ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОМ РАДИКАЛЕ ГРУППЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОДСТАНОВОК[1]

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

В статье дано описание локально конечного радикала R группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ ограниченных подстановок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Найдена связь между вполне рассеянными подмножествами множества $\mathbb{N}$ и элементами из R.

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, вполне рассеянное множество, локально конечный радикал.

N. M. Suchkov, N. G. Suchkova. On the locally finite radical of the group of limited permutations.

We describe the locally finite radical R of the group $G = \mathrm{Lim}(N)$ of limited permutations on the set of natural numbers $\mathbb{N}$. The connection between completely dispersed subsets of $\mathbb{N}$ and elements of R is found.

Keywords: group, limited permutation, completely dispersed set, locally finite radical.

MSC: 20B07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-259-264

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, M — любое из этих множеств. Через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M.

О п р е д е л е н и е 1. Подстановка $g \in S(M)$ называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Из ограниченности подстановок g, h следует, что таковыми являются и подстановки g^{-1} и gh, так как $\omega(g^{-1}) = \omega(g), \omega(gh) \leq \omega(g) + \omega(h)$. Поэтому множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x \mid x \in S(M),\ \omega(x) < \infty\}$$

образует группу, которая является естественным расширением локально конечной группы $\mathrm{Fin}(M)$ всех финитарных подстановок множества M, т. е. таких подстановок $y \in S(M)$, для которых множество $\{\alpha \mid \alpha \in M, \alpha^y \neq \alpha\}$ конечно.

В работе [1] одного из авторов данной статьи впервые был построен пример смешанной группы $H = AB$, где A, B — периодические (и даже локально конечные) подгруппы. Затем в [2; 3] установлено, что $H = \langle h \mid h \in \mathrm{Lim}(\mathbb{Z}), |h| < \infty \rangle$, любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина изоморфно вложимы в H. При этом $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z}) = H \leftthreetimes \langle d \rangle$, где d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Факторизация всей смешанной группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ двумя локально конечными подгруппами доказана авторами в статье [4]. Там же установлено, что группа $\mathrm{Lim}(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр рассеивания $\omega(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \alpha + 1), \alpha \in M$, либо $M = \mathbb{Z}$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$. Связь между

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А).

группами G и H найдена в [5]. Предполагая, что подстановки группы $S(\mathbb{N})$ действуют тождественно на множестве $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, мы получим естественное вложение $S(\mathbb{N}) < S(\mathbb{Z})$. Обозначим через t инволюцию группы $S(\mathbb{Z})$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z})$. Доказано, что

$$H = \mathrm{Fin}(\mathbb{Z})(G \times G^t).$$

Из этого равенства и указанной выше связи между группами H и $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z})$ следует, что при изучении нормального строения группы $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z})$ определяющим является описание нормальных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$.

Первый результат в этом направлении получен в [5]. Чтобы его сформулировать, необходимо привести некоторые введенные в этой работе понятия.

Пусть

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots\}$$

— подмножество множества $\mathbb{N}$, где $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$; m — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо при $i < j$ $(j < i)$ выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leq m$; $i \leq k \leq j-1$ $(j \leq k \leq i-1)$. Нетрудно понять, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение будем называть m-разбиением. Пусть $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

О п р е д е л е н и е 2. Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным при условии, что

$$c_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Из данного определения очевидно следует, что каждое конечное подмножество множества $\mathbb{N}$ является вполне рассеянным.

Примером вполне рассеянного множества служит множество L, для элементов которого выполняются неравенства $\mu_2 - \mu_1 < \mu_3 - \mu_2 < \dots < \mu_{n+1} - \mu_n < \dots$.

Приведем теперь результат работы [5]. Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $a = (\mu_1\ \mu_1+1)(\mu_2\ \mu_2+1)\dots(\mu_n\ \mu_n+1)\dots$ — разложение инволюции a группы G $(\omega(a) = 1)$ на независимые транспозиции. Доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе G тогда и только тогда локально конечно, когда L — вполне рассеянное множество. В этой же работе сформулированы три гипотезы, доказательства которых, по мнению авторов, будет существенным продвижением в изучении нормальных подгрупп группы G.

Основным результатом настоящей работы является доказательство одной из этих гипотез. А именно доказана следующая

Теорема. *Пусть R — локально конечный радикал группы G. Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда $L_g = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}, \alpha^g \neq \alpha\}$ — вполне рассеянное множество. Если множество L_g не вполне рассеянное, то нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.*

Все обозначения, используемые в данной статье либо оговариваются, либо стандартные [6].

