ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.17

О ЛОКАЛЬНОМ СТРОЕНИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ МЭТОНА[1]

Л. Ю. Циовкина

В настоящей работе исследуется строение локальных подграфов в дистанционно регулярных графах Мэтона четной степени. Описаны некоторые бесконечные серии локально Δ-графов данного семейства, где Δ — сильно регулярный граф, являющийся объединением аффинно полярных графов типа “$-$”, псевдогеометрический граф для $pG_l(s,l)$ или граф ранга 3, реализумый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера. Показана характеризуемость некоторых графов Мэтона своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Ключевые слова: реберно симметричный граф, дистанционно регулярный граф, антиподальное накрытие, граф Мэтона, (локально) сильно регулярный граф, автоморфизм.

L. Yu. Tsiovkina. On the local structure of distance-regular Mathon graphs.

We study the structure of local subgraphs of distance-regular Mathon graphs of even valency. We describe some infinite series of locally Δ-graphs of this family, where Δ is a strongly regular graph that is the union of affine polar graphs of type “$-$,” a pseudogeometric graph for $pG_l(s,l)$, or a graph of rank 3 realizable by means of the van Lint–Schrijver scheme. We show that some Mathon graphs are characterizable by their intersection arrays in the class of vertex transitive graphs.

Keywords: arc-transitive graph, distance-regular graph, antipodal cover, Mathon graph, (locally) strongly regular graph, automorphism.

MSC: 05E18, 05E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-293-298

1. Введение

В связи с изучением дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением, не превосходящим 3, возникла задача описания локального строения графов из класса реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных накрытий полных графов с $a_1 = c_2$. Описание и конструкции таких накрытий были получены в [1;10]. В [3] приведены примеры локально сильно регулярных графов степени, не большей 1000, из указанного класса накрытий и показано, что такие графы изоморфны некоторым графам Мэтона. В настоящей работе мы найдем несколько бесконечных серий локально Δ-графов из семейства графов Мэтона четной степени (в том числе, содержащих ряд вышеупомянутых примеров), где Δ — сильно регулярный граф, являющийся объединением графов, изоморфных графу $\mathrm{VO}^-(4,2^{t/2})$, псевдогеометрический граф для сети $pG_t(s,t)$ или граф ранга 3, реализумый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера. Кроме того, мы установим характеризуемость некоторых графов Мэтона в классе вершинно-транзитивных графов.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $q = 2^{2t} > 2$ *и* $r > 1$ *делит* $q-1$. *Пусть* $\mathrm{M}(q,r)$ *— граф Мэтона с массивом пересечений* $\{q,(r-1)(q-1)/r,1;1,(q-1)/r,q\}$ *и* Δ *— локальный подграф графа* $\mathrm{M}(q,r)$. *Тогда* Δ *— реберно симметричный граф и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* r *делит* 2^t+1, *то либо*

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

(i) $r = 2^t + 1$ *и* Δ *— объединение* 2^t *изолированных* 2^t*-клик, либо*

(ii) $r < 2^t + 1$ *и* Δ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(2^{2t}, (2^t+1)(2^t-1)/r, ((2^t+1)/r-1)((2^t+1)/r-2)+2^t-2, (2^t+1)/r((2^t+1)/r-1))$.

(2) *Если* t *четно и* r *делит* $2^{t/2}+1$, *то либо*

(i) $r = 2^{t/2}+1$ *и* Δ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1))$, *изоморфный аффинно полярному графу* $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$, *либо*

(ii) $r < 2^{t/2}+1$ *и* Δ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1))-2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1)))$, *являющийся объединением* $z = (2^{t/2}+1)/r$ *графов, изоморфных аффинно полярному графу* $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$.

