоящей работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, тогда для силовской 2-подгруппы S группы G выполняется одно из следующих условий*:

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = e,\ a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ *— полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e,\ a^w = b,\ ab = ba\rangle$ *— сплетенная группа.*
3. S *изоморфна силовской* 2*-подгруппе группы* $U_3(2^n)$.
4. S *— бесконечная* 2*-группа периода* 4 *ступени нильпотентности* 2.
5. $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle$, *где* A *— бесконечная локально циклическая* 2*-группа,* $w^2 = e$, *и* $A^w = B$.
6. $S = AD$, *где* D *— конечная подгруппа группы* S, *не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше* 8, A *— бесконечная локально циклическая* 2*-группа.*

Теорема 2. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Приведем необходимые для доказательства сформулированных выше теорем 1, 2 свойства конечных унитарных групп степени три.

Предложение 1. *Пусть* $U = U_3(q)$, *где* $q = p^n$, *и* p *— нечетное простое число. Тогда выполняются следующие свойства*:

1. U *содержит подгруппу* $D = D_1 \times D_2$, *где* $D_1 = \langle d_1\rangle$, $D_2 = \langle d_2\rangle$,

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

β *— элемент порядка* $q+1$ *из* $GF(q^2)$, $|D_1| = q+1$ *и* $|D_2| = \dfrac{q+1}{(3, q+1)}$.

2. U *содержит подгруппу* $V = \langle b,\ w | b^3 = w^2 = e,\ b^w = b^{-1}\rangle$, *где*

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. U *содержит подгруппы* $A = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$ *и* $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle$, *где* w *— инволюция определенная в п.* 2,

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_1\rangle$,

$$j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_2\rangle$. A *— четверная группа,* $N_U(A) = C_U(A) \leftthreetimes V$, *квадраты элементов из* $N_G(A)$, *порядок которых не равен трем, содержатся в* $C_U(A)$ *и* $C_U(A) = D$.

4. $N_U(D) = N_U(A) = D \leftthreetimes V$.
5. *Существует* $v \in U$, *для которого* $j^v = j$, $i^v = w$, *где* i, j, w *определены в пп.* 2, 3.
6. *Если* $q+1$ *не делится на* 4, *то силовская* 2*-подгруппа группы* U *изоморфна полудиэдральной группе* $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, *где* 2^m *делит* $q-1$, 2^{m+1} *не делит* $q-1$.
7. *Если* $q+1$ *делится на* 4, *то силовская* 2*-подгруппа группы* U *изоморфна сплетенной группе* $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, *где* 2^m *делит* $q+1$, 2^{m+1} *не делит* $q+1$.

8. *Все четверные подгруппы из U сопряжены, U содержит элемент порядка 8, и любая 2-подгруппа из U порядка не менее 32 содержит элемент порядка 8.*

9. *Если $q \neq 5$, то $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. Если $q = 5$, то $\langle N_U(A), N_U(B)\rangle \simeq A_7$. Здесь A, B — группы, определенные в п. 3.*

Доказательство. Свойства 1–4 хорошо известны, их доказательство, например, можно найти в [5, предложение 2]. Свойства 6–8 доказаны в [14, с. 2, 3]. Свойство 5 вытекает из свойств 3, 8. Докажем свойство 9. Если $q \neq 5$, то $N_U(A), N_U(B)$ — различные максимальные подгруппы в U (см. [15, с. 379]). Следовательно, $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. Если $q = 5$, то $U \simeq U_3(5)$, и непосредственные вычисления показывают, что $A_7 \simeq \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$ — максимальная подгруппа в U (см. [15, с. 379]).

Предложение доказано.

Предложение 2 [6, предложение 1]. *Пусть $G = U_3(2^n)$ и P — силовская 2-подгруппа группы G . Тогда P — группа периода 4 ступени нильпотентности 2, и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1.