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть*

$$b = (\alpha_1\ \beta_1)(\alpha_2\ \beta_2)\dots(\alpha_k\ \beta_k)$$

— разложение подстановки b на независимые транспозиции,

$$h = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_k\ \beta_k\ \beta_{k-1} \dots \beta_1)$$

— цикл. Тогда подстановка bb^h разлагается в произведение двух независимых циклов длины k, в частности, ее порядок равен k.

Доказательство. Применяя [5, предложение 1], получим

$$b^h = (\alpha_2\ \alpha_1)(\alpha_3\ \beta_1)(\alpha_4\ \beta_2) \dots (\alpha_k\ \beta_{k-2})(\beta_k\ \beta_{k-1}).$$

Если k — четное число, то простые вычисления показывают, что

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \dots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \dots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \dots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \dots \beta_1).$$

При нечетном k имеем

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \dots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \dots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \dots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \dots \beta_1).$$

Итак, в любом случае подстановка bb^h представима в виде произведения двух независимых циклов длины k. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в разложении подстановки h группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ на независимые циклы присутствуют тройные циклы*

$$h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, \dots, h_{n1}, h_{n2}, \dots, h_{n2n}.$$

Предположим, что найдется такое натуральное число c, что

$$|\mu_{nj} - \mu_{nj+1}| < c$$

для любых элементов μ_{nj} цикла h_{nj} и μ_{nj+1} цикла h_{nj+1}; $n \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 2n-1$. Тогда подгруппа $H = \langle h^g \mid g \in G\rangle$ содержит элемент бесконечного порядка.

Доказательство. Пусть $h_{nj} = (\alpha_{nj}\ \beta_{nj}\ \gamma_{nj})$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 2n$. Обозначим

$$u = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23}) \dots (\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1}) \dots .$$

Ясно, что $\omega(u) \le \omega(h)$, а потому $u \in G$. Следовательно, коммутатор

$$h_1 = [h, u] = h^{-1}h^u = (\alpha_{11}\ \beta_{11}\ \gamma_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21}\ \gamma_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23}\ \gamma_{23}) \dots$$

$$(\alpha_{n1}\ \beta_{n1}\ \gamma_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3}\ \gamma_{n3}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1}) \dots$$

содержится в подгруппе H. Далее, если $v = (\beta_{11}\alpha_{12})(\beta_{21}\alpha_{22})(\beta_{23}\alpha_{24}) \dots (\beta_{n1}\alpha_{n2})(\beta_{n3}\alpha_{n4}) \dots (\beta_{n\ 2n-1}\alpha_{n2n}) \dots$, то по условию леммы $\omega(v) < c$ и $v \in G$. После несложных вычислений получим, что H содержит инволюцию

$$h_2 = h_1 h_1^v = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\gamma_{11}\ \alpha_{12})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\gamma_{21}\ \alpha_{22})(\alpha_{23}\ \beta_{23})(\gamma_{23}\ \alpha_{24}) \dots$$

$$(\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\gamma_{n1}\ \alpha_{n2})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3})(\gamma_{n3}\ \alpha_{n4}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1})(\gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n}) \dots .$$

Пусть теперь

$$t = (\alpha_{11}\ \gamma_{11}\ \alpha_{12}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \gamma_{21}\ \alpha_{23}\ \gamma_{23}\ \alpha_{24}\ \beta_{23}\ \alpha_{22}\ \beta_{21}) \dots (\alpha_{n1}\ \gamma_{n1}\ \alpha_{n3}\ \gamma_{n3} \dots$$

$$\alpha_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n}\ \beta_{n\ 2n-1} \dots \alpha_{n4}\ \beta_{n3}\ \alpha_{n2}\ \beta_{n1}) \dots .$$

Снова в силу условия леммы $t \in G$. Остается заметить, что согласно лемме 1 длины независимых циклов из разложения подстановки $h_2h_2^t$ подгруппы H неограниченны, а значит, $|h_2h_2^t| = \infty$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Предположим, что множество $L_g = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}, \alpha^g \neq \alpha\}$ вполне рассеянное для некоторой подстановки $g \in G$. Если оно конечно, то g — финитарная подстановка, т. е. g содержится в локально конечной нормальной в G подгруппе $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$. Очевидно, что $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ является подгруппой локально конечного радикала R группы G, а значит, $g \in R$. Пусть теперь множество L_g бесконечно, $\omega(g) = k$. Тогда из построения локально конечной нормальной в G подгруппы $Q = Q(L_g)$ [5, с. 351, 352] следует, что $g \in Q_k < Q < R$.

Допустим теперь, что множество L_g не вполне рассеянное для некоторого элемента $g \in G$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.