(3) *Если* r *— простой делитель числа* $q-1$, 2 *— это примитивный элемент по модулю* r *и* $(r-1)$ *делит* $2t$, *то* Δ *— сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами* $(2^{2t}, (2^{2t}-1)/r, (2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2, (2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2)$, *где* $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, *реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера.*

2. Терминология и вспомогательные результаты

Всюду в данной работе, если не оговорено иное, под термином «граф» мы будем понимать неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим *i-окрестность вершины* a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. *Локальным подграфом* графа Γ будем называть граф $\Gamma_1(x)$ для некоторой вершины x графа Γ. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Если каждый локальный подграф графа Γ принадлежит $\mathcal{F}$, то говорят, что Γ является *локально* $\mathcal{F}$ графом. В частности, если для некоторого графа Δ каждый граф из $\mathcal{F}$ изоморфен Δ, то Γ называется *локально* Δ*-графом.* Если граф Γ фиксирован, то также будем использовать обозначение $[a] = \Gamma_1(a)$. Через $V(\Gamma)$ мы будем обозначать множество вершин графа Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и для любых двух вершин a и b графа Γ число вершин в $[a] \cap [b]$ равно λ, если вершины a, b смежны, и равно μ, если вершины a и b несмежны.

Если вершины x, y находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(x,y)$ (через $c_i(x,y)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(x)$ $(\Gamma_{i-1}(x))$ с $[y]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(x,y)$ и $c_i = c_i(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$ (полагается, что $b_d = c_0 = 0$).

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар смежных вершин.

Пусть V — это векторное пространство размерности 2 над конечным полем F порядка q с невырожденной симплектической формой f. Пусть K — подгруппа мультипликативной группы F^* поля F индекса $r > 1$, делящего число $(q-1)/(q-1,2)$, и $b \in F^*$. *Графом Мэтона* называется граф, множеством вершин которого являются K-орбиты на множестве векторов пространства V, и две вершины Ku и Kv которого смежны тогда и только тогда, когда $f(u,v) \in bK$. Граф Мэтона является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$, и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора элемента b (см. [4, предложение 12.5.3]). Граф Мэтона для заданных параметров q и r будем обозначать через $\mathrm{M}(q,r)$. Нетрудно понять, что $\mathrm{M}(q,r)$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $L_2(q)$.

Приведем ниже некоторые известные сведения о реберно симметричных графах и свойствах группы $L_2(q)$ четной характеристики, которые далее нам понадобятся для доказательства теоремы.

Предложение 1 (см., например, [5, лемма 2.7]). *Пусть даны неинвариантная подгруппа H группы G и элемент $g \in G - H$. Через $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ обозначим граф (возможно, ориентированный) со множеством вершин $V(\Gamma) = \{Hx \mid x \in G\}$, ребрами которого являются пары (Hx, Hy) такие, что $xy^{-1} \in HgH$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если G действует точно на $V(\Gamma)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то Γ — связный граф, $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и G действует точно и транзитивно и на вершинах, и на дугах графа Γ.*

(2) *Если G действует транзитивно на дугах связного графа X, H — стабилизатор вершины x графа X, $g \in G$ — это некоторый 2-элемент, переставляющий две смежные вершины x и x^g графа X, то $X \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$.*

Предложение 2 (см., например, [9; 6]). *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^e > 2$, S — силовская 2-подгруппа группы G, $M = N_G(S)$ и g — некоторая инволюция из $G - S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *$G = \langle S, g\rangle$ и $M = S : K$, причем $K = M \cap M^g \simeq Z_{q-1}$ и $K\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$.*

(2) *$S \cap M^g = 1$ и $|S| = |Z(S)| = q$.*

(3) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ представим единственным образом в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$.*

(4) *G содержит единственный класс инволюций и $C_G(a) = S$ для любой инволюции $a \in S$.*

(5) *Для всех $t \in \{1, 2, \ldots, e\}$ и для всех делителей m числа $2^{(e,t)} - 1$ группа G содержит подгруппу $E_{2^t} : Z_m$.*

3. Доказательство теоремы

Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^{2t} > 2$, $S \in Syl_2(G)$, $M = N_G(S)$, H – подгруппа из M нечетного индекса $r > 1$ и g — это инволюция из $G - S$. Положим $M \cap M^g = \langle h\rangle$. Тогда $H = S\langle h^r\rangle$. Положим $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$. Ввиду предложений 1 и 2 ясно, что $\Gamma \simeq \mathrm{M}(q, r)$. Пусть далее Δ — локальный подграф графа Γ и x — инволюция из S такая, что $x^g = g^x$. Через $\mathrm{Cay}(S, C)$ будем обозначать граф Кэли группы S по системе образующих $C \subseteq S - \{1\}$, т. е. граф на множестве элементов группы S, в котором две вершины s_1, s_2 смежны, если и только если $s_1 s_2^{-1} \in C$.