Лемма 1. *Если в G некоторая ее силовская 2-подгруппа S конечна, то S — одна из групп, перечисленных в пп. 1–3 теоремы 1.*

Доказательство. Действительно, это так, ввиду предложений 1 (см. пп. 6, 7), 2 и [6, предложение 8].

Лемма доказана.

В леммах 2–5 будем предполагать, что S — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 2. *Если S не содержит полных подгрупп, то S — группа из п. 4 теоремы 1.*

Доказательство. По [13, теорема 1] S содержит подгруппу $D = \langle h\rangle \times \langle g\rangle \times \langle f\rangle$, где $h^2 = g^2 = f^2 = e$. В силу [6, предложение 4] D вложена в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Выберем I максимальной с указанным свойством. Если I содержит элемент b порядка 8, то $\langle D, b\rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы S_1, где S_1 — группа полудиэдра или сплетенная 2-группа (см. предложение 1). Но в обоих этих случаях S_1 не может содержать подгруппу, изоморфную группе D. Итак, I не содержит элементов порядка 8, следовательно, она — 2-группа периода не более 4, и все инволюции из I лежат в центре I.

Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $S \setminus I \neq \varnothing$ и $x \in S \setminus I$.

Рассмотрим случай $|x| = 2$. Покажем, что x можно выбрать так, что в I найдется инволюция z со свойством $xz = zx$. Группа $\langle x, y\rangle$ конечна для любой инволюции y из I. Зафиксируем некоторую инволюцию $y \in I$. Пусть t — инволюция из центра $\langle x, y\rangle$. Если $t \in I$, то возьмем в качестве z инволюцию t. Тогда $xz = zx$. Если $t \notin I$, то возьмем в качестве x инволюцию t, а в качестве z инволюцию y. Тогда $xz = zx$. Подгруппа $K_1 = \langle z\rangle \times \langle x\rangle$, очевидно, не лежит в I, и $K_1 \cap I = \langle z\rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$\langle z\rangle \times \langle t\rangle \leq \langle z, x, t\rangle \cap I.$$

В силу [6, предложение 4] в $\langle z, x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_S(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$, и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, t, t_1\rangle$, где t_1 — произвольный элемент из $I \setminus (\langle z\rangle \times \langle t\rangle)$, является конечной 2-группой.

По условию насыщенности K_2 содержится в подгруппе R, где $R \in \mathfrak{M}(K_2)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle z\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что $R \simeq U_3(2^n)$ и K_2 — 2-группа периода не более 4. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Следовательно, x перестановочен с любым элементом из I. Таким образом, $I\langle x\rangle$ — локально конечная 2-подгруппа в S периода не более 4, что противоречит максимальности I как локально конечной подгруппы в группе S.

Рассмотрим случай $|x| = 4$. Положим $x_1 = x^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. Возьмем в I инволюцию $t \neq x_1$. Ясно, что $tx_1 = x_1 t$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle \leq \langle x, t\rangle \cap I.$$

В силу [6, предложение 4] в $\langle x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_S(\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle)\setminus I$, и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, x_1, t, t_1\rangle$, где t_1 — произвольная инволюция из $I \setminus (\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle)$, является конечной 2-группой. По условию насыщенности $K_2 \leq R \in \mathfrak{M}(K_2)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle \times \langle t_1\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что $R \simeq U_3(2^n)$, и K_2 — 2-группа периода не более 4. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Следовательно, x перестановочен с любым элементом из I. Таким образом, $I\langle x\rangle$ — локально конечная 2-подгруппа в S периода не более 4, что противоречит максимальности I как локально конечной подгруппы в группе S.

Рассмотрим случай $|x| > 4$. По доказаному выше все элементы из S, имеющие порядок 2 или порядок 4, лежат в I. Следовательно, I — характеристическая подгруппа в S, фактор-группа S/I имеет период 2 и S — локально конечная группа. Противоречие с выбором I.

Лемма доказана.

В леммах 3–5 будем предполагать, что S содержит полные подгруппы, и пусть $\tilde{S}$ — максимальная полная абелева подгруппа из S.

