ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54, 519.1

О ГРАФАХ КОКСТЕРА ГРУПП С СИМПЛЕКТИЧЕСКИМИ 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ[1]

А. И. Созутов, В. М. Синицин

Работа посвящена поиску и описанию минимальных систем 3-транспозиций, порождающих группы $Sp_{2n}(2)$ и $O^{\pm}_{2n}(2)$, графы Кокстера которых являются деревьями.

Ключевые слова. Группы с симплектическими 3-транспозициями, определяющие соотношения, графы и группы Кокстера.

A. I. Sozutov, V. M. Sinitsin. On Coxeter graphs of groups with symplectic 3-transpositions.

We find and describe minimal systems of 3-transpositions that generate the groups $Sp_{2n}(2)$ and $O^{\pm}_{2n}(2)$ whose Coxeter graphs are trees.

Keywords: groups with symplectic 3-transpositions, defining relations, Coxeter graphs and groups.

MSC: 20F05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-251-258

Группы с 3-транспозициями (Б. Фишер, 1969 г.) [1] играют большую роль в теории конечных групп. Изучению их свойств и различных связей с другими математическими структурами посвящен внушительный цикл работ многих известных зарубежных математиков (Ф. Бюкенхаут, Х. Кейперс, С. Даниельсон, М. Гутерман, Дж. Холл, Д. Хант, Р. Вейс, Д. Пэррот, Ф. Зара и др., см., например, [1–3]). В настоящей статье продолжаются исследования из [4; 5] по описанию систем порождающих и определяющих соотношений групп с 3-транспозициями, аналогичных системам порождающих и определяющих соотношений групп Вейля $W(E_n)$ с графами Кокстера E_n ($n = 6, 7, 8$) [6]. Рабочая гипотеза: каждую из групп $Sp_{2n}(2)\times V$ ($n \geq 4$), $O^{-}_{2n}(2) \times Z_2$ ($n \geq 4$) и $O^{+}_{2n}(2) \times Z_2$ ($n \geq 5$), где V — четверная группа Клейна, Z_2 — группа порядка 2, можно получить из подходящей бесконечной группы Кокстера

$$G_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_is_j)^{m_{ij}} = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n\rangle$$

наложением точно одного дополнительного соотношения вида $(s_is)^2 = 1$, где $s \in s_1^G$.

Результаты работы были анонсированы в [7].

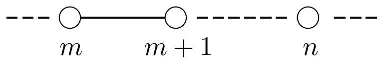
1. Формулировки основных результатов

Множество $D = a^G$ инволюций группы G называется *классом* 3-*транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$ и $G = \langle D\rangle$ [1]. Минимальной системе порождающих $X \subseteq D$ группы $G = G(\Gamma)$ ставится в соответствие граф Γ, вершинами которого являются элементы из X и две вершины a, b которого соединены ребром в Γ в том и только том случае, когда инволюции a и b неперестановочны. Пусть граф Γ_n является деревом с вершинами $1, \ldots, n$, V_n — линейное пространство над полем F_2 с базисом $p_1, \ldots, p_n$ и W_n — подгруппа из $SL(V_n)$, порожденная отражениями (трансвекциями) $w_1, \ldots, w_n$, действующими на элементах базиса следующим образом: $p_j^{w_i} = p_j + p_i$, если $(i, j) \in \Gamma_n$ и $p_j^{w_i} = p_j$ в остальных случаях. Каждому

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 A).

вектору $x \in V_n$ ставим в соответствие окрашенный граф $\Gamma_n(x)$, в котором вершина p_j черная, если в разложении $x = \sum \gamma_i p_i$ коэффициент $\gamma_j = 1$, и белая, если $\gamma_j = 0$. Вектор x называется *нечетносвязным*, если окраска графа $\Gamma_n(x)$ нечетносвязна, и *четносвязным* в противном случае [8]. Ненулевой вектор $x \in V_n$ тогда и только тогда инвариантен относительно группы W_n, когда у каждой вершины графа $\Gamma_n(x)$ число черных соседних вершин четно [5, лемма 1]. Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов называем *E-серией*, если они являются деревьями, содержат подграф E_6, их подграфы с вершинами $m, m+1, \dots, n$ являются цепями вида

$$\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1} \subset \ldots \subset \Gamma_n \subset \ldots, \tag{1.1}$$



и для некоторого n в V_n нет ненулевых инвариантных векторов. Пусть t_n — число нечетносвязных векторов в V_n и серии (1.1) соответствует последовательность

$$t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n, \ldots \ . \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Для чисел последовательности* (1.2) *верна точно одна из следующих групп формул*:

(I) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1}$;

(II) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1}$;

(III) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$;

(IV) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$.