В силу определений найдется такое натуральное число m, что

$$\max_{A \in B_m(L_g)} |A| = \infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что из включения $A \in B_m(L_g)$ вытекает существование такого класса $D \in B_{m+1}(L_g)$, что $A \subseteq D$. Поэтому мы можем предполагать, что $m > k$.

Так как для элемента g бесконечного порядка доказуемое утверждение очевидно, то считаем, что $|g| < \infty$. В этом случае подстановка g разлагается на конечные независимые циклы, длины которых не превосходят $|g|$. Пусть $l_1 = (\alpha_1 \ldots \alpha_t)$, $l_2 = (\beta_1 \ldots \beta_q)$ — два различных таких цикла. Полагаем

$$l_1 < l_2 \Leftrightarrow \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} < \min\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}.$$

Таким образом, если

$$g = g_1 g_2 \ldots g_n \ldots \tag{3.2}$$

— разложение g на независимые циклы, то мы можем считать, что $g_1 < g_2 < \ldots < g_n < \ldots$. Как обычно, одноэлементные циклы в разложении (3.2) подстановки g опускаются, а потому L_g совпадает с объединением элементов циклов g_n ($n = 1, 2, \ldots$).

Предположим сначала, что все классы эквивалентности множества $B_m(L_g)$ конечны. Тогда в силу (3.1) их порядки неограниченны. Если A — один из этих классов, то из неравенства $m > k = \omega(g)$ следует, что $A^g = A$, т. е. A совпадает с объединением элементов нескольких последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g. Отсюда ввиду ограниченности длин циклов разложения (3.2) вытекает существование такой последовательности

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{3.3}$$

различных классов эквивалентности множества $B_m(L_g)$, что при каждом натуральном n класс A_n содержит элементы не менее n последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g.

Пусть теперь $B_m(L_g)$ содержит бесконечный класс C. Если α_0 — наименьший элемент класса C, то в силу определений $C = \{\alpha \mid \alpha \in L_g, \alpha \geq \alpha_0\}$. Среди циклов разложения (3.2) имеется цикл $(\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_q)$; полагаем $A_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. Допустим, что уже определены конечные множества $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Тогда через A_n обозначим любое множество всех элементов n последовательных циклов разложения (3.2) при условии, что $A_n \subset C$ и $A_n \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \varnothing$.

Итак, в любом случае определена последовательность (3.3) конечных подмножеств A_n ($n = 1, 2, \ldots$) множества L_g со следующими свойствами: $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$; Каждое подмножество A_n есть объединение всех элементов не менее чем n последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g и содержится в одном классе m-разбиения множества L_g.

Покажем, что если g_s, g_{s+1} — два цикла, элементы которых содержатся в одном множестве A_n последовательности (3.3), то для любых элементов α, β цикла g_s и произвольного элемента γ цикла g_{s+1} выполняются неравенства

$$|\alpha - \beta| < k|g|, \quad |\alpha - \gamma| < 3k|g| + m. \tag{3.4}$$

В самом деле, так как $\beta = \alpha^g$ для некоторого целого r $(0 \le r < |g|)$ и $|\epsilon - \epsilon^g| \le k = \omega(g)$, то отсюда легко вытекает первое из неравенств (3.4). Далее, пусть t — такое наименьшее натуральное число, что элементы цикла g_t содержатся в множестве A_n; α_i — минимальное число цикла g_i, $(t \le i \le s+1)$. В силу нашего упорядочения циклов из разложения (3.2) подстановки g выполняются неравенства $\alpha_t < \alpha_{t+1} < \ldots < \alpha_s < \alpha_{s+1}$. При этом все элементы g_i принадлежат отрезку $U_{\alpha_i}^{\alpha_i + k|g|}$. Обозначим через S объединение элементов циклов $g_t, g_{t+1}, \ldots, g_s$.

Из вышеизложенного следует, что наибольшее число λ множества S удовлетворяет неравенствам $\alpha_s < \lambda < \alpha_s + k|g|$, а в силу свойства множества A_n для двух его соседних (при естественном упорядочении) элементов ϵ, σ выполняется неравенство $|\epsilon - \sigma| \le m$. Поэтому $\alpha_s < \alpha_{s+1} < \alpha_s + k|g| + m$ и, значит, $0 < \alpha_{s+1} - \alpha_s < k|g| + m$. Отсюда с учетом доказанного первого из неравенств (3.4) получаем результат

$$|\alpha - \gamma| \le |\alpha - \alpha_s| + |\alpha_s - \alpha_{s+1}| + |\alpha_{s+1} - \gamma| < 3k|g| + m.$$

Неравенства (3.4) доказаны.

Возможны два с л у ч а я.