Лемма 3. *Если ранг $\tilde{S}$ не меньше 2, то S — группа из п. 5 теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно видеть, что в этом случае ранг $\tilde{S}$ равен 2 (см. доказательство леммы 2), $\tilde{S} = A \times B$, где $A,\ B$ — локально циклические группы, и $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S (см. [13, теорема 1]). Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности R содержится в подгруппе K, где $K \in \mathfrak{M}(R)$. Следовательно, $K \simeq U_3(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По п. 6 предложения 1 $S_K = (\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle$ — сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R < \langle c\rangle \times \langle d\rangle$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{S} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\tilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w\rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w\rangle$ содержится в подгруппе K_1; здесь $K_1 \in \mathfrak{M}(1)$ и $K_1 \simeq U_3(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–4) $C_{K_1}(R)$ — абелева группа. Отсюда вытекает, что $\langle R, y^w, y\rangle$ — конечная абелева 2-группа. Пусть y_1 — элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1\rangle \neq \langle y\rangle$. Покажем, что $y_1 y = y y_1$. Действительно, $\langle R, y, y_1\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle R, y_1, y\rangle$ содержится в подгруппе K_2, где $K_2 \in \mathfrak{M}(1), K_2 \simeq U_3(p_2^{n_2})$ и $p_2 \neq 2$. По п. 6 предложения 1 $C_{K_2}(R)$ — абелева группа. Так как $\langle R, y_1, y\rangle \leq C_{K_2}(R)$, то $y_1 y = y y_1$.

Пусть Y — множество элементов из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством, что для любого $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y — конечное множество, $\langle Y, R\rangle$ — конечная абелева 2-группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ — конечная 2-группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ содержится в подгруппе K_3, где $K_3 \in \mathfrak{M}(\langle R, Y, Y^w, w\rangle), K_3 \simeq U_3(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–4, 6) $N_{K_3}(R) = (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle) \leftthreetimes \langle V\rangle, C_{K_3}(R) = \langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$, где V, d_1 и d_2 из предложения 1(см. пп. 1–4). Положим $R_1 = \tilde{S} \cap (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$. По построению $R < R_1 = \langle v_1\rangle \times \langle u_1\rangle < A \times B$, где $v_1^w = u_1$. В силу произвольности выбора R как подгруппы, являющейся прямым произведением двух циклических групп одинакового порядка (большего 2) из $\tilde{S}$, по алгоритму вложения группы R в группу R_1 строим в $\tilde{S}$ цепочку подгрупп

$$R < R_1 < R_2 < \ldots < R_i < \ldots$$

со следующими свойствами: $R_i = \langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle$ и $v_i^w = u_.$ Очевидно, $\cup R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $\overline{N} = N_G(S)/\tilde{S}$. Очевидно, в $\overline{N}$ силовская 2-подгруппа конечна, значит, все силовские 2-подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (см. [6, предложение 8]), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle \leq S$. Докажем обратное включение. Из [4, теорема 9.1.4.] и того факта, что S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, вытекает, что $C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. По условию насыщенности и предложению 1 (см. пп.1–4, 6) получаем, что для любого $y \in S$ $y^2 \in C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. Тогда фактор-группа $S/\tilde{S}$ — элементарная абелева подгруппа ранга 1, поскольку в противном случае S содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, что невозможно. Поскольку $w \notin \tilde{S}$, имеем $S/\tilde{S} = \langle w\tilde{S} \rangle$ и $S \leq \tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $D_n < S$, где $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$, $|a_n| = |b_n| > 2$, $a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = e$, то S — группа из п.* 5 *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots,$$

