ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 518.9

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ИГРОКОВ

М. Тухтасинов

Для линейной дифференциальной игры преследования предлагаются достаточные условия для завершения преследования, когда один из игроков применяет управление импульсного характера, а другой — управление с интегральным ограничением. Указываются способы нахождения управлений преследующего игрока, обеспечивающие завершение преследования за конечное время. В конце работы приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Во втором примере используемый метод решает альтернативу: пространство $\mathbb{R}^m$ разбивается на две части, из точек одной возможно завершение преследования, а из точек другой — нельзя.

Ключевые слова: разрешающая функция, импульсное управление, преследование, преследователь, убегающий, интегральное ограничение, терминальное множество.

M. Tukhtasinov. A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players.

Sufficient conditions of pursuit termination are proposed for a linear differential game of pursuit when one of the players applies an impulse-type control and the other player applies an integrally constrained control. Methods for finding the pursuer's controls that guarantee the termination of pursuit in a finite time are presented. At the end of the paper, we give examples illustrating the results. The method used in the second example provides an alternative: the space $\mathbb{R}^m$ is divided into two parts so that the pursuit can be terminated from any point of the first part and the pursuit cannot be terminated from any point of the second part.

Keywords: resolving function, impulse control, pursuit, pursuer, evader, integral constraint, terminal set.

MSC: 49N75
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282

Введение

При изучении реальных процессов с помощью математических моделей большой интерес представляет рассмотрение дифференциальных игр с разнотипными ограничениями на управления игроков. В работе [1] рассмотрены дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими ограничениями. Методом разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Указаны способы нахождения гарантированного времени и управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты применены к решению конкретных задач преследования.

В работе [2] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Наложенное на параметры игры условие, которое является аналогом условия Л. С. Понтрягина, обеспечивает преимущество преследователя над убегающим. Доказаны важные свойства разрешающих функций, и с их помощью решена задача о завершении преследования. В [3] рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования с интегральными ограничениями более общего вида на управления игроков. Формализация задач импульсного оптимального управления для линейных систем и методы их решения предложены в [4].

В книге [5] разработан метод разрешающих функций для выхода из конфликтных ситуаций, описываемых системой дифференциальных уравнений при геометрических ограничениях на управления игроков. В дальнейшем метод разрешающих функций был применен для дифференциальных игр преследования с интегральными ограничениями и импульсными управлениями игроков.

В работах [6; 7] рассмотрена задача преследования, в которой движения игроков описываются однотипными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка — уравнениями Мещерского. Мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью сводится к задаче с импульсным управлением. Указаны соответствующие управления игроков и оптимальное время завершения преследования. В [8] изучена дифференциальная игра преследования многих лиц с простыми нестационарными движениями каждого из игроков. С применением метода разрешающих функций доказывается теорема о поимке хотя бы одним из преследователей на основе импульсных контрстратегий. Доказывается аналогичная теорема при применении убегающим игроком импульсной стратегии.

Метод разрешающих функций для игры преследования основан на “притяжений” телесной части терминального множества, чтобы происходило пересечение с некоторым многозначным отображением, связанным с данной игрой. Очевидно, что если разрешающая функция является скалярной, то “притяжение” происходит в соответствующем конусе. В работе [9] предложено обобщение метода разрешающих функций: вместо скалярной разрешающей функции используется матричная разрешающая функция, тем самым “притяжение” осуществляется по различным направлениям.

В настоящей работе исследуются конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом классами допустимых управлений игроков являются либо все измеримые функции, удовлетворяющие интегральному ограничению, либо все импульсные функции, выражаемые через дельта-функции Дирака. Различаются два случая в зависимости от выбора игроками управлений из разных классов допустимых управлений. С использованием идей работы [1] в обоих случаях приводятся достаточные условия для завершения преследования из заданной начальной точки. Работа непосредственно примыкает к исследованиям [1–3].

1. Постановки задач

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где z — фазовый вектор, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, A — постоянная матрица порядка $m \times m$. Терминальное множество представляется цилиндром вида $M^* = M^0 + M$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Задача преследования состоит в том, чтобы с помощью допустимого управления u за конечное время привести траекторию системы (1.1) на терминальное множество M^*.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без точек сгущения, т. е. любой отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности.