1. Найдется последовательность $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}, \ldots$ последовательности множеств (3.3) и транспозиции

$$g_{j_1}, g_{j_1+1}, \ldots, g_{j_n}, g_{j_n+1}, \ldots, g_{j_n+n}, \ldots$$

из разложения (3.2) подстановки g такие, что при каждом n элементы транспозиций $g_{j_n}, g_{j_n+1}, \ldots, g_{j_n+n}$ содержатся в множестве A_{in}. Тогда если

$$g_{j_1} = (\alpha_{j_1}\beta_{j_1}), g_{j_1+1} = (\alpha_{j_1+1}\beta_{j_1+1}), \ldots, g_{j_n} = (\alpha_{j_n}\beta_{j_n}), g_{j_n+1} = (\alpha_{j_n+1}\beta_{j_n+1}), \ldots,$$

$$g_{j_n+n} = (\alpha_{j_n+n}\beta_{j_n+n}), \ldots ,$$

то полагаем $x = (\alpha_{j_1}\ \alpha_{j_1+1}\ \beta_{j_1+1}\beta_{j_1}) \ldots (\alpha_{j_n}\ \alpha_{j_n+1} \ldots \alpha_{j_n+n}\ \beta_{j_n+n} \ldots \beta_{j_n+1}\ \beta_{j_n}) \ldots$. Согласно неравенствам (3.4) $\omega(x) < 3k|g| + m$, в частности $x \in G$. Таким образом, элемент gg^x принадлежит нормальному замыканию g в группе G; в силу леммы 1 он разлагается на независимые циклы, длины которых неограниченны, а потому $|gg^x| = \infty$.

2. Существует такое натуральное число t_0, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число подряд идущих транспозиций из разложения (3.2) подстановки g, элементы которых содержатся в одном множестве A_n, не превосходит t_0.

В этом случае для каждого натурального n найдутся $2n$ циклов $l_{n1} < l_{n2} < \ldots < l_{n2n}$ длины ≥ 3 из разложения (3.2) подстановки g, все элементы которых содержатся в некотором множестве A_{j_n}; $j_{n_1} \ne j_{n_2}$ при $n_1 \ne n_2$ и если $l_{ni} = g_{\phi(n,i)}$, то

$$0 < \phi(n, i+1) - \phi(n, i) \le t_0 + 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 1 \le i < 2n.$$

Отсюда ввиду второго из неравенств (3.4) следует, что для любых элементов μ_{ni} цикла l_{ni} и $\mu_{n\ i+1}$ цикла $l_{n\ i+1}$ $(n \in \mathbb{N}, 1 \le i < 2n)$ выполняется неравенство

$$|\mu_{ni} - \mu_{n\ i+1}| < c, \tag{3.5}$$

где $c = (t_0 + 1)(3k|g| + m)$.

Далее, будем считать для определенности, что первым в каждом цикле l_{ni} стоит его наименьший элемент α_{ni}. Если $l_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, то полагаем $z_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni})$; если же $l_{ni} =$

$(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni} \ldots)$, то $z_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$. Зададим подстановку z множества $\mathbb{N}$ ее разложением на независимые циклы:

$$z = z_{11}\ z_{12} \ldots z_{n1}\ z_{n2} \ldots z_{n2n} \ldots .$$

В силу первого из неравенств (3.4) мы имеем $\omega(z) < k|g|$, т. е. $z \in G$. Несложные вычисления показывают, что

$$h = [g, z] = h_{11}\ h_{12} \ldots h_{n1}\ h_{n2} \ldots h_{n2n} \ldots ,$$

где $h_{ni} = l_{ni}$, если l_{ni} — цикл длины 3; $h_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, если l_{ni} — цикл длины > 3.

Таким образом, ввиду неравенства (3.5) коммутатор $h = [g, z]$ удовлетворяет условию леммы 2, согласно которой его нормальное замыкание в группе G содержит элемент x бесконечного порядка. Ясно, что x содержится и в нормальном замыкании элемента g. Как отмечалось выше, это доказывает теорему.

В заключение отметим следующий открытый вопрос: верно ли, что подстановка группы G тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе, когда ее носитель есть рассеянное множество натуральных чисел?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сучков Н.М.** Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 573–577.
2. **Сучков Н.М.** О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 408–413.
3. **Сучков Н.М.** О группе ограниченных перестановок // Конструкции в алгебре и логике: сб. науч. тр. Тверь: Изд-во ТГУ, 1990. С. 84–89.
4. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О группах ограниченных подстановок // Журн. Сиб. федерал. ун-та. 2010. Т. 3, № 2. С. 262–266.
5. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 344–355.
6. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

Поступила 10.12.2015

Сучков Николай Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru

Сучкова Надежда Георгиевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru