ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.16 + 519.85

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА[1]

**М.Ю. Хачай, Е.Д. Незнахина**

Условие обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP) задается взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением множества его вершин на $k$ дизъюнктных кластеров $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Требуется построить цикл минимального веса, посещающий в точности одну вершину из каждого кластера. Мы рассматриваем геометрическую постановку задачи (именуемую в работе EGTSP-$k$-GC), в которой вершины графа являются точками на плоскости, весовая функция задается евклидовыми расстояниями между ними, а разбиение на кластеры определяется неявно с помощью регулярной целочисленной сетки с шагом 1. Произвольным образом разрешая неоднозначность, в рассматриваемой нами постановке назовем кластером подмножество вершин, принадлежащих одной ячейке данной сетки. Даже в этом частном случае обобщенная задача коммивояжера остается труднорешаемой, являясь естественным обобщением классической евклидовой задачи коммивояжера на плоскости. Недавно для данной задачи был построен $(1.5+8\sqrt{2}+\varepsilon)$-приближенный алгоритм с трудоемкостью, зависящей полиномиально как от числа вершин $n$, так и от количества кластеров $k$. Мы предлагаем три приближенные схемы для этой задачи. При произвольном фиксированном $k$ все схемы являются полиномиальными (PTAS), причем трудоемкость первых двух линейна по числу вершин. Более того, первые две схемы остаются полиномиальными при $k = O(\log n)$, а последняя схема сохраняет свойство полиномиальности при $k = n - O(\log n)$.

Ключевые слова: обобщенная задача коммивояжера (GTSP), $NP$-трудная задача, полиномиальная приближенная схема (PTAS).

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina. Approximation schemes for the generalized TSP.

The generalized traveling salesman problem (GTSP) is defined by a weighted graph $G = (V, E, w)$ and a partition of its vertex set into $k$ disjoint clusters $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. It is required to find a minimum-weight cycle that contains exactly one vertex of each cluster. We consider a geometric setting of the problem (we call it EGTSP-$k$-GC), in which the vertices of the graph are points in a plane, the weight function corresponds to the euclidian distances between the points, and the partition into clusters is specified implicitly by means of a regular integer grid with step 1. In this setting, a cluster is a subset of vertices lying in the same cell of the grid; the arising ambiguity is resolved arbitrarily. Even in this special setting, the GTSP remains intractable, generalizing in a natural way the classical planar Euclidean TSP. Recently, a $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$-approximation algorithm with complexity depending polynomially both on the number of vertices $n$ and on the number of clusters $k$ has been constructed for this problem. We propose three approximation algorithms for the same problem. For any fixed $k$, all the schemes are PTAS and the complexity of the first two is linear in the number of nodes. Furthermore, the complexity of the first two schemes remains polynomial for $k = O(\log n)$, whereas the third scheme is polynomial for $k = n - O(\log n)$.

Keywords: generalized traveling salesman problem, NP-hard problem, polynomial-time approximation scheme.

**MSC:** 90C27, 90C59, 90B06
**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-3-283-292

## Введение

Условие обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP), известной в отечественной литературе под названием *задача обхода мегаполисов* (см., например, [1]), задается полным реберно взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ на $k$ попарно непересекающихся кластеров (мегаполисов). По аналогии с классической задачей коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) требуется построить кратчайший циклический маршрут $v_1, e_2, v_2, \ldots, v_k, e_1, v_1$, вес которого совпадает с суммой весов

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант 14-11-00109.

входящих в него ребер и который посещает каждый кластер $V_i$ в единственной произвольно выбранной вершине $v_i \in V_i$.

Насколько нам известно, впервые задача GTSP была введена в конце 60-х гг. в работах [14] и [19], в которых рассматривались модели передачи компьютерных файлов и распределения клиентов по агенствам социального обеспечения.

При произвольной неотрицательной весовой функции $w$ задача GTSP обладает точным алгоритмом[2] с трудоемкостью $\Theta(k!n^3)$, т. е. принадлежит классу FPT. Данный сложностной класс объединяет комбинаторные задачи, точные решения которых могут быть найдены алгоритмами, для каждого из которых верхняя оценка трудоемкости $O(f(k)\cdot poly(n))$ выражается в терминах подходящей вычислимой функции $f$, определенной на множестве допустимых значений параметра $k$. Таким образом, при произвольном фиксированном значении $k$ задача GTSP полиномиально разрешима. В случае, когда $k$ является частью входа, задача GTSP $NP$-трудна в сильном смысле (даже на евклидовой плоскости), будучи обобщением классической задачи коммивояжера.