В данной работе рассматриваются две формализации задачи преследования, которые отличаются классами допустимых управлений игроков:

1. Классом допустимых управлений преследователя является множество импульсных функций, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad u_i \in U, \quad t \geq 0,$$

где U — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. А множество всех измеримых функции $v(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^\infty ||v(\vartheta)||^2\,d\vartheta \le \sigma^2,$$

где σ — неотрицательное фиксированное число, определяет класс допустимых управлений убегающего игрока.

2. Множество всех измеримых функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^\infty ||u(\vartheta)||^2\,d\vartheta \le \rho^2,$$

где ρ — неотрицательное фиксированное число, называется *классом допустимых управлений преследующего игрока. А классом допустимых управлений убегающего* — множество импульсных функций, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$v(t)=\sum_{i=0}^{\infty} v_i\delta(t-\tau_i),\quad v_i\in V,\quad t\ge 0,$$

где V — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$.

В обоих случаях задача заключается в том, чтобы для данной начальной точки $z_0\notin M^*$ определить условия, при выполнении которых при любом управлении $v(\cdot)$ из класса допустимых управлений убегающего игрока при использовании в момент времени t информации о предыстории управления убегающего игрока $v(s)$, $0\le s\le t$, можно будет построить управление $u(\cdot)$ из класса допустимых управлений преследователя так, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t\ge 0$, системы (1.1), исходящая из начального положения z_0, выводилась за конечное время на терминальное множество M^*.

2. Решение задачи 1

После подстановки в правую часть уравнения (1.1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно теореме 1 [10, § 1, гл. 1] эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0)=z_0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах $(\tau_{i-1},\,\tau_i)$, $i\in\mathbb{N},\tau_0=0$, а в моменты времени τ_i может иметь разрывы первого рода.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L, а через e^{tA} — фундаментальную матрицу однородной части системы (1.1).

Пусть $v(t)$, $t\ge 0$, — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим следующие множества:

$$W_i(n,v(\cdot))=\pi e^{(\tau_n-\tau_i)A}U-\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\pi e^{(\tau_n-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$W_i(n)=\bigcap_{v(\cdot)\in V[\tau_{i-1},\,\tau_i]} W_i(n,v(\cdot))=\pi e^{(\tau_n-\tau_i)A}U\underline{*}G_i(n,\,\tau_{i-1},\tau_i),$$

где

$$G_i(n,\,\tau_{i-1},\tau_i)=\left\{x\in L\colon x=\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\pi e^{(\tau_n-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta,\ v(\cdot)\in V[\tau_{i-1},\,\tau_i]\right\}.$$

Здесь через $V[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ обозначено множество всех измеримых на $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ функций $v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta \le \sigma^2, \tag{2.1}$$

а символ $X\underline{*}Y = \big\{x\colon x+Y\subset X\big\} = \bigcap_{y\in Y}\big(X-y\big)$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y. Отметим, что $G_i(\cdot)$ являются выпуклыми компактными множествами в L.

Предположение 2.1 [1, условие 2.2]. *Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, i, $n\in\mathbb{N}$, $i=1,\ldots,n$.*

В силу этого предположения можно выбрать из каждого множества $W_i(n)$ некоторый элемент $w_i(n)$. Через $w=w(n)=\{w_i(n)\}_{i=1}^n$ обозначим некоторый набор, состоящий из элементов $w_i(n)$, $i=1,\ldots,n$.

Далее, для некоторого набора w определим число $N(z,w)$:

$$N(z,w)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}:\inf_{v(\cdot)\in V[0,\tau_n]}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(n,z,v(\cdot),w)=1\Big\},$$

где функции $\alpha_i(\cdot)$, $i=0,\ldots,n(t)$, определяются по схеме рассуждений п. 2 работы [1]. Отметим, что в определении числа $N(z,w)$, в отличие от работы [1], знак inf в скобке записан перед знаком суммы, потому что убегающий игрок должен свой ограниченный ресурс распределить на весь отрезок $[0,\tau_n]$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1, *множества M, U выпуклы и $N(z_0,w)<\infty$ для начального положения $z_0\notin M^*$ и некоторого набора w. Тогда траекторию $z(t)$ системы* (1.1) *можно вывести на терминальное множество M^* в момент времени $t=\tau_{N(z_0,w)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2.1 из работы [1], при условии, что допустимое управление $v(\cdot)$ убегающего игрока на каждом из отрезков $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ будет удовлетворять соответствующему интегральному ограничению.

