ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.518.8

ОДНОСТОРОННЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[1]

А. Ю. Торгашова

В данной статье приведено решение задачи одностороннего приближения в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала $(-\sqrt{3/5}\,, 2/5)$ алгебраическими многочленами пятой степени. Построена соответствующая квадратурная формула с положительными весами.

Ключевые слова: алгебраические многочлены, одностороннее приближение, характеристическая функция интервала.

A. Yu. Torgashova. One-sided integral approximation of the characteristic function of an interval by algebraic polynomials.

We give a solution to the problem of one-sided approximation in $L(-1,1)$ of the characteristic function of the interval $(-\sqrt{3/5}\,, 2/5)$ by fifth-degree algebraic polynomials. The corresponding quadrature formula with positive weights is constructed.

Keywords: algebraic polynomials, one-sided approximation, characteristic function of an interval,

MSC: 41A10, 41A29
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-265-272

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Пусть $L = L(-1,1)$ есть пространство вещественнозначных суммируемых на $(-1,1)$ функций f, наделенное нормой

$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

При целом неотрицательном m обозначим через $\mathscr{P}_m$ множество алгебраических многочленов

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \tag{1.1}$$

степени не выше m с вещественными коэффициентами. Для многочленов $p \in \mathscr{P}_m$ наряду с представлением (1.1) будем использовать представление

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \pi_k(x) \tag{1.2}$$

в виде линейной комбинации многочленов Лежандра $\{\pi_k\}_{k\geq 0}$, ортогональных на $(-1,1)$ с единичным весом (см. например, [4, гл. IV]).

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

В дальнейшем для пары функций f и g, определенных на отрезке $[-1,1]$, неравенство $f \le g$ означает, что $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [-1,1]$. Функции f, определенной, ограниченной и измеримой на отрезке $[-1,1]$, сопоставим множества

$$\mathscr{P}_m^-(f) = \{p \in \mathscr{P}_m \colon p \le f\}, \quad \mathscr{P}_m^+(f) = \{p \in \mathscr{P}_m \colon p \ge f\}$$

многочленов из $\mathscr{P}_m$, графики которых лежат соответственно под и над графиком функции f. Рассмотрим величины наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве L функции f множеством $\mathscr{P}_m$:

$$E_m^-(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathscr{P}_m^-(f)\}, \quad E_m^+(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathscr{P}_m^+(f)\}. \tag{1.3}$$

Многочлены, реализующие точные нижние грани в (1.3), называют *многочленами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции* f *снизу* и, соответственно, *сверху* или просто *экстремальными многочленами*.

Задачам (1.3) можно дать следующую интерпретацию. Если $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$, то имеем

$$\|f-p\| = \int_{-1}^{1} |f(x)-p(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} (f(x)-p(x))\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} p(x)\,dx.$$

Поэтому

$$E_m^-(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_m^-(f), \tag{1.4}$$

где

$$I_m^-(f) = \sup\Big\{\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \colon p \in \mathscr{P}_m;\ p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]\Big\}. \tag{1.5}$$

Аналогично $E_m^+(f) = I_m^+(f) - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, где

$$I_m^+(f) = \inf\Big\{\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \colon p \in \mathscr{P}_m;\ p(x) \ge f(x),\ x \in [-1,1]\Big\}. \tag{1.6}$$

Задачи (1.5) и (1.6) являются задачами бесконечномерного линейного программирования: в них число неизвестных — коэффициентов многочлена в разложении (1.1) или (1.2) конечное, а число ограничений бесконечное.

Пусть a, b — два вещественных числа, удовлетворяющих условию $-1 < a < b \le 1$. С этого момента в качестве приближаемой функции будем рассматривать характеристическую функцию $\mathbf{1}_J$ интервала $J = (a,b)$, если $b < 1$, и полуинтервала $J = (a,1]$, если $b = 1$; эта функция определена соотношением

$$\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1,1] \setminus J. \end{cases} \tag{1.7}$$

Решению задачи (1.3) для функции (1.7) при тех или иных условиях на параметры a, b посвящено большое число статей, см. работы [1; 5; 7] и приведенную в них библиографию.