Известно несколько подходов к построению точных и приближенных решений задачи GTSP, в том числе модификации генетических алгоритмов [5;12], эвристики муравьиной колонии [15], а также подходы, эффективно использующие дополнительные ограничения предшествования (см., например, [6]). С интуитивной точки зрения наиболее простым представляется подход, основанный на полиномиальной сводимости [16], сохраняющей стоимость исходной задачи, к подходящей постановке классической задачи коммивояжера. К сожалению, результирующая постановка TSP, как правило, не наследует полезные структурные свойства исходной задачи. Постановка TSP, соответствующая евклидовой GTSP, не обязательно является евклидовой и даже метрической, и для ее решения не всегда удается применить эффективные приближенные алгоритмы, такие как 3/2-приближенный алгоритм Кристофидеса [7] или полиномиальную приближенную схему Ароры [3].

Как обычно, под полиномиальной приближенной схемой (Polynomial-Time Approximation Scheme, PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации понимаем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1+\varepsilon)$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных [20]. В случае, если время работы такого алгоритма составляет $O(n^c)$, где $c$ не зависит от $\varepsilon$, то приближенная схема называется *эффективной полиномиальной* (Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme, EPTAS).

Наряду с евклидовой GTSP большой интерес исследователей последние десятилетия был прикован к другому обобщению геометрической задачи коммивояжера, в котором требуется найти замкнутый маршрут наименьшего веса, пересекающий заданные подмножества плоскости $N_1, \ldots, N_k \subset \mathbb{R}^2$. Данные подмножества принято называть *окрестностями*, а саму задачу — задачей коммивояжера с окрестностями (Traveling Salesman Problem with Neighborhoods, TSPN). Несмотря на то что задача GTSP может рассматриваться как частный дискретный случай TSPN, при котором $N_i = V_i$, большинство позитивных результатов в области аппроксимируемости получены при условии, что $N_i$ являются телесными подмножествами плоскости (геометрическими фигурами). В работе [2] первые полиномиальные приближенные алгоритмы с фиксированными оценками точности получены для подклассов задачи TSPN, в которых окрестности являются непересекающимися единичными кругами и выпуклыми многоугольниками. Для общей постановки задачи в работе [17] предложен $O(\log k)$-приближенный алгоритм. В известной работе Думитреску и Митчелла [9] построены первый $O(1)$-приближенный алгоритм для случая произвольных связных окрестностей одинакового диаметра и полиномиальная приближенная схема для непересекающихся единичных кругов. Позднее Митчелл распространил этот результат на случай произвольных “тучных” (fat) окрестностей [18], а в работе [10] Думитреску и Тотом построено обобщение результатов [9] на случай произвольного $d$-мерного евклидового пространства.

[2] О существовании такого алгоритма нам сообщил проф. A.Grigoriev в частной переписке.

Данная статья посвящена исследованию аппроксимируемости геометрической версии задачи GTSP на плоскости (Euclidian Generalized Traveling Salesman Problem in $k$ Grid Clusters, EGTSP-$k$-GC), в которой кластеры $V_i$ порождаются ячейками единичной прямоугольной сетки. По-видимому, впервые задача EGTSP-$k$-GC была введена в работе [4], в которой для произвольного $\varepsilon > 0$ для нее был построен $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$-приближенный алгоритм как следствие аппроксимационных результатов, полученных авторами для обобщенной задачи об остовном дереве, в которой кластеры также индуцируются ячейками прямоугольной сетки (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP).

Заметим, что эффективные точные и приближенные алгоритмы разрабатывались для задачи GMSTP и ранее, и каждый из них естественным образом порождает соответствующий приближенный алгоритм для задачи EGTSP-$k$-GC. В частности, в [11] разработана схема динамического программирования для частного случая задачи GMSTP, в котором объединение непустых ячеек, индуцирующих кластеры, является связным множеством. Показано, что предложенная схема обладает полиномиальной трудоемкостью при условии, что один из геометрических размеров сетки (ширина или высота) является фиксированным. Для случая, когда в дополнение к условию на связность заполненных ячеек число кластеров растет сверх-линейно по отношению к размерам сетки, в той же работе построена PTAS. В приложении к задаче EGTSP-$k$-GC оба результата порождают 2 и $(2+\varepsilon)$-приближенные полиномиальные алгоритмы в соответствующих частных постановках.