З а м е ч а н и е 2.1. С учетом того обстоятельства, что убегающий игрок в любом из отрезков $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ может использовать свой максимальный ресурс, в ограничении (2.1) взято σ^2.

3. Решение задачи 2

Пусть $n(t)=\max\big\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}:\tau_i\le t\big\}$.

Рассмотрим следующие множества:

$$F_i(\rho_i;\,\tau_i,\tau_{i+1})=\Bigg\{x\in L\colon x=\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{(\tau_n-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(\cdot)\in U[\tau_i,\,\tau_{i+1}]\Bigg\},\quad i=0,1,\ldots,n(t)-1,$$

и

$$F_{n(t)}(\rho_{n(t)};\tau_{n(t)},t)=\Bigg\{x\in L\colon x=\int\limits_{\tau_{n(t)}}^{t}\pi e^{(t-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(\cdot)\in U[\tau_{n(t)},\,t]\Bigg\};$$

здесь через $U[\tau_i,\,\tau_{i+1}]$ обозначено множество всех измеримых на $[\tau_i,\,\tau_{i+1}]$ функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\|u(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\le\rho_i^2,$$

а через $U[\tau_{n(t)},\, t]$ — множество всех измеримых на $[\tau_{n(t)},\, t]$ функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_{n(t)}}^{t} \|u(\vartheta)\|^2\, d\vartheta \le \rho_{n(t)}^2,$$

где $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n(t)}$ — некоторый набор неотрицательных чисел таких, что $\rho_0^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_{n(t)}^2 \le \rho^2$. Как в работе [1], используя множества $F_i(\cdot)$, построим множества

$$W_i(t, v) = F_i(\rho_i; \tau_i, \tau_{i+1}) - \pi e^{(t-\tau_i)A} v, \quad i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1,$$

$$W_{n(t)}(t, v) = F_{n(t)}(\rho_{n(t)}; \tau_{n(t)}, t) - \pi e^{(t-\tau_{n(t)})A} v,$$

$$W_i(t) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, v) = F_i(\rho_i; \tau_i, \tau_{i+1}) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_i)A} V, \quad i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1,$$

$$W_{n(t)}(t) = \bigcap_{v \in V} W_{n(t)}(t, v) = F_{n(t)}(\rho_{n(t)}; \tau_{n(t)}, t) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_{n(t)})A} V.$$

Так как в рассматриваемой игре преследующий игрок имеет ограниченный ресурс (на управление наложено интегральное ограничение), то он должен как-то распределить свой ресурс по отрезкам $[\tau_i,\, \tau_{i+1}]$. В этом смысле следующее предположение отличается от условия 3.1 работы [1].

Предположение 3.1. *Пусть для некоторых неотрицательных чисел $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n(t)}$ таких, что $\rho_0^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_{n(t)}^2 \le \rho^2$, множество $\mathfrak{T} = \{t \ge 0\colon W_i(t) \ne \varnothing,\, i = 0, 1, \ldots, n(t)\} \ne \varnothing$.*

Если выполнено предположение 3.1, то для каждого $t \in \mathfrak{T}$ существуют элементы $w_i(t) \in W_i(t)$, $i = 0, \ldots, n(t)$. Через $w = w(t) = \{w_i(t)\}_{i=0}^{n(t)}$ обозначим некоторый набор, состоящий из элементов $w_i(t)$, $i = 0, \ldots, n(t)$. Для некоторого фиксированного набора w введем следующее множество

$$T(z, w) = \Big\{ t \in \mathfrak{T} : \sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v \in V} \alpha_i(t, z, v, w) = 1 \Big\},$$

где функции $\alpha_i(\cdot)$, $i = 0, \ldots, n(t)$ и остальные построения, с несущественными изменениями, определяются точно так же, как в разд. 3 работы [1]. Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном $t \in \mathfrak{T}$, то положим $T(z, w) = \varnothing$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1, $\tau_i \notin \mathfrak{T}$ *для всех* $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, *множество M выпукло и множество $T(z_0, w)$ непусто для начального положения $z_0 \notin M^*$ и некоторого набора w. Тогда для любого $T \in T(z_0, w)$ траектория системы* (1.1) *может быть приведена из начального положения z_0 на терминальное множество M^* в момент времени T.*

Доказательство теоремы проводится без каких-либо существенных изменений по схеме доказательства теоремы 3.1 работы [1].