Числа t_n из (I)–(IV) вычисляемы по соответствующим формулам (i)–(iv):

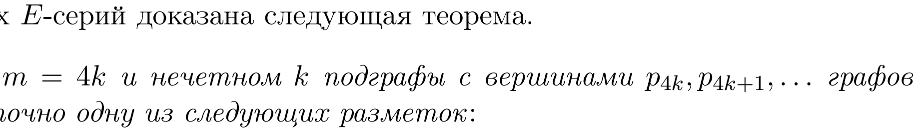
$$\text{(i)} \qquad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(ii)} \qquad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4};$$

$$\text{(iii)} \qquad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(iv)} \qquad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}.$$

Пусть n — четное число, $2^n O_n^{\pm}(2)$ — естественное расширение аддитивной группы пространства V_n с помощью группы $O_n^{\pm}(2)$. По теореме 2 и леммам 14, 16 из [5] для E-серии, состоящей из графов $\{E_n\}$ $(n \geq m = 6)$, группы W_n составляют цепочку

$$O_6^-(2) < Sp_6(2) < O_8^+(2) < 2^8 O_8^+(2) < O_{10}^+(2) < Sp_{10}(2) < O_{12}^-(2) < 2^{12} O_{12}^-(2) < \ldots,$$

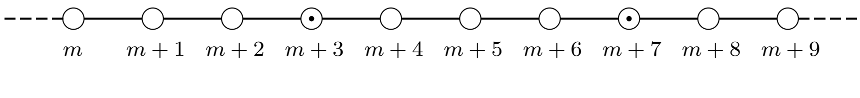
полностью восстанавливаемую из следующей *разметки*:

(E_n) $n \geq m = 6$: 

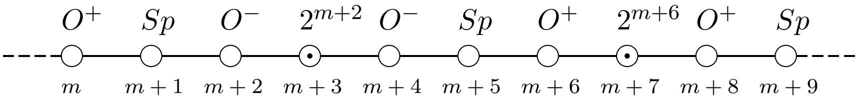
.

Для произвольных E-серий доказана следующая теорема.

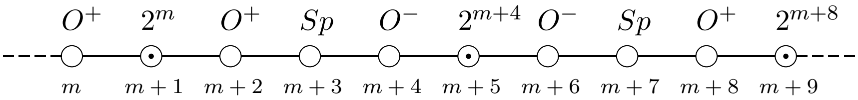
Теорема 2. *При $m = 4k$ и нечетном k подграфы с вершинами $p_{4k}, p_{4k+1}, \ldots$ графов Γ_n E-серии* (1) *имеют точно одну из следующих разметок*:

(I) $m = 4k$, $k \neq 2r$: 

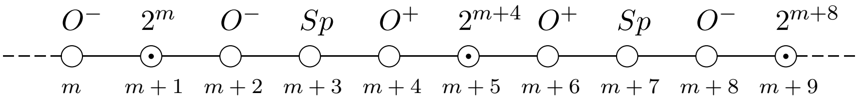
;

(II) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

;

(III) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

;

(IV) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

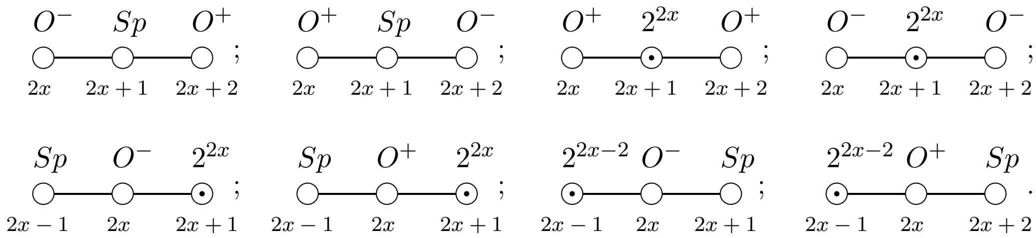
.