Таким образом, на данный момент сведения об аппроксимируемости задачи EGTSP-$k$-GC исчерпываются несколькими полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированными оценками точности и отрицательным результатом о невозможности построения PTAS для общей постановки евклидовой задачи GTSP (см., например, [8]). Естественным образом возникает вопрос об уточнении статуса аппроксимируемости EGTSP-$k$-GC, в частности о возможности построения для нее полиномиальной приближенной схемы, исследованию которого посвящена данная статья.

В статье предлагаются три приближенные схемы для данной задачи. При произвольном фиксированном $k$ все построенные схемы являются эффективными полиномиальными схемами, более того, первые две из них обладают линейной по $n$ трудоемкостью. В то время как трудоемкость первых двух схем остается полиномиальной при условии $k = O(\log n)$, последняя сохраняет свойство полиномиальности при $k = n - O(\log n)$.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим евклидову постановку обобщенной задачи коммивояжера (Euclidian Generalized Traveling Salesman Problem in $k$ Grid Clusters, EGTSP-$k$-GC). В этом частном случае задан реберно взвешенный граф $G = (V, E, w)$, в котором множество вершин $V$ соответствует множеству точек на плоской целочисленной решетке. Каждая непустая $1 \times 1$ клетка образует кластер. Вес ребра между двумя вершинами соответствует евклидову расстоянию между ними. На рис. 1 представлена постановка задачи EGTSP-$k$-GC для $k = 6$ и $n = 17$.

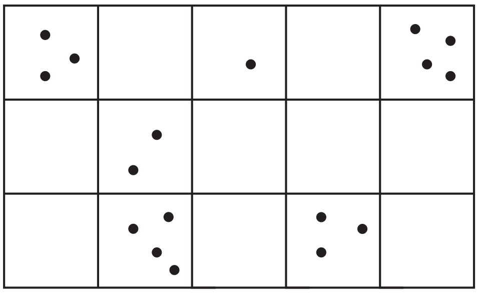

Рис. 1. Постановка задачи EGTSP-$k$-GC для $k = 6$.

## 2. Приближенные схемы для случая медленно растущих значений параметра $k$

Для случая медленно растущих значений параметра $k$ мы предлагаем две полиномиальных приближенных схемы. Первая схема основана на классическом алгоритме динамического программирования Хелда — Карпа, применимом при поиске точных решений для набора вспомогательных постановок евклидовой задачи коммивояжера. Второй алгоритм обобщает PTAS Ароры на случай EGTSP-$k$-GC.

### 2.1. Приближенная схема, основанная на методе динамического программирования

Основная идея алгоритма заключается в объединении полного перебора множеств представителей из $k$ вершин для заданного множества кластеров и применении метода динамического программирования для построения на выбранных вершинах гамильтоновых циклов и сравнения их длин.

Введем дополнительный параметр $t$ и разделим все непустые клетки заданной решетки на $t^2$ равных клеток с длиной стороны $1/t$. Далее для каждой непустой полученной клетки заменим все содержащиеся в ней узлы исходного графа $G$ на центр соответствующей клетки. В результате этой процедуры произойдет замена вершин кластера на не более чем $t^2$ новых выделенных вершин. Заметим, что имеется не более чем $t^{2k}$ способов выбрать $k$ центров в качестве представителей заданных кластеров. Далее для каждого такого набора вершин построим гамильтонов цикл минимального веса с помощью алгоритма динамического программирования Хелда — Карпа [13] за время $O(k^2 2^k)$. Общая трудоемкость алгоритма составит $O(t^{2k}k^2 2^k) + O(n)$.