4. Примеры

4.1. Рассматривается управляемый объект с движением

$$\dot{z} = \lambda z + u - v, \tag{4.1}$$

где λ — действительное отрицательное число, z, u, $v \in \mathbb{R}^m$. Терминальным множеством является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$ и $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, π —

тождественный(единичный) оператор. Так как $A = \lambda E$, где E — единичная матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{\lambda t}E$.

В этом примере рассматривается задача 1 при $U = \rho S$, где ρ — неотрицательное число, S — единичный шар с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с периодом P, т. е. $\tau_i = iP$. В этом случае множество $G_i(\cdot)$ из разд. 2 имеет вид

$$G_i(n,\,(i-1)P, iP) = e^{\lambda nP}\sqrt{\frac{e^{-2\lambda(i-1)P} - e^{-2\lambda iP}}{2\lambda}}\,\sigma S = \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{\lambda(nP-iP)}\sigma S.$$

Тогда имеем

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP-iP)}\rho S \underline{*}\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{\lambda(nP-iP)}\sigma S \text{ для всех } i, n, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, предположение 2.1 выполнено, если справедливо неравенство $\rho \geq \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sigma$. В этом случае получим

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP-iP)}\Big(\rho - \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sigma\Big)S, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $W_i(n)$ содержат нулевой вектор при всех i, n, положим $w_i(n) = 0$. Далее, также предполагается, что $z \neq 0$. Тогда имеем

$$\xi(n, z, w) = e^{\lambda nP}z.$$

Если ввести обозначение

$$I_i = \int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-\lambda\vartheta}v(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{4.2}$$

где измеримая функция $v(\vartheta)$, $(i-1)P \leq \vartheta \leq iP$, удовлетворяет условию $\displaystyle\int_{(i-1)P}^{iP} \|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta \leq \sigma_i^2$, $\sigma_i \in [0, \sigma]$, то имеем

$$\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup\Big\{\alpha \geq 0 : -\alpha e^{\lambda nP}z \in e^{\lambda(nP-iP)}\rho S - e^{\lambda nP}I_i\Big\}.$$

Здесь легко заметить, что $I_i \in r_iS$, где $r_i = \sigma_i\sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}e^{-\lambda iP}$, $\sigma_i \in [0, \sigma]$. Функции $\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w)$ могут быть найдены из следующего уравнения:

$$\|\alpha z - I_i\| = e^{-\lambda iP}\rho.$$

Решая его, получим

$$\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{(z, I_i) + \sqrt{(z, I_i)^2 + \|z\|^2(e^{-2\lambda iP}\rho^2 - \|I_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Минимум $\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w)$ по I_i достигается при $I_i = -\sqrt{\displaystyle\int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}\,\sigma_i\dfrac{z}{\|z\|}$, где $\sigma_i \in [0, \sigma]$. Отсюда легко заметить, что последнее значение I_i получается из (4.2) при $v(\tau) = \psi(\tau)$, $(i+1)P \leq \tau \leq iP$, где

$$\psi(\tau) = -\frac{e^{-\lambda\tau}\sigma_i}{\sqrt{\int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}}\frac{z}{\|z\|},$$

почти для всех τ, $\tau \in [(i-1)P, iP]$. Так как

$$\inf_{\|v(\cdot)\| \le \sigma_i} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{\rho e^{-\lambda iP} - \sigma_i \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}}\, e^{-\lambda iP}}{\|z\|},$$