то группа $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ насыщена конечными сплетенными 2-группами. По [9, теорема 3] $\tilde{S}$ — ранга 2, и по лемме 3 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек указанного вида в S нет. Тогда $\tilde{S}$ — квазициклическая группа и, очевидно, $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S. Пусть D_n — максимальная сплетенная 2-группа из S. Тогда $S = \tilde{S}D_n$. Положим $\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle = R_n$. Пусть s — произвольный элемент из $\tilde{S} \setminus R_n$. Тогда $\langle R_n, s \rangle$ — конечная группа и по условию насыщенности $\langle R_n, s \rangle < K \in \mathfrak{M}(\langle R_n, s \rangle)$, $K \simeq U_3(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–5, 8) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $s \in C_G(R_n)$, $\tilde{S} \leq C_G(R_n)$ и $\tilde{S}R_n$ — абелева группа. Зафиксируем $s_1 \in \tilde{S} \setminus R_n$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_1, R_n \rangle$ содержится в подгруппе K_1, где $K_1 \simeq U_3(p_1^n)$ для некоторого нечетного простого p_1. Тогда $\langle s_1, R_n \rangle \leq C_{K_1}(R_n)$. По п. 7 предложения 1 найдется $x \in C_{K_1}(\langle s_1, R_n \rangle) \setminus \langle s_1, R_n \rangle$ такой, что $x^2 \in R_n$, $s_1 x = x s_1$, и $\langle s_1, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Пусть для $i \geqslant 1$ доказано, что $\langle s_i, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Возьмем $s_{i+1} \in \tilde{S}$, и $s_{i+1}^2 = s_i$. Тогда $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle \leq C_G(\langle s_i, R_n \rangle)$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle$ содержится в подгруппе K_2, где $K_2 \simeq U_3(p_2^n)$ для некоторого нечетного простого p_2. Так как $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle \leq C_{K_2}(\langle s_i, R_n \rangle)$, то по предложению 1 (см. пп. 1–5, 7) $s_{i+1} x = x s_{i+1}$, и $\langle s_{i+1}, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\tilde{S}R_n\langle x \rangle$ — абелева 2- подгруппа. Так как $x^2 \in \tilde{S}R_n$ и $w_n \in N_G(\tilde{S}R_n)$, то фактор-группа $\langle x, w_n, \tilde{S}R_n \rangle / \langle \tilde{S}R_n \rangle$ порождается двумя инволюциями, конечна, а ее силовская 2-подгруппа $\overline{S_1}$ имеет порядок больше 2. Из последнего вытекает, что S — собственная подгруппа в S_1, где S_1 — полный прообраз $\overline{S_1}$ в $\langle x, w_n, \tilde{S}R_n \rangle$. Противоречие с тем, что S — силовская 2-подгруппа в G. Таким образом, D_n не может быть максимальной сплетенной 2-группой, цепочка

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots$$

бесконечна и утверждение леммы имеет место.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$. Тогда S — группа из п.* 6 *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 полная часть $\tilde{S}$ группы S — квазициклическая 2-группа. Положим $\tilde{S} = A$. Тогда S/A — конечная 2-группа, и пусть K — ее минимальный по порядку образ в S. Тогда $S = AK$, и K — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если S — конечная группа, то теорема доказана по лемме 1. Если S — бесконечная группа и содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то теорема доказана по лемме 2. Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то по [13, теорема 1] обладает нетривиальной полной частью $\tilde{S}$, и теорема 1 доказана ввиду лемм 3–5.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполняются условия теоремы 2. Предположим противное, в дальнейшем, за исключением леммы 8, G — контрпример к утверждению теоремы 2.

Лемма 6. *G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то по лемме Дицмана (см. [3]) $T(G)$ существует и является конечной группой. По условию насыщенности $T(G) \simeq U(q)$. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Тогда по [12, лемма 1] G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, тогда выполняется одно из следующих утверждений.*

1. *$S = \langle a^{2^n} = v^2 = e,\ a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — полудиэдральная группа.*
2. *$S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e,\ a^w = b, ab = ba\rangle$ — сплетенная 2-группа.*
3. *S изоморфна силовской 2-подгруппе группы $U_3(2^n)$.*
4. *S — бесконечная 2-группа периода 4 ступени нильпотентности 2.*
5. *$S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle$, где A — бесконечная локально циклическая 2-группа, $w^2 = e$, и $A^w = B$.*
6. *$S = AD$, где D — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8, A — бесконечная локально циклическая 2-группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Используем схему доказательства теоремы 1. Лемма 1 имеет место в силу того факта, что в группе Шункова с конечной силовской 2-подгруппой все силовские 2-подгруппы сопряжены (см. [2, предложение 19]). Лемма 2 переносится дословно на наш случай. В лемме 3 приходиться учитывать тот факт, что при переходе к фактор-группам могут возникать элементы бесконечного порядка (группа Шункова !). Леммы 4, 5 переносятся на наш случай дословно.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G)$ — абелева группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Действительно, пусть a — произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$ — простое число. Тогда $\langle a, a^g\rangle$ — конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a как элемента простого порядка получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G и, более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$, имеющим конечный порядок. Пусть $R(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми элементами конечных порядков группы G. Очевидно, $N_2 \leq Z(R(G))$, значит, группа $\overline{R} = R(G)/N_2$ — группа Шункова. Ясно, что для $\overline{R}$ условие леммы выполняется, и поэтому можно считать, что для $\overline{R}$ лемма верна (индуция по порядку a). Отсюда получаем, что $R(G) = T(G)$ — периодическая часть группы G, и $T(G)$ — абелева группа (см. [4, теорема 23.1.1]).

Лемма доказана.

Лемма 9. *Для $\mathfrak{M}(1)$ возможны только следующие взаимоисключающие ситуации:*
1. $\mathfrak{M}(1) \subseteq \{U_3(q) \mid q$ *— четное*$\}$.
2. $\mathfrak{M}(1) \subseteq \{U_3(q) \mid q$ *— нечетное*$\}$.

Доказательство. Пусть подгруппы S и T из G выбраны так, что S — силовская 2-подгруппа в $U < G$, где $U \simeq U_3(2^n)$, а T — силовская 2-подгруппа в $V < G$, $V \simeq U_3(q)$ и q нечетно. Ясно, что U и V — элементы множества $\mathfrak{M}(1)$. Если любая силовская 2-подгруппа из G конечна, то по [2, предложение 19] можно считать, что S и T лежат в некоторой силовской 2-подгруппе W группы G, и W — одного из видов, перечисленных в пп. 1–3 леммы 7. Из пп. 5,6 предложения 1 и предложения 2 следует, что это невозможно. Потому G имеет бесконечную силовскую 2-подгруппу. Возьмем в G силовскую 2-подгруппу S_1, содержащую S. Тогда S_1 — вида 4 из леммы 7. Возьмем в G силовскую 2-подгруппу T_1, содержащую T. Поскольку T_1 содержит элемент порядка 8, то T_1 — вида 5 из леммы 7. По [7, лемма 6] можно считать, что $|S_1 \cap T_1| > m$, где m — произвольное наперед заданное натуральное число. Получаем противоречие с п. 7 предложения 1.

Лемма доказана.

Отметим, что если для $\mathfrak{M}(1)$ выполнена ситуация 1 из леммы 9, то теорема 2 следует из [11, теорема 1.5]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что для $\mathfrak{M}(1)$ имеет место только ситуация 2 из леммы 9.

Лемма 10. *Пусть F — подгруппа G такая, что $F = \langle s_1 \rangle \times \langle s_2 \rangle$, и $|s_1| = |s_2| = 2$. Тогда $T(N_G(\langle F \rangle)) = T(C_G(F)) \leftthreetimes V^{(0)}$; здесь $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, C_1, C_2 — бесконечные локально циклические группы и $V^{(0)}$ изоморфна группе V из п. 2 предложения* 1.