В каждой из разметок (I)–(IV) *символы* O^-, O^+, Sp *и* 2^x *расположены периодично с периодом 8. Если метка вершины* n *равна* $O^{\pm}$, *то* n *четно и* Γ_n *является графом группы* $O_n^{\pm}(2)$. *Если над вершиной* n *стоит метка* Sp, *то* n *нечетно и* Γ_n *является графом группы* $Sp_{n-1}(2)$. *Если метка вершины* n *равна* 2^{n-1}, *то* n *нечетно, графу* Γ_n *соответствует группа* $2^{n-1}O_{n-1}^{\pm}(2)$ *и метки вершин* $n-1$ *и* $n+1$ *совпадают с* $O^{\pm}$.

З а м е ч а н и е 1. Каждый граф-дерево Γ с подграфом E_6, пространство $V(\Gamma)$ которого содержит не более одного ненулевого инвариантного вектора, может быть включен в подходящую E-серию.

З а м е ч а н и е 2. Условие $m = 4k$, $k \neq 2r$ в теореме 2 не является абсолютным ограничением, поскольку разметка начиная с вершины m может быть продолжена влево до вершины ветвления.

З а м е ч а н и е 3. Каждая разметка в теореме 2 состоит из следующих типовых (но пересекающихся) тройных фрагментов:



2. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1. Для произвольного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ из V_n в [5] введена квадратичная форма

$$F(x) = \sum_{i \in \Gamma_n} x_i^2 + \sum_{(i,j) \in \Gamma_n} x_i x_j$$

и равенством

$$f(x, y) = f_n(x, y) = F(x + y) + F(x) + F(y)$$

определена симплектическая форма на V_n. Как доказано в [5, леммы 4, 19, 20], справедливо

Предложение 1. $F(x) = 1$ *тогда и только тогда, когда вектор* x *нечетно связен*; $f(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда среди векторов* x, y, $x + y$ *четное число нечетно-связных. Если в* V_n *нет ненулевых инвариантных векторов, то формы* F *и* f *невырождены на* V_n. *При любом четном* $n \geq m$ *в пространстве* V_n *нет ненулевых инвариантных векторов, а при нечетном* n V_n *содержит точно один ненулевой инвариантный вектор.*

З а м е ч а н и е 4. Хорошо известно, что при нечетном n симплектическая форма на V_n вырождена [9, предложение 2.4.1]. Теперь из условий, наложенных на E-серию, следует, что в V_n есть инвариантный вектор $r = s + p_n$, где $s \in V_{n-2}$. Легко убедиться, что V_{n+1} не содержит инвариантных векторов и форма f_{n+1} невырождена.

В силу лемм 2, 3 из [5] верно следующее предложение.

Предложение 2. *Для каждого неинвариантного нечетносвязного вектора r из V_n трансвекция w_r : $x \to x^{w_r} = x + f(x,r)r$ принадлежит группе W_n, все такие трансвекции сопряжены в W_n, порождают W_n и составляют в ней класс 3-транспозиций. В частности, $W_n \leq I(F) \leq I(f)$, где $I(F), I(f)$ — группы изометрий форм F и f соответственно.*

Пусть $\prod_n$ — множество нечетносвязных неинвариантных векторов пространства V_n. Группа $W_n = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle = \langle w_r \mid r \in \prod_n\rangle$ по определению действует на пространстве V_n, а соответствующая ей подгруппа $\tilde{W}_n$ из W_{n+1} действует на V_{n+1} и $W_n \simeq \tilde{W}_n/K_n$, где K_n — нормальная в $\tilde{W}_n$ подгруппа. Практически дословно повторив доказательство лемм 16, 18 из [5], получаем предложения 3 и 4.

Предложение 3. *Если $K_n \neq 1$, то $K_n = Z(\tilde{W}_n) = \langle w_r\rangle$, где r — нечетносвязный инвариантный вектор в V_n, который неинвариантен в V_{n+1} и принадлежит $\prod_{n+1}$. Если $K_n = 1$, то $W_n \simeq \tilde{W}_n \leq W_{n+1}$, а если $K_n \neq 1$, то $\tilde{W}_n = W_n \times \langle w_r\rangle$.*

Предложение 4. *Подгруппа $\tilde{W}_n$ действует транзитивно на множестве $\prod_{n+1} \setminus V_n$.*

Докажем следующее основное предложение.