В [1] дано решение первой задачи (1.3) в предположении, что $b = 1$, $a \in (-1,1)$. В [1] отмечено, что предложенная авторами методика при $b < 1$ уже неприменима. Это было проиллюстрировано для

$$a = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.774597\ldots, \quad b = \frac{2}{5} \tag{1.8}$$

при $m = 5$; отметим, что выбранное значение параметра a является узлом трехточечной квадратурной формулы Гаусса.

В данной статье будет приведено решение первой задачи (1.3) для функции (1.7) в этом конкретном случае, т. е. для значений параметров (1.8) при $m = 5$.

1.2. Применение квадратурных формул с неотрицательными весами

Важным инструментом исследования задач (1.3) или, то же самое, (1.5), (1.6) являются квадратурные формулы с положительными весами, точные на множестве $\mathscr{P}_m$ алгебраических многочленов. А именно, справедливо следующее утверждение [6, доказательство теоремы 2] (см. также [2, теорема 1.7.5]).

Теорема A. *Предположим, что на множестве $\mathscr{P}_m$ имеет место квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathscr{P}_m. \tag{1.9}$$

с узлами $-1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_M \le 1$ и положительными весами: $\lambda_k > 0,\ 1 \le k \le M$. Тогда для любой ограниченной и измеримой функции f справедливы оценки

$$I_m^-(f) \le \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k); \quad I_m^+(f) \ge \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k). \tag{1.10}$$

Доказательство. Для многочлена $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ имеет место формула (1.9). По предположению все ее узлы различны между собой и лежат на отрезке $[-1,1]$, а веса положительные. Поэтому свойство $p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]$, влечет оценку

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k) \le \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k),$$

что дает первое неравенство (1.10). Аналогично обосновывается и второе неравенство. □

Доказательство теоремы приведено здесь для того, чтобы иметь возможность обсудить условия, при которых неравенства (1.10) обратятся в равенства. Достаточно сделать это для первого неравенства. Из доказательства теоремы A видно, что на многочлене $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ первое неравенство (1.10) обратится в равенство в том и только том случае, если $p(x_k) = f(x_k),\ 1 \le k \le M$. Многочлен p удовлетворяет условию $p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]$. Поэтому, если узел x_k не является концевым, т.е. $x_k \in (-1,1)$, и в точке x_k функция f дифференцируема, то должно выполняться также и свойство $p'(x_k) = f'(x_k)$. Итак, если многочлен $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ обращает первое неравенство (1.10) в равенство, то он обладает свойствами:

1) многочлен интерполирует функцию во всех узлах $x_k,\ 1 \le k \le M$;

2) во всех внутренних узлах $x_k \in (-1,1)$, в которых функция f дифференцируема, интерполяция является эрмитовой, а точнее, наряду с интерполяцией функции осуществляется еще и интерполяция первой производной: $p'(x_k) = f'(x_k)$.

2. Одностороннее приближение снизу характеристической функции интервала $\left(-\sqrt{3/5}\,, 2/5\right)$ многочленами пятой степени

В этом разделе будут изучаться величины $E_m^-(\mathbf{1_J})$ и $I_m^-(\mathbf{1_J})$ для $\mathbf{J} = \left(-\sqrt{3/5}\,, 2/5\right)$ при $m = 5$. Условимся использовать для них обозначения $\mathbf{E}_5^-$ и $\mathbf{I}_5^-$ соответственно. Ниже будут построены квадратурная формула с неотрицательными весами и многочлен $f_5 \in \mathscr{P}_5^-(\mathbf{1_J})$, которые дадут совпадающие между собой двусторонние оценки этих величин, а значит и их значения.