Лемма 1. Δ — *реберно симметричный граф степени $(q-1)/r$. В частности, если граф Δ связен, то $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — окрестность вершины H в Γ. Тогда $V(\Delta) = \{Hgs \mid s \in S\} = \{Hg\} \cup \{Hgx^{h^j} | j \in \{1, \ldots, q-1\}\}$. Стабилизатор вершины Hg в H совпадает с $\langle h^r\rangle$ и на $V(\Delta) - \{Hg\}$ имеется в точности r $\langle h^r\rangle$-орбит. Кроме того, степень вершины в Δ равна $(q-1)/r = |h^r|$. Отсюда Δ — реберно симметричный граф. В частности, если граф Δ связен, то по предложению 1 имеем $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)$, а поскольку вершины $\langle h^r\rangle x^{h^i}$ и $\langle h^r\rangle x^{h^j}$ смежны в графе $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, q-1\}$ тогда и только тогда, когда $x^{h^i} x^{h^j} \in x^{\langle h^r\rangle}$, то $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$. □

Напомним, что $(m, k; \lambda)$-*сетью* называется система инцидентности, состоящая из точек и блоков, множество блоков которой можно разбить на k параллельных классов размера m таким образом, что выполнены следующие условия:

$(N1)$ каждая точка инцидентна ровно k блокам, причем в точности одному из каждого параллельного класса,

$(N2)$ любые два блока из разных параллельных классов инцидентны в точности λ общим точкам.

Хорошо известно (см., например, обзор [2]), что $(m, k; 1)$-сеть является α-частичной геометрией порядка (s, t), где $\alpha = l = k - 1$ и $s = m - 1$, а точечный граф (или граф коллинеарности) частичной геометрии $pG_\alpha(s,l)$, т. е. граф, множеством вершин которого являются точки геометрии $pG_\alpha(s,l)$ и две вершины x,y которого смежны тогда и только тогда, когда точки x,y лежат на одной и той же прямой, сильно регулярен с параметрами $((s+1)(1+sl/\alpha), s(l+1), (s-1)+(\alpha-1)l, \alpha(l+1))$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, l называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,l)$.

Лемма 2. *Если r делит 2^t+1, то либо (i) $r=2^t+1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо (ii) $r<2^t+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами* $(2^{2t}, k(2^t-1), (k-1)(k-2)+2^t-2, k(k-1))$, *где* $k=(2^t+1)/r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r делит 2^t+1. Положим $f=h^{2^t+1}$ и $w=h^{(2^t-1)r}$. Тогда $\langle h^r\rangle = \langle w\rangle\times\langle f\rangle$. Ввиду утверждения (5) предложения 2 в S имеется подгруппа X порядка 2^t такая, что $X^f=X$. Кроме того, $X^{hf}=X^h$ и $\langle f\rangle$ имеет ровно 2^t+1 орбит на $S-\{1\}$, поэтому $\langle f\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Заметим, что если $r=2^t+1$, то Δ является объединением 2^t изолированных 2^t-клик. Поэтому далее будем считать, что r строго делит 2^t+1. Тогда $V(\Delta)$ допускает разбиение на 2^t X-орбит, каждая из которых является 2^t-кликой, а ввиду того что $\langle f\rangle$ фиксирует X-орбиту на $V(\Delta)$, содержащую вершину Hg, и переставляет циклически остальные X-орбиты, получим, что Δ — связный граф.

Докажем, что Δ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{k-1}(2^t,k-1)$. Для этого рассмотрим следующую систему инцидентности D на S. Точки системы D — это элементы группы S. Далее определим множество блоков системы D как множество X^{w^i}-орбит на S для всех $i\in\{1,\dots,(2^t+1)/r\}$. Для $i\in\{1,\dots,(2^t+1)/r\}$ через $\mathcal{B}_i$ обозначим множество X^{w^i}-орбит на S. Тогда множество $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{(2^t+1)/r}$ формирует разбиение множества всех блоков системы D на $(2^t+1)/r$ параллельных классов, $|\mathcal{B}_i|=2^t$ и $S\langle f\rangle$ действует 2-транзитивно на $\mathcal{B}_i$. Покажем, что D является $(2^t,(2^t+1)/r;1)$-сетью.