Предложение 5. *Если $n \geq m+2$ и пространство V_{n+1} содержит нечетносвязный инвариантный вектор r, то число n четно, $W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$, $W_n \simeq \tilde{W}_n \leq W_{n+1}$ и либо $W_n \simeq O_n^-(2)$, либо $W_n \simeq O_n^+(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае по предложению 3 $K = 1$, $\tilde{W}_n \simeq W_n$ и можно считать, что $W_n < W_{n+1}$. В силу предложений 1, 2 для любого ненулевого вектора $x \in V_{n+1}$, отличного от r, среди векторов $\{x, r, x+r\}$ точно два нечетносвязных, в частности $t_{n+1} = 2^n$. Понятно, что группы W_n и W_{n+1} централизуют подпространство $R = \{0, r\}$, $V_{n+1} = V_n \oplus R$ и фактор-пространство $\overline{V}_{n+1} = V_{n+1}/R$ канонически изоморфно пространству V_n. Любой вектор $\overline{x} \in \overline{V}_{n+1}$ является образом точно одного вектора $v_x \in V_n$ ($v_x \in \overline{x} = \{x, x+r\}$) и точно одного вектора $r_x = v_x + r \in V_{n+1} \setminus V_n$. Поскольку $f_{n+1}(x,r) = 0$ для каждого $x \in V_{n+1}$, то для любых векторов $x, y \in V_{n+1}$ имеем

$$f_{n+1}(x+r, y+r) = f_{n+1}(x, y+r) = f_{n+1}(x+r, y) = f_{n+1}(x,y) = f_n(v_x, v_y) \qquad (2.1)$$

и равенства $\overline{F}_n(\overline{x}) = F_n(v_x)$ и $\overline{f}_n(\overline{x},\overline{y}) = f_n(v_x, v_y)$ определяют на $\overline{V}_{n+1}$ квадратичную и симплектическую формы $\overline{F}_n$ и $\overline{f}_n$, при этом $\overline{f}_n(\overline{x},\overline{y}) = \overline{F}_n(\overline{x}+\overline{y}) + \overline{F}_n(\overline{x}) + \overline{F}_n(\overline{y})$. Кроме того, из (2.1) следует, что $\overline{f}_n$ совпадает с формой, индуцированной формой f_{n+1} на $\overline{V}_{n+1}$.

Каждая трансвекция (отражение) $w_s \in W_n$ (здесь s — нечетносвязный вектор из V_n) индуцирует на $\overline{V}_{n+1}$ отражение $\overline{w}_s$, действующее согласно предложению 2 по формуле $\overline{x}^{\overline{w}_s} = \overline{x} + \overline{f}_n(\overline{x},\overline{s})\overline{s}$. Значит, группа $\overline{W}_n$, порожденная всеми такими отражениями $\overline{w}_s$, содержится в группе изометрий $I(\overline{F}_n)$ и ввиду предложения 2 изоморфна группе W_n.

Аналогично для каждого нечетносвязного неинвариантного вектора $s \in V_{n+1}$ отражение $w_s \in W_{n+1}$ индуцирует на $\overline{V}_{n+1}$ отражение $\overline{w}_s$, действующее по формуле $\overline{x}^{\overline{w}_s} = \overline{x} + \overline{f}_n(\overline{x},\overline{s})\overline{s}$, и группа $\overline{W}_{n+1}$, порожденная всеми такими отражениями $\overline{w}_s$, содержится в группе изометрий $I(\overline{f}_n)$. Очевидно также, что $W_{n+1} \simeq \overline{W}_{n+1}$. Как доказано выше, число t_{n+1} нечетносвязных векторов из V_{n+1}, включая инвариантный вектор r, равно 2^n. Значит, $\overline{W}_{n+1}$ содержит $2^n - 1$ трансвекций, т. е. все трансвекции из $I(\overline{f}_n)$, поэтому $\overline{W}_{n+1} = I(\overline{f}_n)$ и $W_{n+1} \simeq \overline{W}_{n+1} \simeq Sp_n(2)$.

Пусть w_s — произвольная трансвекция из $W_{n+1} \setminus \tilde{W}_n$. По предложению 4 $s^w = p_{n+1}$ для подходящего $w \in \tilde{W}_n$ и, значит, $w_s^w = w_{n+1}$. Это означает, что любая трансвекция $w_s \in W_{n+1} \setminus W_n$ сопряжена с помощью подходящего элемента $w \in \tilde{W}_n$ с трансвекцией w_{n+1} и потому $\langle \tilde{W}_n, w_s \rangle = W_{n+1}$. Отсюда следует, что подгруппа $\tilde{W}_n$ максимальна в W_{n+1}, $\overline{W}_n = I(\overline{F})$ и $\tilde{W}_n$ изоморфна одной из групп $O_n^-(2)$, $O_n^+(2)$. Как было доказано выше, $W_n \simeq \tilde{W}_n$, и предложение доказано.