А л г о р и т м 1. PTAS, основанная на методе динамического программирования

**Input:** задана постановка задачи EGTSP-$k$-GC и необходимое значение точности $\varepsilon$.
**Output:** $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

1: строим разбиение $k$ непустых узлов решетки на $t^2$ клеток с длиной стороны $1/t$; значение $t$ будет определено позже;
2: каждой $j$-й клетке поставим в соответствие множество $C_j$, содержащее центры непустых дочерних клеток;
3: **for all** $(c_1, \ldots, c_k) \in C_1 \times \ldots \times C_k$ **do**
4: используя процедуру динамического программирования, построим точное решение $S(c_1, \ldots, c_k)$ соответствующей постановки задачи коммивояжера;
5: **end for**
6: результатом работы алгоритма является кратчайший маршрут $S(c_1, \ldots, c_k)$.

Оценка точности алгоритма 1 основана на том факте, что для любой вершины $v \in V$ расстояние между узлом $v$ и ближайшим центром дочерней клетки не превосходит $\sqrt{2}/(2t)$. Рассмотрим произвольное оптимальное решение изначальной постановки GTSP-$k$-GC. Накопленная погрешность, индуцированная заменой заданных узлов ближайшими центрами дочерних квадратов, не превосходит $k\sqrt{2}/t$.

Чтобы оценить $k$ в терминах длины оптимального решения GTSP, мы используем недавний результат, связанный с аппроксимируемостью иной задачи комбинаторной оптимизации, заданной на кластерах (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP). В отличие от классической постановки задачи о минимальном остовном дереве (Minimum Spanning Tree Problem, MSTP), которая может быть решена точно за полиномиальное время, ее обобщение на кластерах является $NP$-трудной задачей даже в случае евклидовой плоскости, где кластеры определяются клетками целочисленной решетки.

**Теорема 1** [4, Theorem 2]. *Пусть $OPT_{\mathrm{GMSTP}}$ — длина кратчайшего остовного дерева, решения евклидовой задачи* GMSTP *на $k$ кластерах в целочисленной решетке, тогда $k \le 4\,OPT_{\mathrm{GMSTP}} + 4$.*

Так как остовное дерево может быть получено из гамильтонова цикла путем удаления произвольного ребра, то верно неравенство $OPT_{\mathrm{GTSP}} \ge OPT_{\mathrm{GMSTP}}$ для любой неотрицательно определенной весовой функции. Отсюда для евклидовой обобщенной задачи коммивояжера верно аналогичное утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть $OPT_{\mathrm{GTSP}}$ — длина кратчайшего гамильтонова цикла, решения задачи* EGTSP-$k$-GC, *тогда $k \le 4\,OPT_{\mathrm{GTSP}} + 4$.*

Для любого $k > 4$ и $\varepsilon > 0$ выберем значение параметра $t$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{k\sqrt{2}}{t} \le \frac{k-4}{4}\varepsilon \le \varepsilon\,OPT_{\mathrm{GTSP}},$$

т. е.

$$t \ge \frac{4\sqrt{2}k}{(k-4)\,\varepsilon} = \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon}\Big(1 + \frac{4}{k-4}\Big) \ge \frac{20\sqrt{2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, мы гарантируем, что при произвольном $k > 4$ накопленная погрешность не превысит $\varepsilon\,OPT_{\mathrm{GTSP}}$. Следовательно, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для любых значений $\varepsilon > 0$ и $k > 4$ алгоритм 1 находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи* EGTSP-$k$-GC *за время $O(k^2(O(1/\varepsilon))^{2k}) + O(n)$.*

**Следствие 2.** 1) *При произвольном фиксированном $k > 4$ алгоритм 1 является линейной приближенной схемой.* 2) *При $k = O(\log n)$ алгоритм 1 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O((\log n)^2 n^{O(\log(1/\varepsilon))})$.*

### 2.2. PTAS, обобщающая схему Ароры для задачи коммивояжера на плоскости

В данном подразделе будет описана полиномиальная приближенная схема, обобщающая подход, предложенный Аророй [3] для евклидовой задачи TSP. Предположим, что $k > 4$.

Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в рандомизированном рекурсивном разделении объемлющего квадрата на квадраты меньшей площади и последующем поиске замкнутого маршрута минимального веса, удовлетворяющего следующим ограничениям:

a) маршрут посещает в точности одну вершину из каждого кластера $V_i$;
b) отрезки маршрута, соединяющие соседние вершины, являются непрерывными ломаными и могут пересекать границы построенных квадратов лишь в заданных наперед точках (порталах);
c) число и местоположение порталов, равно как и предельное количество допустимых пересечений сторон каждого квадрата, также задаются заранее и зависят от параметра $\varepsilon$, определяющего точность приближения.