По построению точка $\{1\}$ инцидентна $(2^t+1)/r$ блокам, причем ровно одному блоку из каждого параллельного класса. Ввиду транзитивности действия H на S получим, что каждая точка из D инцидентна ровно $(2^t+1)/r$ блокам.

Покажем теперь, что любые два блока из разных параллельных классов инцидентны ровно одной общей точке. Предположим, что это не так и найдутся такие элементы $y_1,y_2\in S, y_1\neq y_2$, что $y_1,y_2\in B_i\cap B_j$ для некоторых блоков $B_i\in\mathcal{B}_i, B_j\in\mathcal{B}_j$. Тогда $1, y_2y_1^{-1}\in(B_i\cap B_j)y_1^{-1} = B_iy_1^{-1}\cap B_jy_1^{-1}$ и $y_2y_1^{-1}\in X^{w^i}\cap X^{w^j}$. Но тогда $y_1=y_2$, противоречие. Отсюда D — это $(2^t,(2^t+1)/r;1)$-сеть. Ясно, что граф коллинеарности построенной сети D изоморфен графу $\mathrm{Cay}(S,x^{\langle h^r\rangle})$. Значит ввиду леммы 1 Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(m^2, k(m-1), (k-1)(k-2)+m-2, k(k-1))$, где $m=2^t$ и $k=(2^t+1)/r$. □

Утверждение (1) теоремы доказано.

Пусть V — векторное пространство размерности n над конечным полем порядка q с невырожденной квадратичной формой Q. Напомним, что *аффинно полярный граф* — это граф на множестве векторов пространства V, вершины x и y которого смежны тогда и только тогда, когда $Q(x-y)=0$ и $x\neq y$. Этот граф обозначается через $\mathrm{VO}^+(n,q), \mathrm{VO}^-(n,q)$ или $\mathrm{VO}(n,q)$ в случаях, если форма Q гиперболическая, эллиптическая или параболическая соответственно. Известно, что если число n четно, то граф $\mathrm{VO}^\pm(n,q)$ сильно регулярен с параметрами $(q^n, (q^{n/2-1}\pm1)(q^{n/2}\mp1), q(q^{n/2-2}\pm1)(q^{n/2-1}\mp1)+q-2, q^{n/2-1}(q^{n/2-1}\pm1))$, в противном случае аффинно полярный граф не является сильно регулярным.

Лемма 3. *Если t четно и r делит $2^{t/2}+1$, то либо*

(i) $r=2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1))$, *либо*

(ii) $r<2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $\big(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1))-2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1))\big)$, *где* $z=(2^{t/2}+1)/r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть t четно и $r=2^{t/2}+1$. Положим $u=h^{2^t-1}$ и $y=h^{(2^t+1)(2^{t/2}+1)}$. Тогда $\langle h^r\rangle=\langle u\rangle\times\langle y\rangle$. Покажем, что граф Δ изоморфен аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$. Для этого введем на S структуру векторного пространства размерности 4 над полем из $2^{t/2}$ элементов. Определим бинарные операции $+$ на S и $\cdot$ на $S-\{1\}$ по правилам: $s_1+s_2=s_1s_2$ для всех $s_1,s_2\in S$, и $s_1\cdot s_2=x^{h_1h_2}$ для всех $s_1,s_2\in S-\{1\}$, где элементы $h_1,h_2\in\langle h\rangle$ такие, что $s_i=x^{h_i}$, $i=1,2$. Тогда $F=(S,+,\cdot)$ образует поле порядка 2^{2t}. Пусть X — подгруппа из S порядка $2^{t/2}$, нормализуемая элементом y. Можно считать, что $x\in X$. Тогда $\tilde X=(X,+,\cdot)$ образует подполе порядка $2^{t/2}$ поля $\tilde S$ и $\tilde S$ можно рассматривать как векторное пространство размерности 4 над $\tilde X$, сопоставляя элементам $\alpha\in\tilde X$ и $v\in\tilde S$ вектор $\alpha v=\alpha\cdot v$.