2.1. Численный эксперимент

С целью выработки гипотезы относительно вида экстремального многочлена и соответствующей квадратурной формулы было проведено приближенное решение задачи (1.5) для функции $\mathbf{1_J}$ при $m = 5$. Оказалось удобным использовать разложение (1.2) многочленов $p \in \mathscr{P}_m$. Поскольку $\pi_0 \equiv 1$, то из условия ортогональности многочленов Лежандра следует, что $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2c_0$. Поэтому

$$\mathbf{I}_5^- = \sup\Big\{2c_0\colon \sum_{k=0}^{5} c_k\pi_k(x) \le \mathbf{1_J}(x),\ x\in[-1,1]\Big\}. \tag{2.1}$$

Заменим непрерывные ограничения в (2.1) ограничениями на сетке $\{x_j = 0.01j\}_{j=-100}^{100}$; в результате получим конечномерную задачу линейного программирования

$$\sup\Big\{2c_0\colon \sum_{k=0}^{5} c_k\pi_k(x_j) \le \mathbf{1_J}(x_j),\ x_j = 0.01j,\ -100\le j\le 100\Big\}. \tag{2.2}$$

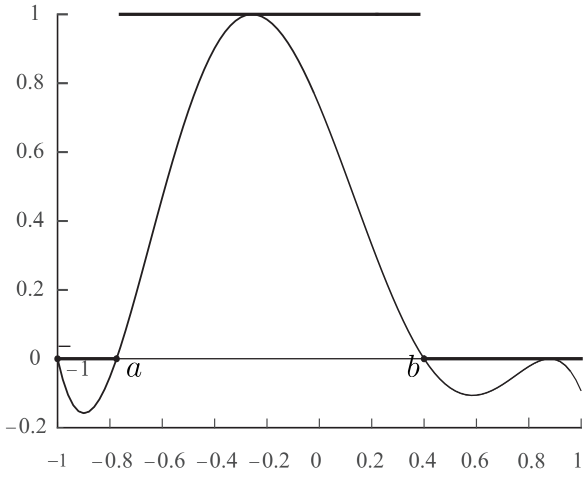
Решение задачи (2.2) с помощью пакета MATLAB дает следующие примерные значения коэффициентов: $c_0 = 0.318986$; $c_1 = 0.238046$; $c_2 = 0.629379$; $c_3 = 0.577987$; $c_4 = 0.272232$; $c_5 = -0.378100$. На рисунке изображены графики характеристической функции $\mathbf{1_J}$ и найденного многочлена.

В результате этого эксперимента сформировалась гипотеза, что для экстремального многочлена задачи (2.1) точки -1, $a = -\sqrt{3/5}$ и $b = 2/5$ являются простыми нулями, этот многочлен имеет двойной ноль в интервале $(2/5, 1)$ и достигает максимального значения на отрезке $[-1,1]$, равного 1, в некоторой точке интервала $\big(-\sqrt{3/5}\,, 0\big)$. Как следствие, соответствующая задаче (2.1) квадратурная формула (1.9) должна иметь вид

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell p(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k p(x_k), \quad p\in\mathscr{P}_5, \tag{2.3}$$

с узлами

$$a_1 = -1, \quad a_2 = a = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad a_3 = b = \frac{2}{5}, \quad x_1 \in \Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\,, 0\Big), \quad x_2 \in \Big(\frac{2}{5}\,, 1\Big). \tag{2.4}$$



Рисунок

2.2. Построение точек x_1, x_2

Осуществим теперь точный выбор узлов x_1, x_2. Исходя из описанных в доказательстве и обсуждении теоремы A свойств экстремального многочлена задачи (2.1) и соответствующей экстремальной квадратурной формулы (2.3), наложим на узлы x_1, x_2 следующие три условия.

(1) Выполнены ограничения (2.4).

(2) Точка x_1 выбирается из условия, что квадратурная формула с фиксированными узлами a_1, a_2, a_3, x_2 и свободным узлом x_1 имела бы максимальный, в данном случае, пятый, алгебраический порядок точности. Это свойство означает, что должно быть выполнено условие ортогональности (см., например, [3, гл. 9, § 1])

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 0, \quad \omega(x) = (x-a_1)(x-x_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-x_2). \tag{2.5}$$

(3) Потребуем, чтобы производная многочлена $\overline{p}_5(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-x_2)^2$ в точке x_1 была равна нулю:

$$\overline{p}_5{}'(x_1) = 0. \tag{2.6}$$

При сделанных предположениях многочлен $\overline{p}_5$ после домножения на (отрицательный) нормирующий множитель окажется экстремальным.

Условия (2.5) и (2.6) образуют систему двух полиномиальных уравнений относительно двух неизвестных x_1, x_2:

$$\frac{6}{25} + \frac{2}{75}\sqrt{15} - \frac{2}{15}\,x_1 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_1 - \frac{2}{15}\,x_2 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_2 + \frac{2}{5}\,x_1\,x_2 - \frac{2}{75}\sqrt{15}\,x_1\,x_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} &\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 + \bigl(x_1 + 1\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 \\ &+ \bigl(x_1 + 1\bigr)\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 + \bigl(2x_1 + 2\bigr)\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Первое из них можно записать в виде явного выражения x_1 через x_2:

$$x_1 = W(x_2), \quad \text{где} \quad W(z) = -\frac{-9 - \sqrt{15} + 5\,z + 3\sqrt{15}\,z}{5 + 3\sqrt{15} - 15\,z + \sqrt{15}\,z}. \tag{2.8}$$

Подставив это выражение в (2.7), с помощью элементарных преобразований заключаем, что x_2 является корнем многочлена шестой степени

$$\begin{aligned} F(z) = 190\,425 + 49\,113\,\sqrt{15} - 1\,342\,170\,z - 343\,390\,\sqrt{15}\,z + 3\,556\,445\,z^2 + 939\,333\,\sqrt{15}\,z^2 \\ - 4\,793\,700\,z^3 - 1\,178\,700\,\sqrt{15}\,z^3 + 2\,885\,135\,z^4 + 832\,095\,\sqrt{15}\,z^4 \\ - 1\,051\,050\,z^5 - 209\,230\,\sqrt{15}\,z^5 + 74\,475\,z^6 + 34\,515\,\sqrt{15}\,z^6. \end{aligned}$$

Многочлен F разлагается на произведение двух многочленов второй и четвертой степени:

$$\begin{aligned} F(z) = G(z)H(z), \quad G(z) = 9 + \sqrt{15} - 10\,z - 6\,\sqrt{15}\,z + 15\,z^2 - \sqrt{15}\,z^2, \\ H(z) = 14\,805 + 3\,812\,\sqrt{15} - 66\,860\,z - 16\,620\,\sqrt{15}\,z + 92\,430\,z^2 + 26\,352\,\sqrt{15}\,z^2 \\ - 60\,980\,z^3 - 13\,020\,\sqrt{15}\,z^3 + 7\,785\,z^4 + 2\,820\,\sqrt{15}\,z^4. \end{aligned}$$

Все шесть корней многочлена F вещественные и простые. В этом можно убедиться разными способами. Многочлены G и H имеют вторую и четвертую степень, поэтому их корни можно выписать точно (в радикалах). Корни многочлена G имеет следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} + \frac{5}{21}\sqrt{15} - \frac{2}{105}\sqrt{1\,275 + 435\,\sqrt{15}} = 0.457309\ldots\,, \\ \frac{4}{7} + \frac{5}{21}\sqrt{15} + \frac{2}{105}\sqrt{1\,275 + 435\,\sqrt{15}} = 2.529825\ldots\,. \end{aligned}$$

Корни же многочлена H имеют весьма громоздкий вид. Мы локализуем эти корни с достаточной для дальнейшего точностью. Расчеты на ПК дают приближенные значения корней 0.484782, 0.880252, 1.044674, 3.545673. Для нас представляет интерес второй корень многочлена H, этот корень мы локализуем довольно точно. Рассмотрим точки

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0.5, \quad \underline{z_2} = 0.88, \quad \overline{z_2} = 0.89, \quad \underline{z_3} = 1, \quad \overline{z_3} = 2, \quad z_4 = 4.$$

Имеем

$$H(0) = 14\,805 + 3\,812\sqrt{15} > 0, \quad H(0.5) = \frac{-42\,455 + 10\,220\sqrt{15}}{16} < 0,$$
$$H(0.88) = \frac{-729\,807\,983 + 188\,419\,084\sqrt{15}}{78\,125} < 0,$$
$$H(0.89) = \frac{-479\,556\,158 + 124\,212\,701\sqrt{15}}{50\,000} > 0,$$
$$H(1) = -12\,820 + 3\,344\sqrt{15} > 0, \quad H(2) = -112\,475 + 16\,940\sqrt{15} < 0,$$
$$H(4) = -683\,515 + 247\,604\sqrt{15} > 0.$$

Отсюда видно, что многочлен H имеет четыре простых корня $\{\xi_k\}_{k=1}^4$ со свойствами $\xi_1 \in (0, 0.5)$, $\xi_2 \in (0.88, 0.89)$, $\xi_3 \in (1, 2)$, $\xi_4 \in (2, 4)$.

В качестве x_2 возьмем корень ξ_2 многочлена H. Имеем

$$x_2 \in (0.88, 0.89). \tag{2.9}$$

Как следует из приведенных только что рассуждений, x_2 — единственный корень многочлена H, а на самом деле, и многочлена F на отрезке $[0.5, 1]$.

Функция W, определенная в (2.8), убывает на полуоси $z \in (-\infty, Z)$, $Z = \dfrac{5\sqrt{15} + 12}{21} > 1$. Поэтому

$$x_1 = W(x_2) \in \big(W(0.89), W(0.88)\big), \tag{2.10}$$

при этом

$$W(0.89) = \frac{3\,755\sqrt{15} - 59\,452}{157\,259} = -0.285573\ldots, \quad W(0.88) = \frac{25\sqrt{15} - 328}{901} = -0.256576\ldots.$$

Наконец, отметим, что вычисления на ПК дают следующие значения:

$$x_1 = -0.257296880593181714\ldots, \quad x_2 = 0.880252451887707 99\ldots.$$

2.3. Исследование экстремальной квадратуры

Рассмотрим интерполяционную квадратурную формулу (см., например, [3, гл. 6, § 1])

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell f(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k f(x_k), \tag{2.11}$$

построенную по узлам (2.4) в предположении, что точки x_1, x_2 выбраны на предыдущем этапе рассуждений. В соответствии с выбором точек x_1, x_2, формула (2.11) точна на множестве $\mathscr{P}_5$ многочленов пятой степени. Коэффициенты формулы (2.11) строятся с помощью фундаментальных многочленов интерполяционного процесса Лагранжа по узлам квадратурной формулы; в частности,

$$B_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{(x - x_1)\omega'(x_1)}\,dx, \quad \omega(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - x_1)(x - x_2).$$

Лемма. *Коэффициенты квадратурной формулы* (2.11) *положительные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Положительность коэффициента* A_1. При обосновании этого факта будет использоваться квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} A_{3,k} f(x_{3,k}), \quad f \in \mathscr{P}_5, \tag{2.12}$$

с тремя узлами $\{x_{3,k}\}_{k=1}^{3}$. Узлы этой формулы являются корнями многочлена Лежандра третьей степени [3, гл. 7, § 2] и имеют следующие значения (см., например, [4, гл. IV, § 1]):

$$x_{3,3} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_{3,2} = 0, \quad x_{3,1} = -x_{3,3} = -\sqrt{\frac{3}{5}} = a_2.$$

Известно, что коэффициенты формулы (2.12) положительные [3, гл. 7, § 1, теорема 3].

Рассмотрим многочлен $g_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - a_2)(x - a_3)x$. Для этого многочлена точны формулы (2.11) и (2.12). Применив эти формулы, получим $\int_{-1}^{1} g_1(x)\,dx = A_1\, g_1(a_1) = A_{3,3}\, g_1(x_{3,3})$. Поскольку $a_1 = -1 < a_2 < x_1 < 0 < a_3 < x_2 < 1$, то $g_1(a_1) < 0$. Имеем $a_3 < x_{3,3} < x_2$ и, значит, $g_1(x_{3,3}) < 0$. Поэтому произведение $A_{3,3} g_1(x_{3,3})$, равное значению интеграла, также будет отрицательным. Следовательно, коэффициент A_1 является положительным.