то

$$\inf_{v(\cdot) \in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \inf_{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \le \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho e^{-\lambda iP} - \sigma_i \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}} e^{-\lambda iP}}{\|z\|}$$

$$= \frac{\rho}{\|z\|} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda iP} - \frac{1}{\|z\|} \sqrt{\frac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}} \sup_{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \le \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e^{-\lambda iP}.$$

Далее имеем

$$\inf_{v(\cdot) \in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{\rho}{\|z\|} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda iP} - \frac{\sigma}{\|z\|} \sqrt{\frac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e^{-2\lambda iP}}.$$

Поэтому если ввести обозначение $q = e^{-\lambda P} > 1$, то после элементарных вычислений получим

$$\inf_{v(\cdot) \in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{1}{\|z\|} \left(\rho\, \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} - \sigma \sqrt{\frac{1 - q^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}} \right).$$

Покажем, что при любом фиксированном векторе $z \neq 0$ неравенство

$$\frac{1}{\|z\|} \left(\rho\, \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} - \sigma \sqrt{\frac{1 - q^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}} \right) \ge 1 \tag{4.3}$$

имеет решение относительно n. Выражение в скобках левой части неравенства (4.3) записываем в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1}} \left(\rho\, \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^{2n} - 1}} - \sigma \sqrt{\frac{1 - q^2}{2\lambda}} \right). \tag{4.4}$$

Учитывая неравенство $\rho \ge \sqrt{\dfrac{1 - q^2}{2\lambda}} \dfrac{\sigma}{q}$, получим, что выражение в скобках (4.4) не меньше, чем

$$\rho q \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^{2n} - 1}} - 1 \right).$$

Можно показать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выражение в скобках неотрицательно, возрастает по n и его предельным значением при $n \to \infty$ является

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^{2n} - 1}} - 1 \to \sqrt{\frac{q + 1}{q - 1}} - 1.$$

Из всех сделанных выкладок следует, что неравенство (4.3) при произвольном фиксированном $z = z_0 \neq 0$ имеет решение относительно натурального числа n. Наименьшее из них обозначим через $N(z_0, w)$.

Таким образом, по теореме 2.1 траектория системы (4.1), выходящая из произвольного начального положения $z = z_0 \neq 0$, может быть приведена в терминальное множество $M = \{0\}$ не позднее момента времени $\tau_{N(z_0,w)} = N(z_0, w)P$.

4.2. Рассмотрим управляемый объект с простым движением

$$\dot{z} = u - v, \tag{4.5}$$

где z, u, $v \in \mathbb{R}^m$. Терминальным множеством является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$ и $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, π — тождественный оператор. Так как $A = \widetilde{0}$, где $\widetilde{0}$ — нулевая матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = E$ — единичная матрица.

В этом примере рассматривается задача 2. Управлениями преследователя являются измеримые функции $u(t)$, $t \geq 0$, с интегральным ограничением, а управления убегающего имеют импульсный характер, при $V = \sigma S$, где σ — неотрицательное число, S — единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что $\tau_i = iP$, где P — некоторый положительный период.

Рассмотрим взаимно исключающиеся два случая: I) $P > \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$ и II) $P \leq \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$.

Рассмотрим случай I. Покажем, что вышеуказанный способ выделяет множество точек пространства $\mathbb{R}^m$, из которых можно завершить преследование, а из точек дополнения этого множества нельзя завершить преследование.

Пусть n^* — такое неотрицательное целое число, которое удовлетворяет следующим условиям: $\sqrt{\dfrac{P}{n^*+1}}\,\rho > \sigma$, $\sqrt{\dfrac{P}{n^*+2}}\,\rho \leq \sigma$. Условие $P > \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$ обеспечивает существование такого числа.

Выберем некоторый k, $k \in \{0, \ldots, n^*\}$. Рассмотрим такие моменты времени $t > 0$, чтобы $n(t) = k$. Понятно, что такими t являются числа из полуинтервала $[kP,\,(k+1)P)$.

Пусть преследующий игрок на отрезках времени $[0, P)$, $[P, 2P), \ldots, [(k-1)P,\, kP)$, $[kP,\, t]$ использует ресурсы $\rho_0^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2$, $\rho_1^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2, \ldots, \rho_{k-1}^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2$, $\rho_k^2 = \dfrac{t-kP}{t}\rho^2$ соответственно. Легко заметить, что $\rho_0^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_{k-1}^2 + \rho_k^2 = \rho^2$.