Пусть выполняются условия и обозначения предложения 5. В силу предложения 1 в пространстве V_{n+3} точно один ненулевой инвариантный четносвязный вектор $r + p_{n+3}$. Согласно [5, лемма 14] верно следующее предложение.

Предложение 6. *Вектор r принадлежит $\prod_{n+3}$, нормальное замыкание T элемента $w_{n+3}w_r$ в W_{n+3} — элементарная абелева группа порядка 2^{n+2} и $W_{n+3} = T\,W_{n+2}$.*

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Последовательность (1.2) удовлетворяет условиям теорем 1, 2 из [8], при этом последовательности чисел (I)–(IV) доказываемой теоремы совпадают с соответствующими последовательностями теоремы 2 из [8]. Согласно второму утверждению теоремы 1 из [8] достаточно доказать, что при некоторых m, n пара чисел t_n, t_{n+1} из (1.2) совпадает с соответствующими числами одной из последовательностей (I)–(IV) доказываемой теоремы. Установим это.

Согласно предложению 1 при нечетном $n \geq m$ пространство V_n содержит точно один ненулевой инвариантный вектор. Пусть $n \geq m + 2$ и пространство V_{n+1} содержит нечетносвязный инвариантный вектор. По предложению 5 $W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$. Значит, $|\prod_{n+1}| = 2^n - 1$ и ввиду предложения 2 $t_{n+1} = |\prod_{n+1}| + 1 = 2^n$. По предложению 5 W_n изоморфна одной из групп $O_n^-(2)$, $O_n^+(2)$, число $|\prod_n|$ трансвекций в которых согласно предложениям 1, 2 совпадает с t_n и равно соответственно $2^{n-1} + 2^{\frac{n-2}{2}}$ или $2^{n-1} - 2^{\frac{n-2}{2}}$. Непосредственно проверяется, что при $n = 4k$ найденная пара чисел t_n, t_{n+1} содержится в одной из последовательностей (I), (II) теоремы 1, а при $n = 4k + 2$ — в одной из последовательностей (III), (IV) теоремы 1. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Покажем, что графы Γ_n произвольной E-серии $\{\Gamma_n\}$ (1.1) при $n \geq m$ имеют однозначно определенную разметку из формулировки теоремы 2.

Согласно предложению 1 либо при $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, либо при $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ пространство V_{n+1} содержит точно один нечетносвязный инвариантный вектор r, зафиксируем n. В силу предложения 5 $W(\Gamma_{n+1}) = W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$ и, значит, Sp — метка над вершинами с номерами $n + 4k + 1 \geq m$. Также по предложению 5 либо $W_n \simeq O_n^-(2)$, либо $W_n \simeq O_n^+(2)$, следовательно, над вершинами с номерами $n + 4k$ расположены метки O^-, O^+, при этом знак $\pm$ у метки противоположен знаку второго слагаемого в формуле $t_n = 2^{n-1} \mp 2^{\frac{n-2}{2}}$ теоремы 1.

Далее, в силу предложений 1, 2 W_{n+2} содержится в группе I изометрий невырожденной квадратичной формы F_{n+2}, а I изоморфна одной из групп $O_{n+2}^-(2)$, $O_{n+2}^+(2)$. Докажем, что порядки групп W_{n+2}, I совпадают и потому $W_{n+2} = I$. Известно (см., например, [5, предложение 3]), что $|Sp_{2l}(2)| = 2^{l^2} \prod_{s=1}^{l}(2^{2s} - 1)$ и

$$|O_{2l+2}^-(2)| = 2^{l^2+l+1}(2^{l+1} + 1) \prod_{s=1}^{l}(2^{2s} - 1) = 2\,|Sp_{2l}(2)|\,2^l(2^{l+1} + 1),$$

$$|O_{2l+2}^+(2)| = 2^{l^2+l+1}(2^{l+1} - 1) \prod_{s=1}^{l}(2^{2s} - 1) = 2\,|Sp_{2l}(2)|\,2^l(2^{l+1} - 1).$$

Рассмотрим в группе W_{n+2} подгруппу $C = \langle w_1, \ldots, w_{n+1}, w_r \rangle$. Ввиду доказанного выше и предложения 3 C содержится в стабилизаторе C_r вектора $r \in \prod_{n+2}$, в централизаторе