Покажем, что для построения PTAS для EGTSP-$k$-GC достаточно построить аналогичную схему для некоторого ее подкласса. Назовем постановку евклидовой обобщенной задачи коммивояжера *округленной*, если

(i) существует $L' = O(k)$ такое, что для любого узла $v_i = [x_i, y_i]$ заданного графа $G$ его координаты $x_i, y_i \in \{0, \dots, L'\}$;
(ii) для любых вершин $u \ne v \in V$, $w(\{u, v\}) \ge 4$.

Обоснуем, что существование PTAS для округленной EGTSP-$k$-GC влечет за собой существование PTAS для исходной постановки задачи. Рассмотрим произвольную постановку EGTSP-$k$-GC и соответствующую ей округленную постановку. Обозначим максимальное расстояние между кластерами через $D$, тогда $OPT = OPT_{\mathrm{GTSP}} \geq 2D \geq 2$ по неравенству треугольника. Отсюда размер $L$, минимального выровненного по осям объемлющего квадрата для заданной постановки задачи, удовлетворяет неравенству

$$L \leq D + 2 \leq 1.5\,OPT. \tag{1}$$

Далее построим выровненную по осям сетку со стороной квадрата $L\varepsilon/(2k)$ и переместим каждую вершину исходного графа в ближайший узел получившейся сетки. Очевидно, некоторые узлы могут быть отображены в один и тот же узел сетки, следовательно, округленная постановка задачи может иметь меньшую размерность. Кроме того, возможна ситуация, когда два или более различных кластеров делят один узел сетки, тогда мы будем относить данный узел ко всем этим кластерам. В результате преобразований расстояние между любыми двумя вершинами изменится не более, чем на $L\varepsilon/k$, а значит, длина произвольного $k$-цикла изменится не более, чем на $L\varepsilon$.

Далее изменим расстояние между линиями сетки, умножив все координаты на $8k/(L\varepsilon)$. Получим сетку со стороной клетки 4. Сдвинем начало координат так, чтобы оно совпало с левым нижним углом решетки. После описанных преобразований каждая вершина примет неотрицательные координаты, а минимальное расстояние между ними станет не менее четырех. Размер объемлющего квадрата будет равен $L' = O(k/\varepsilon) = O(k)$ для любого фиксированного значения $\varepsilon$.

Рассмотрим произвольный $k$-цикл $C$ в заданной постановке задачи и соответствующий ему цикл $C'$ в округленной постановке. Обозначим их веса через $W$ и $W'$ соответственно. Получим

$$8k\,(W - L\varepsilon)\,/(L\varepsilon) \leq W' \leq 8k\,(W + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon). \tag{2}$$

Подставим в правую часть неравенства (2) оптимальные значения $OPT$ и $OPT'$ рассмотренных задач, т. е. $OPT' \leq 8k\,(OPT + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon)$. Предположим, что $W' \leq (1+\varepsilon)OPT'$ для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда

$$8k\,(W - L\varepsilon)\,/(L\varepsilon) \leq W' \leq (1+\varepsilon)OPT' \leq 8k(1+\varepsilon)\,(OPT + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$OPT \leq W \leq (1+\varepsilon)(OPT + L\varepsilon) + L\varepsilon \leq (1+4\varepsilon)OPT$$

согласно (1). Таким образом мы доказали следующую лемму.

**Лемма.** *Произвольная* PTAS *для округленной* EGTSP-$k$-GC *индуцирует* PTAS *для общей* EGTSP-$k$-GC *с аналогичной по порядку величины оценкой трудоемкости.*

Всюду ниже в данном разделе мы рассматриваем именно постановки округленной задачи EGTSP-$k$-GC. Приведенная выше лемма позволяет распространить аппроксимационные результаты, полученные для этих задач, на общий случай.

Обозначим наименьший содержащий постановку исходной задачи квадрат, стороны которого параллельны осям координат, через $\mathcal{S}$. Без ограничения общности положим длину стороны $L'$ объемлющего квадрата равной наименьшей подходящей степени двойки.

Для дальнейших построений воспользуемся структурой данных, известной как 4-дерево. Корнем дерева назовем объемлющий квадрат $\mathcal{S}$. Каждый квадрат, включая корневой, делим на четыре равных дочерних квадрата. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим квадраты, содержащие не более одной вершины исходной задачи. По построению 4-дерево содержит $O(k^2)$ листьев, $O(\log L') = O(\log k)$ уровней и $O(k^2 \log k)$ узлов всего.

Центральная точка 4-дерева — это точка пересечения ребер квадратов с длиной стороны $L'/2$. Мы рассмотрим деревья $T(a,b)$, центральная точка которых имеет координаты $((L'/2+a) \mod L',\ (L'/2+b) \mod L')$, где $a,b \in \mathbb{N}^0_{L'}$. Квадраты дерева $T(a,b)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по горизонтали и вертикали.

Зададимся значениями параметров $m,r \in \mathbb{N}$. Произвольному квадрату $S$ сопоставим регулярное разбиение его границы, включающее все вершины квадрата и состоящее из $4(m+1)$ точек (порталов).

О п р е д е л е н и е. Пусть $C$ — простой цикл в графе $G$ на плоскости. Замкнутая ломаная $l(C)$ называется $(m,r)$-*аппроксимацией* цикла $C$, если выполняются следующие условия:

(1) множество вершин $l(C)$ является подмножеством вершин заданного графа и множества порталов;

(2) вершины графа $G$ обходятся ломаной $l(C)$ в порядке, задаваемом маршрутом $C$;

(3) $l(C)$ пересекает каждую сторону произвольного квадрата, узла дерева $T(a,b)$, не более $r$ раз, причем исключительно в порталах.

Нам потребуется основной результат работы [3], одна из эквивалентных формулировок которого приведена ниже.

**Теорема 3** (Structure Theorem). *Пусть постановка округленной задачи* TSP *на плоскости задается полным евклидовым графом $G$, длина стороны объемлющего квадрата $\mathcal{S}$ которого равна $L$, и заданы константы $c > 0$ и $\eta \in (0,1)$. Пусть дискретные случайные величины $a,b$ распределены равномерно и независимо на множестве $\mathbb{N}_L$, а значения параметров $m$ и $r$ определяются соотношениями $m = \lceil 2s \log L \rceil$, $r = s+4$ и $s = \lceil 36c/\eta \rceil$.*

*Тогда для произвольного простого цикла $C$ (в графе $G$) веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1-\eta$, существует $(m,r)$-аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1+1/c)W(C)$.*

Результат теоремы 3 гарантирует нам существование $(m,r)$-аппроксимации оптимального решения округленной EGTSP-$k$-GC. Для произвольного 4-дерева $T(a,\ b)$ обозначим $(m,\ r)$-аппроксимацию наименьшего веса $C(a,\ b)$. Следуя подходу, предложенному Аророй, для произвольных фиксированных значений параметров $a$ и $b$ вычислим $C(a,\ b)$ с помощью процедуры динамического программирования. Количество подзадач в сравнении с [3] будет отличаться на некоторый множитель, зависящий от $k$.

А л г о р и т м 2. Обобщение PTAS Ароры

**Input:** заданы постановка задачи EGTSP-$k$-GC и необходимое значение точности $\varepsilon$.
**Output:** $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

1: определим для заданной постановки задачи соответствующую ей округленную постановку и построим объемлющий квадрат с длиной стороны $L'$;
2: **for all** $a,b \in \mathbb{N}^0_{L'}$ **do**
3: следуя подходу [3], построим 4-дерево $T(a,b)$ и определим значение $C(a,b)$ с помощью процедуры динамического программирования; подзадача в процедуре динамического программирования для произвольного узла $T(a,\ b)$ наряду с параметрами, введенными в [3], обладает дополнительными параметрами, определяющими посещение кластеров $V_{i_1},\ldots,V_{i_t}$, соответствующих данному узлу. Таким образом, каждая подзадача процедуры динамического программирования Ароры индуцирует $4^t \le 4^k$ подзадач в соответствии со всеми способами назначения кластеров дочерним клеткам данного узла $T(a,\ b)$ (см. рис. 2);
4: **end for**
5: $(m,r)$-аппроксимация наименьшего веса $C(a,b)$.

Таким образом, верна следующая теорема.