При $i = 0, 1, \ldots, k$ для множества $F_i(\cdot)$ из разд. 2 имеем

$$F_i(\rho_i; iP, (i+1)P) = \sqrt{P}\,\rho_i S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad F_k(\rho_k; kP, t) = \sqrt{t-kP}\,\rho_k S.$$

Значит,

$$W_i(t, v) = F_i(\rho_i,\, iP, (i+1)P) - v, \quad W_i(t) = F_i(\rho_i,\, iP, (i+1)P)\underline{*}\sigma S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и

$$W_k(t, v) = F_k(\rho_k,\, kP, t) - v, \quad W_k(t) = F_k(\rho_k,\, kP, t)\underline{*}\sigma S.$$

Так как

$$W_i(t) = \sqrt{P}\,\rho_i S\underline{*}\sigma S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad W_k(t) = \sqrt{t-kP}\,\rho_k S\underline{*}\sigma S,$$

то, если $\sqrt{P}\,\rho_i \geq \sigma$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $\sqrt{t-kP}\,\rho_k \geq \sigma$ или, что то же самое по выбору чисел ρ_i, если $\dfrac{P}{\sqrt{t}}\rho \geq \sigma$, $\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\rho \geq \sigma$, предположение 3.1 будет выполнено. В силу того что $kP \leq t < (k+1)P$, достаточным условием выполнения предположения 3.1 является условие $\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\rho \geq \sigma$. Выбор числа k обеспечивает существования такого $t_k \in (kP,\,(k+1)P)$, что имеет место равенство $\dfrac{t_k-kP}{\sqrt{t_k}}\rho = \sigma$. В этом случае получим $W_i(t) = \Big(\dfrac{P}{\sqrt{t}}\rho - \sigma\Big)S$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $W_k(t) = \Big(\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\rho - \sigma\Big)S$ при $t_k \leq t < (k+1)P$.

Так как $W_i(t)$, $t_k \leq t < (k+1)P$ содержат нулевой вектор при всех i, $i = 0, 1, \ldots, k$, то для всех i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $t_k \leq t < (k+1)P$ положим $w_i(t) = 0$. Тогда получим

$$\xi(t, z, w) = z, \quad t_k \leq t < (k+1)P.$$

Таким образом, имеем

$$\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \sup\Big\{\alpha \ge 0 : -\alpha z \in \frac{P}{\sqrt{t}}\,\rho\, S - v\Big\}, \quad i = 0,1,\dots,k-1,$$

$$\widetilde{\alpha}_k(t,z,v,w) = \sup\Big\{\alpha \ge 0 : -\alpha z \in \frac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho\, S - v\Big\}, \quad t_k \le t < (k+1)P.$$

Функции $\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w)$, $i = 0,1,\dots,k-1$, являются решениями уравнения

$$\|v - \alpha z\| = \frac{P}{\sqrt{t}}\,\rho,$$

которые легко определить:

$$\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{(z,v) + \sqrt{(z,v)^2 + \|z\|^2\Big(\dfrac{P^2}{t}\,\rho^2 - \|v\|^2\Big)}}{\|z\|^2}, \quad i = 0,1,\dots,k-1.$$

Отсюда найдем

$$\inf_{\|v\|\le\sigma} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{\dfrac{P}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma}{\|z\|}, \quad i = 0,1,\dots,k-1,$$

причем каждый из инфимумов достигается на одном и том же векторе $v = -\sigma\dfrac{z}{\|z\|}$.

Аналогичным образом находим

$$\inf_{\|v\|\le\sigma} \widetilde{\alpha}_k(t,z,v,w) = \frac{\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma}{\|z\|}.$$

Значит,

$$\inf_{\|v\|\le\sigma} \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \sum_{i=0}^{k} \inf_{\|v\|\le\sigma} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{\sqrt{t}\,\rho - (k+1)\sigma}{\|z\|}, \quad t_k \le t < (k+1)P.$$

Следовательно, для данного $z \ne 0$ неравенство $\dfrac{\sqrt{t}\,\rho - (k+1)\sigma}{\|z\|} \ge 1$ можно обеспечить для некоторого t, $t \in [t_k,\,(k+1)P)$, если z удовлетворяет условию $\|z\| < \sqrt{(k+1)P}\,\rho - (k+1)\sigma$.