$C(w_r)$ и $|C| = 2\,|Sp_n(2)|$. В силу предложения 4 порядок группы W_{n+2} делится на число $d = 2\,|Sp_n(2)|\,t_{n+2}$. В случае $n = 2l \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ по пп. (I), (II) теоремы 1 либо $d = |O^-_{2l+2}(2)|$, либо $d = |O^+_{2l+2}(2)|$ и поскольку каждый из этих порядков не является делителем другого, то $W_{n+2} = I(F_{n+2})$ и, дополнительно, $C = C_r = C(w_r)$. Аналогично в случае $n = 2l \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ реализуются пп. (III), (IV) теоремы 1, $t_{4k+4} = 2^l(2^{l+1} \pm 1)$ и равенства $W_{n+2} = I(F_{n+2})$ и $C = C(w_r)$ также верны.

Таким образом, над вершиной с номером $n+4k+2$ стоит одна из меток O^-, O^+, и знак $\pm$ противоположен знаку второго слагаемого числа t_{n+4k+2} из теоремы 1. Поскольку вторые слагаемые в формулах для чисел t_{n+4k} и t_{n+4k+2} из теоремы 1 имеют разные знаки, то и знаки меток $O^{\pm}$ у вершин с номерами $n+4k$ и $n+4k+2$ противоположны. Итак, метки всех вершин с номерами $n+4k$, $n+4k+1$ и $n+4k+2$ графов рассматриваемой E-серии однозначно определены и соответствуют пп. (I)–(IV) теоремы.

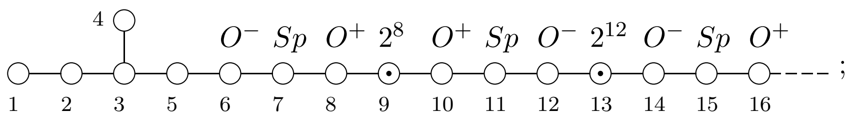
Рассмотрим вершину $n+4k+3$ графа Γ_l, $l = n+4k+3$, $k \geq 0$. В силу предложения 1 пространство V_{n+4k+3} содержит точно один ненулевой инвариантный четносвязный вектор $r + p_{n+4k+3}$. По предложению 6 нормальное замыкание T элемента $w_{n+4k+3}w_r$ в W_{n+4k+3} — элементарная абелева группа порядка 2^{n+4k+2} и $W_{n+4k+3} = T\,W_{n+4k+2}$. Это означает, что над вершиной $n+4k+3$ расположена метка 2^{n+4k+2}. Таким образом, все вершины с номерами $\geq m$ графов Γ_n рассматриваемой E-серии помечены и разметка соответствует теореме 1 и пп. (I)–(IV) теоремы 2.

Далее, согласно второму утверждению теоремы 1 числа t_n из пп. (I)–(IV) вычисляемы по формулам (i)–(iv). Поскольку функции $\cos\pi n/4$ и $\sin\pi n/4$ натурального аргумента n имеют период 8, то каждая из разметок теоремы 2 периодична периода 8. Остальные свойства разметок были указаны в доказательстве. Теорема доказана.

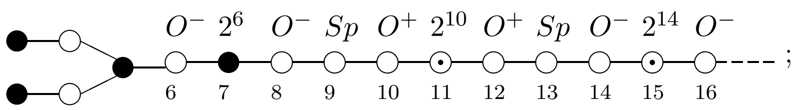
4. Примеры E-серий и разметок

Графу E_6 соответствует группа Вейля $W(E_6)$ [5], изоморфная $O^-_6(2)$ (в наших обозначениях $W(E_6) \simeq W_6 \simeq G_6$). Граф E_6 является начальным для четырех указанных ниже E-серий: $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{K_n\}$ и $\{L_n\}$:

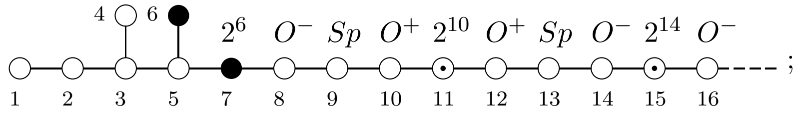
серия $\{E_n\},\ n \geq 6$:



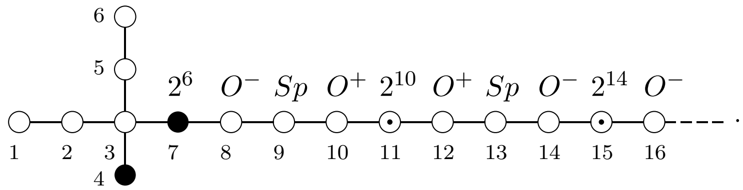
серия $\{I_n\},\ n \geq 6$:



серия $\{L_n\},\ n \geq 6$:



серия $\{K_n\},\ n \geq 6$:



По предложению 5 графу E_7 соответствует группа $W_7 \simeq Sp_6(2)$ (в силу предложения 3 $W_7 \simeq W(E_7)/Z(W(E_7)) \simeq G_7/Z(G_7)$, где $W(E_7)$ — группа Вейля). По теореме 1 серия $\{E_n\}$

имеет тип (IV) и указанную разметку графов (теорема 2). Графы I_7, K_7 и L_7 допускают четносвязную инвариантную окраску, выделенную черным цветом. По предложению 6 соответствующие им группы W_7 являются расширением элементарной абелевой 2-группы порядка 2^6 при помощи группы W_6, $W_6 \simeq O_6^-(2)$. По теореме 1 серии $\{I_n\}$, $\{K_n\}$ и $\{L_n\}$ имеют тип (II), нанесенная разметка соответствует п. (II) теоремы 2.

Для групп W_n серии $\{E_n\}$ проводились вычисления в системе GAP по алгоритму Тодда — Кокстера. Группы Кокстера G_n, заданные порождающими инволюциями и соотношениями с графом Кокстера E_n $(n \geq 9)$, бесконечны и содержат группу Вейля $W(E_8) = \langle s_1, \ldots, s_8 \rangle$. Пусть $r = 2p_8 + 3p_7 + 4p_6 + 5p_5 + 6p_3 + 3p_4 + 4p_2 + 2p_1$ — корень системы E_8 [6]. Вычисления показали, что для $9 \leq n \leq 22$ группы

$$\overline{G}_n \simeq \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\ (w_r s_9)^2 = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$$

конечны и их порядки совпадают с порядками соответствующих групп гипотезы. Когда n четно и $10 \leq n \leq 22$, то согласно приведенной выше разметке (теорема 1) имеет место гомоморфизм группы $\overline{G}_n$ на группу $O_n^\delta(2)$, где $\delta = \pm$ определяется из разметки. По результатам расчетов $|\overline{G}_n| = 2\,|O_n^\delta(2)|$ и, значит, ядро Z_2 гомоморфизма имеет порядок 2. Поскольку мультипликатор Шура групп $O_n^\delta(2)$ при $n \geq 10$ тривиален [10, табл. 4.1], то $\overline{G}_n \simeq Z_2 \times O_n^\delta(2)$.

Когда $n = 4k+3$ $(11 \leq n \leq 22)$ имеет место гомоморфизм группы $\overline{G}_n$ на группу $Sp_{n-1}(2)$ с ядром V порядка 4. Поскольку при $l \geq 5$ группа $Sp_{2l}(2)$ проста и ее мультипликатор Шура тривиален [10, табл. 4.1], то $V \leq Z(\overline{G}_n)$ и $\overline{G}_n \simeq V \times Sp_{n-1}(2)$. При этом понятно, что V — элементарная абелева 2-группа ввиду порождаемости $\overline{G}_n$ инволюциями.

Аналогично группы Кокстера G_n, заданные порождающими инволюциями и соотношениями с графом Кокстера I_n, при $n \geq 7$ бесконечны и содержат группу Вейля $W(E_6) = \langle s_1, \ldots, s_6 \rangle$. Пусть $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ — корень системы E_6. Положим

$$\overline{G}_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\ (w_r s_7)^2 = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

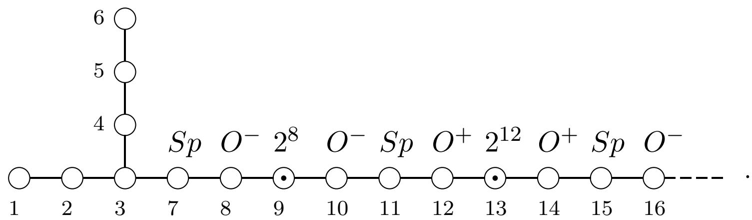
Как и выше, из результатов вычислений следует, что для $7 \leq n \leq 20$ имеют место изоморфизмы

$$\overline{G}_{4k+1} \simeq V \times Sp_{4k}(2) \text{ и } \overline{G}_{2m} \simeq Z_2 \times O_{2k}^\delta(2),$$

где $2 \leq k \leq 5$, $4 \leq m \leq 10$, а знак $\delta = \pm$ определяется по разметке.

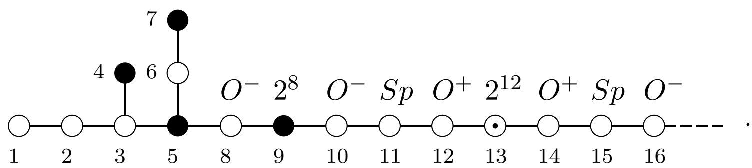
Приведем примеры других E-серий. В $V(E_7)$ есть один 3-связный инвариантный вектор, граф E_7 является начальным только для трех E-серий, поскольку вершина 8 должна соседствовать только с черной вершиной инвариантного вектора. Одна из этих серий есть серия $\{E_n\}$, приведенная выше. Граф Γ_7 второй серии изомофен графу E_7 (мы изменили нумерацию вершин), следовательно, метка вершины 7 совпадает с Sp, а граф Γ_8 изомофен графу I_8, и потому O^- — метка вершины 8. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (III) и следующую разметку:

Тип (III), $n \geq 7$:



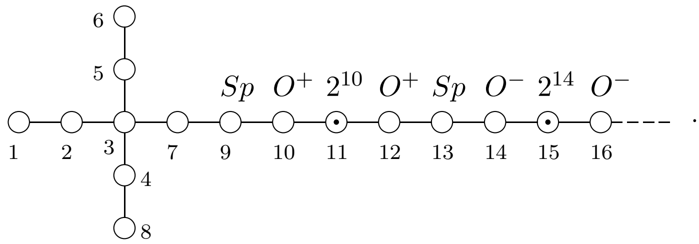
Аналогично граф Γ_8 третьей серии изомофен графу L_8, поэтому метка вершины 8 совпадает с O^-. Граф Γ_9 допускает четносвязную инвариантную окраску и согласно предложению 6 группа $W_9 \simeq 2^8 \cdot O_8^-(2)$. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (III) и следующую разметку:

Тип (III), $n \geq 7$:



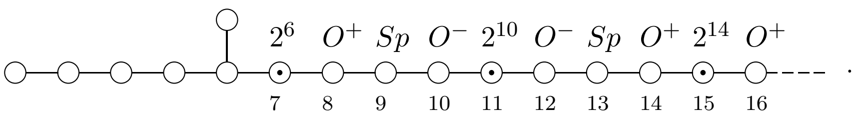
Далее, в пространстве $V(L_7)$ один 2-связный инвариантный вектор, и легко убедиться, что граф L_7 является начальным только в серии $\{L_n\}$. Аналогично граф K_7 является начальным только в серии $\{K_n\}$. По тем же причинам из четырех возможных продолжений графа I_7 три дают серию $\{I_n\}$. В четвертой серии над вершиной 7 начального графа стоит метка 2^6, граф Γ_8 в этой серии изоморфен графу K_8 и следовательно, над вершиной 8 стоит метка O^-. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (II) и следующую разметку:

Тип (II), $n \geq 9$:



Граф E_8 является начальным графом в 8 сериях, разметка одной из них, вытекающая из [5, теоремы 1], имеет тип (I):

Тип (I), J_n, $n \geq 9$:



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **M. Aschbacher.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 260 p.
2. **Hall J.I.** Symplectic geometry and mapping class groups // Geometrical combinatorics (Milton Keynes, 1984). Pitman; London, 1984. P. 21–33. (Research Notes in Mathematics; vol. 114.)
3. **Hall J.I.** Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic F_2-transvection groups // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). 1989. Vol. 58, no. 1. P. 89–111.
4. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Vol. 33, №1. С. 140–149.
5. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Синицин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 285–301.
6. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Т. VI: Группы, порожденные отражениями. М.: Мир, 1972. 334 с.
7. **Созутов А.И., Синицин В.М.** О графах Кокстера групп с симплектическими 3-транспозициями // Тез. докл. междунар. конф. "Мальцевские чтения": тез. докл. Новосибирск, 2014. С. 77.
8. **Созутов А.И., Александрова И.О.** О графах с вершинами двух цветов и группах с 3-транспозициями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 257–262.
9. **Kleidman P.B., Liebeck M.W.** The subgroups structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 304 p.
10. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Поступила 10.12.2015

Синицин Владимир Михайлович
аспирант
Сибирский федеральный университет
e-mail: sinkoro@yandex.ru