Положим $w=h^{2^t+1}$ и $z=h^{(2^t+1)(2^{t/2}-1)}$. Тогда $\langle w\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Пусть A_1,A_2 — две такие подгруппы, причем $A_1^u=A_2$ и $x\in A_1$. Тогда $A_i=\{1\}\cup v_i^{\langle w\rangle}$, где $i=1,2$, для $v_1=x$ и некоторого $v_2\in S$, $A_1\cap A_2=1$, $A_1\times A_2=S$, и $v_2\in x^{\langle u\rangle}$. Поэтому $\tilde S=\tilde A_1\oplus\tilde A_2$ — прямая сумма двух подпространств, $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$, размерности 2, соответствующих группам A_1,A_2. Пусть u_1,u_2 — два линейно независимых вектора из $\tilde S$, $u_i\in\tilde A_i, u_i\neq v_i$. Пусть $P=\langle v_1,v_2\rangle$ — это пространство, порожденное векторами v_1,v_2, и $W=\langle u_1,u_2\rangle$ — пространство, порожденное векторами u_1,u_2. Тогда $\tilde S=P\oplus W$.

Пусть $b^2+b+\alpha$ — некоторый неприводимый многочлен над $\tilde X$. Зададим на $\tilde S$ невырожденную квадратичную форму Q, полагая $Q(v_i)=0$, $Q(u_1)=1$, $Q(u_2)=\alpha$, $f_Q(v_1,v_2)=f_Q(u_1,u_2)=1$, $f_Q(v_i,u_j)=0$ для всех $i,j\in\{1,2\}$, где f_Q — поляризация квадратичной формы Q. Тогда для произвольного вектора $v=\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\delta_1u_1+\delta_2u_2\in\tilde S$ имеем $Q(v)=\gamma_1\gamma_2+\delta_1^2+\delta_1\delta_2+\alpha\delta_2^2$. Через Φ обозначим аффинно полярный граф на $\tilde S$ относительно квадратичной формы Q. По определению вершины y_1,y_2 графа Φ смежны, если и только если $Q(y_1+y_2)=0$ и $y_1\neq y_2$. Очевидно, что действие ρ группы S на $\tilde S$ трансляциями определяет регулярную на $V(\Phi)$ группу автоморфизмов $\rho(S)$ графа Φ, а действие ϕ группы $\langle y\rangle$ на $\tilde S$ по правилу $\phi(y):s\mapsto s^y$ задает группу автоморфизмов $\phi(\langle y\rangle)$ графа Φ, фиксирующую нулевой вектор и полурегулярную на его окрестности.

Группа $O^-(\tilde S,Q)$ изометрий пространства $(\tilde S,Q)$ действует транзитивно на множестве ненулевых сингулярных векторов и содержит простую подгруппу $(O^-(\tilde S,Q))^{(1)}=\Omega^-(\tilde S,Q)$ индекса 2. Ясно, что любая изометрия пространства $(\tilde S,Q)$ централизует $\phi(\langle y\rangle)$ и нормализует $\rho(S)$.

Ввиду изоморфизма $\Omega_4^-(2^{t/2})\simeq L_2(2^t)$ (см., например, [7, предложение 2.9.1 (v)]) получим, что $\langle u\rangle$ изоморфно вкладывается в группу $\Omega^-(\tilde S,Q)$. Пусть ψ — данное вложение. Тогда группа $\psi(\langle u\rangle)$ действует регулярно на множестве одномерных сингулярных подпространств пространства $(\tilde S,Q)$. Таким образом, $\psi(\langle u\rangle)$ действует транзитивно на 2^t+1 изолированных $(2^{t/2}-1)$-кликах из окрестности нулевого вектора в Φ. Теперь по предложению 1 получим, что $\Phi\simeq\Gamma(H,\langle h^r\rangle,\langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)\simeq\Delta$.