Таким образом, получим следующий интервал:

$$I(n^*) = \Big(0,\, \max\big(\sqrt{P}\,\rho - \sigma,\, \sqrt{2P}\,\rho - 2\sigma, \dots, \sqrt{(n^*+1)P}\,\rho - (n^*+1)\sigma\big)\Big).$$

В данном примере $\mathfrak{T} = \bigcup\limits_{i=0}^{n^*} \big[t_i,\,(i+1)P\big)$ и очевидно, что $\mathfrak{T} \ne \varnothing$, $ip \notin \mathfrak{T}$, $i = 0,\dots,n^*$. При $\|z_0\| \in I(n^*)$ имеем $T(z_0,w) = \Big[\Big(\dfrac{\|z_0\| + (i+1)\sigma}{\rho}\Big)^2,\,(i+1)P\Big) \ne \varnothing$ для соответствующего i, $i \in \{0,\dots,n^*\}$. Поэтому из теоремы 3.1 следует, что если начальная точка $z_0 \ne 0$ такая, что ее норма принадлежит интервалу $I(n^*)$: $\|z_0\| \in I(n^*)$, то из этой точки можно завершить преследование за время $T \in T(z_0,w)$.

З а м е ч а н и е 4.1. Можно показать, что если норма начальной точки $z_0 \ne 0$ не принадлежит интервалу $I(n^*)$, то из этой точки нельзя завершить преследование. При этом убегающему игроку предлагается управление вида $v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\delta(t - iP)$, с $v_i = -\sigma\frac{z_0}{\|z_0\|}$.

Теперь рассмотрим случай II: $P \leq \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$. Утверждается, что из произвольной точки $z \in \mathbb{R}^m$, $z \neq 0$ невозможно завершить преследование. Пусть $z_0 \in \mathbb{R}^m$, $z_0 \neq 0$, и $t > 0$ — произвольный момент времени.

Убегающему игроку предлагается управление вида

$$v(t) = \sum_{i=0}^{n(t)} v_i \delta(t - iP), \text{ где } v_i = -\sigma \frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Если преследователь использовал допустимое управление $u(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq t$, то для соответствующего решения уравнения (4.5) имеем

$$z(t) = z_0 + \int_0^t u(\vartheta) d\vartheta + \sum_{i=0}^{n(t)} \sigma \frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|z(t)\| \geq \left\| z_0 + (n(t)+1)\, \sigma \, \frac{z_0}{\|z_0\|} \right\| - \left\| \int_0^t u(\vartheta) d\vartheta \right\| \geq \|z_0\| + (n(t)+1)\sigma - \sqrt{t}\, \rho.$$

Но $\|z_0\| \neq 0$ и $t < (n(t)+1)P$, поэтому из последнего неравенства имеем

$$\|z(t)\| > \sqrt{n(t)+1}\, \rho \Big(\sqrt{n(t)+1}\, \frac{\sigma}{\rho} - \sqrt{P} \Big),$$

так как $\sqrt{P} \leq \dfrac{\sigma}{\rho} \leq \sqrt{n(t)+1}\, \dfrac{\sigma}{\rho}$. Значит, $\|z(t)\| > 0$. Это неравенство означает, что из точки $z_0 \neq 0$ нельзя завершить преследование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 212–224.
2. **Чикрий А.А., Белоусов А.А.** О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
3. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
6. **Ухоботов В.И., Троицкий А.А.** Об одной задаче импульсного преследования // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, № 2. С. 79–87.
7. **Ухоботов В.И.** Выпуклая игровая задача импульсного преследования второго порядка // XII Всероссийское совещание по проблемам управления: сб. тр. Москва, 2014. С. 2089–2095.
8. **Котлячкова Е.В.** К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 1, № 45. С. 106–113.
9. **Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц.** Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 324–333.
10. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Поступила 19.10.2015

Тухтасинов Муминжон
д-р физ.-мат. наук, профессор
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: mumin51@mail.ru