Доказательство. Пусть R — произвольная конечная подгруппа из $C_G(F)$. По условию теоремы 2 имеем $\langle F, R \rangle < W \in \mathfrak{M}(\langle F, R \rangle)$. Значит, $R \in C_W(F)$, и R — абелева группа (предложение 1, пп. 1–4, 8). По леммам 6, 8 периодическая часть $T(C_G(F))$ существует и является бесконечной абелевой группой. Пусть теперь $F < U^{(1)} \in \mathfrak{M}(1)$. По предложению 1 (см. пп. 1–4, 8) $C_{U^{(1)}}(F) = D_1^{(1)} \times D_2^{(1)}$, $N_{U^{(1)}}(F) = C_{U^{(1)}}(F) \leftthreetimes V^{(1)}$, где $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, V^{(1)}$ изоморфны D_1, D_2, V из данного предложения. Поскольку порядок любой конечной подгруппы из $N_G(F)/T(C_G(F))$ не превосходит 6 (см. пп. 1–4, 8 предложения 1), то по лемме Дицмана [3] и [4, теорема 23.1.1] имеем $T(N_G(F)) = T(C_G(F)) \leftthreetimes V^{(1)}$. По [9, теорема 2] периодическая часть $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 — бесконечные локально циклические группы. Возьмем в качестве $V^{(0)}$ группу $V^{(1)}$.

Лемма доказана.

До конца доказательства теоремы 2 сохраним обозначения из леммы 10.

Лемма 11. *В G существует подгруппа $U \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*

Доказательство Из условия насыщенности и леммы 10 вытекает существование в G последовательности групп

$$U^{(1)}, U^{(2)}, \dots U^{(n)}, \dots$$

со следующими свойствами:

1. $U^{(n)} \in \mathfrak{M}(1)$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{U^{(1)}}(F) < N_{U^{(2)}}(F) < \ldots < N_{U^{(n)}}(F) < \ldots$.
3. $T(N_G(F)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{U^{(n)}}(F)$.

Пусть w — инволюция из $V^{(0)}$, $F_1 = \langle w\rangle \times \langle z\rangle$, где z — инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $T(N_G(F))$. По лемме 10 и по п. 8 предложения 1 $N_{U^{(n)}}(F_1) \subset T(N_G(F_1))$ для любого n. Более того, $N_{U^{(1)}}(F_1) < N_{U^{(2)}}(F_1) < \ldots < N_{U^{(n)}}(F_1) < \ldots$. Так как приведенная выше цепочка бесконечна, то в качестве $U^{(1)}$ можно взять группу со свойством $|U^{(1)}| > |U_3(5)|$. По п. 9 предложения 1 имеем $U^{(n)} = \langle N_{U^{(n)}}(F), N_{U^{(n)}}(F_1)\rangle$. Следовательно,

$$U^{(1)} < U^{(2)} < \ldots < U^{(n)} < \ldots .$$

Тогда $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^{(n)}$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, и по [1, теорема 1.5] $U \simeq U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Покажем, что $T(G) = U$, где U — из леммы 11. Предположим противное, пусть $x \in G \setminus U$ и $x^2 = e$. Возьмем инволюцию $y \in U$. По условию насыщенности конечная группа $\langle x, y\rangle$ содержится в подгруппе U_1, где $U_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_1 \not< U$, поскольку U_1 содержит x. Возьмем инволюцию $y_1 \in U_1 \cap U$ такую, что $\langle y_1\rangle \times \langle y\rangle = F_2$. По лемме 10 и п. 8 предложения 1 имеем $N_{U_1}(F_2) < N_U(F_2)$ и $N_{U_1}(F_2) = (D_1^{(2)} \times D_2^{(2)}) \leftthreetimes V^{(2)}$, где $D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, V^{(2)}$ изоморфны группам D_1, D_2, V из предложения 1.