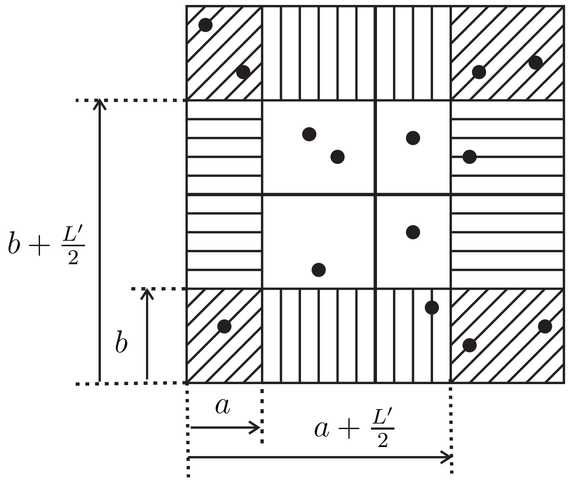


Рис. 2. Пример размещения кластеров в клетке $T(a,\ b)$.

**Теорема 4.** *Для произвольного фиксированного* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $k > 4$ *алгоритм* 2 *находит* $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение для* EGTSP-$k$-GC *за время* $2^{O(k)}k^4(\log k)^{O(1/\varepsilon)} + O(n)$.

**Следствие 3.** 1) *Для любых фиксированных значений* $k > 4$ *алгоритм* 2 *является полиномиальной приближенной схемой для* EGTSP-$k$-GC. 2) *Для* $k = O(\log n)$ *алгоритм* 2 *является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью* $O(n(\log n)^4(\log\log n)^{O(1/\varepsilon)})$ *и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости* $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n(\log n)^5)$.

Последнее утверждение следует из очевидного неравенства $(\ln n)^C \le 2^{C^2}n$.

## 3. Приближенная схема для случая быстро растущих значений параметра $k$

Для случая быстро растущих значений параметра $k$ мы предлагаем подход, основанный на непосредственном применении PTAS [3] для евклидовой задачи коммивояжера на плоскости.

А л г о р и т м 3. Схема, основанная на классической PTAS Ароры
**Input:** задана постановка задачи EGTSP-$k$-GC и необходимое значение точности $\varepsilon$.
**Output:** $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

рассмотрим разбиение $V_1, \ldots, V_k$ множества вершин $V$ заданного графа, индуцированное целочисленной решеткой;
**for all** $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \ldots \times V_k$ **do**
    строим $(1+\varepsilon)$-приближенное решение $S(v_1, \ldots, v_k)$ для соответствующей постановки TSP с помощью PTAS Ароры;
**end for**
ответом является маршрут наименьшего веса $S(c_1, \ldots, c_k)$.

Обозначим через $t_i$ число узлов, принадлежащих $i$-му кластеру. Количество способов определить постановку задачи TSP, выбирая по одному узлу из каждого кластера, равно $t_1 \times \ldots \times t_k$. Данное произведение достигает максимального значения при условии $\sum_{i=1}^{k} t_i = n$ в точке $t_i = n/k$. Так как для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ временная сложность PTAS Ароры для постановки евклидовой TSP на $k$ узлах составляет $O(k^3(\log k)^{O(\log(1/\varepsilon))})$, то временная сложность алгоритма 3 равна $\left(\frac{n}{k}\right)^k k^3(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.

Для любого фиксированного $k$ временная сложность зависит от $n$ полиномиально, и алгоритм 3 является полиномиальной приближенной схемой для EGTSP-$k$-GC. Чтобы получить аналогичный результат для значений параметра $k$, зависящих от $n$, выберем $k = k(n)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le n^D \tag{3}$$

для некоторого постоянного значения $D > 0$. Предположим, что $\dfrac{n-k(n)}{k(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как в данном случае

$$\left(\frac{n}{k(n)}\right)^{k(n)} = \left(1 + \frac{n-k(n)}{k(n)}\right)^{k(n)} \le e^{n-k(n)},$$

при $k(n) \ge n - D\log n$ выполняется неравенство (3). Таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема 5.** *Для любых значений $k$ и $\varepsilon > 0$ алгоритм 3 находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение EGTSP-$k$-GC за время $n^k(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.*

**Следствие 4.** 1) *Алгоритм 3 является эффективной полиномиальной приближенной схемой для EGTSP-$k$-GC при произвольном фиксированном $k$.* 2) *Для $k = O(\log n)$ алгоритм 3 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{D+3}(\log n)^{O(1/\varepsilon)})$ и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n^{D+4})$.*