Положительность коэффициентов A_3, B_1, B_2 проверяется аналогичным образом. Для доказательства необходимо воспользоваться соответственно многочленами

$$\begin{aligned} g_2(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - a_1)(x - a_2)x, \\ g_3(x) &= (x - x_2)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)x, \\ g_4(x) &= (x - x_1)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)x. \end{aligned}$$

Положительность коэффициента A_2. В данном случае воспользуемся многочленом четвертой степени $g(x) = (x - a_1)(x - x_1)(x - a_3)(x - x_2)$. Применив формулу (2.11), получаем

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = A_2 g(a_2). \tag{2.13}$$

Легко понять, что $a_1 = -1 < a_2 < x_1 < a_3 < x_2 < 1$, поэтому $g(a_2) < 0$. Покажем, что интеграл (2.13) отрицательный. Отсюда и будет следовать, что $A_2 > 0$.

Рассмотрим левую квадратуру Радо с фиксированным узлом -1 и двумя свободными узлами $\{x_{2,k}\}_{k=1}^{2}$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} f(x_{2,k}) + A_{2,3} f(-1), \quad f \in \mathscr{P}_4. \tag{2.14}$$

Узлы этой формулы находятся из условия соответствующей ортогональности [3, гл. 9, § 1, теорема 1] и равны

$$x_{2,1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{6} = -0.2898979\ldots, \quad x_{2,2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{6} = 0.68989794\ldots. \tag{2.15}$$

Коэффициенты квадратурной формулы (2.14) положительные [3, гл. 7, § 1, теорема 3].

Исходя из (2.15), (2.10) и (2.9), нетрудно убедиться, что

$$a_1 < x_{2,1} < x_1, \quad a_3 < x_{2,2} < x_2. \tag{2.16}$$

Неочевидным является лишь соотношение $x_{2,1} < x_1$. Для его обоснования достаточно проверить неравенство

$$x_{2,1} = \frac{1 - 5\sqrt{6}}{5} < W(0.89) = \frac{3\,755\sqrt{15} - 59\,452}{157\,259},$$

а это можно осуществить с помощью элементарных преобразований.

В силу (2.16) имеем $g(x_{2,1}) < 0$, $g(x_{2,2}) < 0$. Подставив многочлен g в формулу (2.14), получаем, что $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx < 0$. Тем самым доказана положительность коэффициента A_2. $\square$

2.4. Основной результат

Теорема. *Пусть* $m = 5$, $a = -\sqrt{3/5}$, $b = 2/5$. *Тогда*

$$I_m^-(f) = B_1, \quad E_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)}) = (b - a) - B_1. \tag{2.17}$$

При этом многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен пятой степени

$$p_5^*(x) = \frac{\overline{p}_5(x)}{\overline{p}_5(x_1)}, \quad \text{где} \quad \overline{p}_5(x) = (x+1)\big(x-a\big)\big(x-b\big)(x-x_2)^2,$$

который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,\,b)}$ *в узлах квадратурной формулы* (2.11).

Доказательство. С учетом выбора узлов x_1, x_2 нетрудно понять, что многочлен p_5^* удовлетворяет условию $p_5^* \le \mathbf{1}_{(a,b)}$. Этот многочлен дает оценку снизу для величины $I_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)})$. Согласно теореме А квадратурная формула (2.11) дает для величины $I_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)})$ оценку сверху, которая, как легко увидеть, совпадает с оценкой снизу. К тому же многочлен p_5^* является экстремальным. На многочлене p_5^* правая часть формулы (2.11) равна B_1. Следовательно, $I_m^-(f) = B_1$. Для обоснования второго равенства в (2.17) осталось применить (1.4). Теорема доказана. $\square$

Автор признателен своему научному руководителю М. В. Дейкаловой, профессорам В. В. Арестову и А. Г. Бабенко за постановку задачи и полезное обсуждение тематики и результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Дейкалова М.В., Ревес С.Д.** Односторонние интегральные приближения характеристических функций интервалов многочленами на отрезке с весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, вып. 4. С. 46–53.
2. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
3. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 328 с.
4. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
5. **Beckermann B., Bustamante J., Martinez-Cruz R., Quesada J.M.** Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa // Calcolo. 2014. Vol. 51, no. 2, P. 319–328.
6. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 2, no. 12. P. 139–164.
7. **Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 198. P. 10–23.

Торгашова Анастасия Юрьевна
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: anastasiya.torgashova@mail.ru

Поступила 29.04.2016