Пусть $w^{(2)}$ — инволюция из $V^{(2)}$, а $z^{(1)}$ — инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $N_{U_1}(F_2)$. Положим $F_3 = \langle w^{(2)}\rangle \times \langle z^{(1)}\rangle$. По лемме 10 и п. 8 предложения 1 $N_{U_1}(F_3) < N_U(F_3)$ и $N_{U_1}(F_3) = (D_1^{(3)} \times D_2^{(3)}) \leftthreetimes V^{(3)}$, где $D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, V^{(3)}$ изоморфны группам D_1, D_2, V из предложения 1. По п. 9 предложения 1 и лемме 10 имеем $U_1 \simeq U_3(5)$ и

$$U_1 \cap U = \langle N_{U_1}(F_2), N_{U_1}(F_3)\rangle \simeq A_7$$

— максимальная подгруппа в U_1. Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа из $U_1 \cap U$, содержащая F_2, F_3. Поскольку T является группой порядка 8, а силовская 2 — подгруппа из U_1 является группой порядка 16, то возьмем $x \in N_P(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$.

Поскольку силовская 2-подгруппа из U имеет порядок больше 8, то возьмем $h \in N_U(T) \setminus T$ со свойством $h^2 \in T$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, h, T\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, h, T\rangle < R \in \mathfrak{M}(\langle x, h, T\rangle)$. Поскольку $x \in R$, но $x \notin U$, то R не лежит в U. Если R не изоморфна $U_3(5)$, то $R = \langle N_R(F_2), N_R(F_3)\rangle < U$, что невозможно. Следовательно, $R \simeq U_3(5)$, $S_1 = \langle N_R(F_2), N_R(F_3)\rangle < U$, и $S_1 \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R. Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из S_1 имеет порядок 8, следовательно, $y \notin S_1$, но $T\langle h\rangle < U \cap R$ и $R = \langle h, S_1\rangle < U$, что невозможно.

Если такого y_1 в $U_1 \cap U$ не найдется, то возьмем инволюции z_1 и z_2 такие, что $z_1 \in (U_1 \setminus U) \cap C_U(y)$, а $z_2 \in (U \setminus U_1) \cap C_U(y)$. По условию насыщенности конечная группа $\langle y, z_1, z_2\rangle < U_2 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_2 \not< U$, поскольку U содержит z_1. Если теперь для U_2 повторить приведенные выше рассуждения для U_1, то мы снова придем к противоречию.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп: сб. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 39–50.
2. Группы с условием насыщенности / А.А. Кузнецов, Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватулина, К.А. Филиппов / Краснояр. гос. аграр. ун-т. Красноярск, 2010. 254 с.
3. **Дицман А.П.** О центре p-групп // Тр. семинара по теории групп: сб. тр. М.:, 1938. С. 30–34.
4. **Каргаполов П.Л., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

5. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 394–399.
6. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** Периодические группы, насыщенные $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 2008. № 47. С. 288–306.
7. **Лыткина Д.В.** Периодические группы, насыщенные прямыми проиведениями конечных простых групп II // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52., № 5. С. 1096–1112.
8. **Филиппов К.А.** О периодических группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени 3 // Вестн. СибГАУ. 2012. № 1. С. 67–72. (Математика, механика, информатика).
9. **Шлепкин А.А.** Периодические группы , насыщенные сплетенными группами // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. № 10. С. 56–64.
10. **Шлепкин А.К.** Сопряженно-бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск: 1993. С. 363.
11. **Шлепкин А.К.** О периодической части некоторых групп Шункова //Алгебра и логика. 1999. № 38. С. 96–125.
12. **Шлепкин А.К.** О сопряженно-бипримитивно конечных группах //Алгебра и логика. 1983. № 22. С. 226–231.
13. **Шунков В.П.** Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. № 4. С. 484–496. С. 37–57.
14. **Alperin J.L.** Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. AMS. 1970. Vol. 151. P. 1–261.
15. **Bray J.N., Holt D.F.,Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 440 p.

Шлепкин Алексей Анатольевич
Поступила 20.04.2015
канд. физ.-мат. наук
старший преподаватель
Институт космических и информационных технологий СФУ
e-mail: shlyopkin@gmail.com