## Заключение

В работе обосновано несколько полиномиальных приближенных схем для задачи EGTSP-$k$-GC, так или иначе опирающихся на идею динамического программирования. Показано, что исследуемая задача эффективно аппроксимируема с произвольной заданной точностью при условии, что число кластеров $k$ удовлетворяет одному из двух условий: $k = O(\log n)$ или $k = n - O(\log n)$. Несмотря на очевидное продвижение в области оценки статуса аппроксимируемости задачи EGTSP-$k$-GC, следует отметить, что вопрос о возможности построения PTAS для ее общей постановки пока остается открытым.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сесекин А. Н., Ченцов А. А., Ченцов А. Г.** Задачи маршрутизации перемещений. СПб.: Лань, 2011. 256 с.
2. **Arkin E. M., Hassin R.** Approximation algorithms for the geometric covering salesman problem // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 55, no. 3. P. 197–218.
3. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
4. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters / B. Bhattacharya, A. Ćustić, A. Rafiey A, A. Rafiey, V. Sokol. // Combinatorial Optimization and Applications: 9th Internat. Conf. (COCOA 2015): Proc. Cham: Springer International Publ., 2015. *LNCS*. Vol. 9486. P. 110–125.
5. **Bontoux B., Artigues C., Feillet D.** A memetic algorithm with a large neighborhood crossover operator for the generalized traveling salesman problem // Computers & Oper. Res. 2010. Vol. 37, no. 11. P. 1844–1852.
6. **Ченцов А. Г., Хачай М. Ю., Хачай Д. М.** Точный алгоритм с линейной трудоемкостью для одной задачи обхода мегаполисов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 309–317.
7. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Tech. report AD-A025 602 / Carnegie-Mellon University. Pittsburgh, 1976. 11 p.
8. **Dror M., Orlin J.** Combinatorial optimization with explicit delineation of the ground set by a collection of subsets // SIAM J. Discrete Math. 2008. Vol. 21, no. 4. P. 1019–1034.

9. **Dumitrescu A., Mitchell J. S. B.** Approximation algorithms for TSP with neighborhoods in the plane // Proc. of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA ’01). Philadelphia: SIAM, 2001. P. 38–46.
10. **Dumitrescu A., Tóth C. D.** The traveling salesman problem for lines, balls, and planes // ACM Trans. Algorithms. 2016. Vol. 12, no. 3. P. 43:1–43:29.
11. **Feremans C., Grigoriev A., Sitters R.** The geometric generalized minimum spanning tree problem with grid clustering // 4OR. 2006. Vol. 4, no. 4. P. 319–329.
12. **Gutin G., Karapetyan D.** A memetic algorithm for the generalized traveling salesman problem // Nat. Comput. 2010. Vol. 9, no. 1. P. 47–60.
13. **Held M., Karp R. M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. Vol. 10. no. 1. P. 196–210.
14. **Henry-Labordere A.** The record balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // Rev. Franc. Inform. Rech. Opér. 3. 1969. No. B-2. P. 43–49.
15. **Jun-man K., Yi Z.** Application of an improved ant colony optimization on generalized traveling salesman problem // Energy Procedia. 2012. Vol. 17, part A. P. 319–325.
16. **Laporte G., Mercure H., Nobert Y.** Generalized travelling salesman problem through n sets of nodes: the asymmetrical case // Discrete Appl. Math. 1987. Vol. 18, no. 2. P. 185–197.
17. **Mata C. S., Mitchell J. S. B.** Approximation algorithms for geometric tour and network design problems // Proc. of the Eleventh Annual Symposium on Computational Geometry (SCG ’95). N.Y.: ACM, 1995. P. 360–369.
18. **Mitchell J. S. B.** A PTAS for TSP with neighborhoods among fat regions in the plane // Proc. of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA ’07). Philadelphia, 2007. P. 11–18.
19. **Saksena J.** Mathematical model for scheduling clients through welfare agencies // CORS J. 1970. Vol. 8. P. 185–200.
20. **Williamson D., Shmoys D.** The design of approximation algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 500 p.

Хачай Михаил Юрьевич
доктор физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
Омский государственный технический университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 16.05.16

Незнахина Екатерина Дмитриевна
аспирант, математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: eneznakhina@yandex.ru