Пусть теперь r — собственный делитель числа $m=2^{t/2}+1$. Применим рассуждения из [8, с. 67], отождествляя, как и выше, группу S с полем порядка 2^{2t}. Для каждого $j\in\{1,2,\dots,m\}$ положим $\Gamma_j=\mathrm{Cay}(S,(x^{h^j})^{\langle h^m\rangle})$. Пусть $J\subset\{1,2,\dots,m\}$ и Γ_J — граф на множестве элементов группы S, в котором вершины s_1 и s_2 смежны тогда и только тогда, когда s_1 и s_2 смежны в графе Γ_j для некоторого $j\in J$. Тогда матрица смежности графа Γ_J имеет три различных собственных значения: $z(q-1)/m$, $z(2^{t/2}-1)$, $z(2^{t/2}-1)-2^t$, где $z=|J|$. Значит, Γ_J — сильно регулярный граф с параметрами из п. (ii) заключения. Заметим, что если J состоит в точности из чисел, кратных r и не превосходящих m, то $\Gamma_J=\mathrm{Cay}(S,x^{\langle h^z\rangle})\simeq\Delta$, где $z=m/r$. □

Утверждение (2) теоремы доказано.

Лемма 4. *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — это примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами $(2^{2t},(2^{2t}-1)/r,(2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2,(2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2)$, где $\epsilon=(-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера.*

Доказательство. Эта лемма является следствием теоремы 4 из [8]. □

Теорема доказана.

Покажем теперь, что некоторые графы Мэтона характеризуются своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Предложение 3. *Пусть* Γ — *вершинно-транзитивный дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений* $\{n-1,(r-1)c_2,1;1,c_2,n-1\}$ *и* $n=rc_2+2$ — *простое число Ферма. Если число* r — *простое, то* $\Gamma\simeq \mathrm{M}(n-1,r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и ϕ — действие, индуцированное группой G на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Так как $(r,n)=1$, то ввиду [5, теорема 2.5] действие ϕ точное и $\phi(G)\simeq G$. Пусть группа G неразрешима. Тогда по теореме Бернсайда получим, что $\phi(G)$ это 2-транзитивная группа подстановок на Σ. По условию $(r,n-1)=1$, поэтому Γ — реберно симметричный граф. Теперь исходя из [1] $\Gamma\simeq \mathrm{M}(n-1,r)$.

Если же группа G разрешима, то стабилизатор любых двух антиподальных классов в G тривиален, противоречие с тем, что для $F\in\Sigma$ группа $G_{\{F\}}$ содержит элемент порядка r. $\square$

П р и м е р ы. Пусть $\Gamma=\mathrm{M}(n-1,r)$ и число r — простое. При $n=5$ граф Γ изоморфен графу прямых графа Петерсена. При $n=17$ имеем $r=3$ и Γ — локально свернутый 5-куб или $r=5$ и Γ — локально $4\times K_4$-граф. Если $n=257$, то либо $r=3$ и Γ — локально граф Ван-Линта — Шрайвера с параметрами $(256,85,24,30)$, либо $r=5$ и Γ — локально $VO^-(4,4)$-граф, либо $r=17$ и Γ — локально $16\times K_{16}$-граф. Если $n=65537$, то либо r равно 3 или 5 и Γ — локально граф Ван-Линта — Шрайвера с параметрами $(2^{16},21845,7224,7310)$ или $(2^{16},13107,2498,2652)$ соответственно, либо $r=17$ и Γ — локально $VO^-(4,16)$-граф, либо $r=257$ и Γ — локально $2^8\times K_{2^8}$-граф.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю.** Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda=\mu$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 237–246.
2. **Махнев А.А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5(329). С. 25–76.
3. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** О дистанционно регулярных накрытиях клик с сильно регулярными окрестностями вершин // Совр. пробл. матем. и ее прил.: сб. тр. 46-й Междунар. мол. шк.-конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 13–18.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 494 p.
5. **Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E.** Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. Vol. 19, no. 4. P. 455–478.
6. **Dickson L.E.** Linear groups: with an exposition of the Galois field theory. N. Y.: Dover Publications, 1958.
7. **Kleidman P.B., Liebeck W.M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambr. Univ. Press. 1990. 304 p. (London Math. Soc. Lect. Notes Texts; vol. 129.)
8. **Shrijver A., van Lint J.H.** Construction of strongly regular graphs, two-weight codes and partial geometries by finite fields // Combinatorica. 1981. Vol. 1. P. 63–73.
9. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. (2). 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
10. **Tsiovkina L.Yu.** Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda=\mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 2015. Vol. 41. P. 1079–1087.

Циовкина Людмила Юрьевна Поступила 05.08.2015

канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com