ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.532.2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП[1]

Д. В. Скоков

В работе изучаются нижнемодулярные, кодистрибутивные и костандартные элементы решетки всех многообразий эпигрупп. Нижнемодулярные и костандартные элементы описаны полностью, а кодистрибутивные — в обширном частном случае, включающем в себя все коммутативные многообразия эпигрупп. В частности, доказано, что в решетке всех эпигрупповых многообразий костандартность эквивалентна нейтральности, а нижняя модулярность влечет модулярность.

Ключевые слова: эпигруппа, многообразие, решетка, нейтральный элемент, нижнемодулярный элемент, кодистрибутивный элемент, костандартный элемент.

D. V. Skokov. Special elements of certain types in the lattice of epigroup varieties.

Lower-modular, codistributive and costandard elements of the lattice of all epigroup varieties are studied. Lower-modular and costandard elements are completely classified, and codistributive elements are described within a wide class of epigroup varieties that includes all commutative varieties. In particular, we verify that, in the lattice of all epigroup varieties, an element is costandard if and only if it is neutral and an element is modular whenever it is lower-modular.

Keywords: epigroup, variety, lattice, neutral element, lower-modular element, codistributive element, costandard element.

MSC: 20M07, 08B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-244-250

1. Введение и формулировки основных результатов

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти в работе [5]. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя, в частности, все *периодические* полугруппы (их можно определить как полугруппы, в которых некоторая степень каждого элемента лежит в некоторой конечной циклической подгруппе) и все *вполне регулярные* полугруппы (т. е. полугруппы, в которых каждый элемент является групповым).

Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией, которая вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно, что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$ (см., например, [5, леммы 1 и 2]). Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Отображение $x \longmapsto \overline{x}$ и есть упомянутая выше унарная операция на эпигруппе S. Элемент $\overline{x}$ называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр

[1]Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства образования и науки РФ) и поддержана РФФИ (проект 14-01-00524).

в указанной сигнатуре. Одним из основных направлений изучения многообразий эпигрупп является рассмотрение решетки эпигрупповых многообразий. Данная статья относится именно к этому направлению.

В теории решеток большое внимание уделяется рассмотрению специальных элементов различных типов. Напомним, что элемент x решетки L называется

дистрибутивным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
стандартным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
модулярным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$;
нижнемодулярным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$x \le y \longrightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y$;
нейтральным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$.

Кодистрибутивные, *костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Отметим, что между введенными типами специальных элементов существует ряд взаимосвязей: всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен, всякий [ко]стандартный элемент модулярен и [ко]дистрибутивен, а всякий [ко]дистрибутивный элемент нижнемодулярен [соответственно, верхнемодулярен]. Почти все из перечисленных утверждений очевидны. Единственным исключением является тот факт, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен. Его доказательство можно найти, например, в [6, теорема 253]. В дальнейшем мы используем перечисленные сейчас утверждения без дополнительных оговорок.

Будем обозначать решетку всех многообразий эпигрупп через **EPI**. Для краткости мы будем применять прилагательные, обозначающие типы специальных элементов решеток, и к многообразиям эпигрупп, являющимся элементами соответствующих типов в решетке **EPI**. В частности, именно в этом смысле мы будем говорить о верхнемодулярных, кодистрибутивных и т. п. многообразиях. В данной работе продолжается изучение специальных элементов в решетке **EPI**, начатое в работах [3; 9]. В них рассматривались многообразия пяти типов — нейтральные, дистрибутивные, стандартные, модулярные и верхнемодулярные. В данной работе рассматриваются нижнемодулярные, кодистрибутивные и костандартные многообразия. Нижнемодулярные и костандартные многообразия описаны полностью, а кодистрибутивные — в строго перестановочном случае (определение строго перестановочных многообразий будет дано ниже). В частности, доказано, что в решетке **EPI** костандартность эквивалентна нейтральности, а нижняя модулярность влечет модулярность.

Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобятся некоторые определения и обозначения. Через $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ будем обозначать тривиальное многообразие, многообразие полурешеток и многообразие полугрупп с нулевым умножением соответственно. Тождество вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi},$$

где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, называется *перестановочным*. Если при этом $1\pi \ne 1$ и $n\pi \ne n$, то тождество называется *строго перестановочным*. Многообразие эпигрупп, удовлетворяющее строго перестановочному тождеству, также называется *строго перестановочным*. Пару тождеств вида $wx = xw = w$, где буква x не входит в запись слова w, принято записывать в виде $w = 0$. Тождества такого вида, а также многообразия, ими задаваемые, называются 0-*приведенными*. Ясно, что полугруппа удовлетворяет тождеству $w = 0$ тогда и только тогда, когда она содержит нуль и любое значение слова w в этой полугруппе равно нулю.

Основными результатами работы являются следующие три утверждения.

Теорема 1. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*:

а) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **EPI**;

б) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **EPI**;

в) *$\mathcal{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Отметим, что эквивалентность условий б) и в) этой теоремы доказана в [9, теорема 1.1].

Теорема 2. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{X}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Теорема 3. *Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие.*

Работа состоит из трех разделов. Раздел 2 посвящен доказательству основных результатов, а в разд. 3 собран ряд следствий и открытых вопросов.

2. Доказательства основных результатов

Пусть Σ — система тождеств, записанных в сигнатуре Ω, состоящей из ассоциативной бинарной операции умножения и унарной операции. Обозначим через K_Σ класс всех эпигрупп, удовлетворяющих Σ (мы предполагаем при этом, что сигнатурная унарная операция интерпретируется как псевдообращение). Класс K_Σ может не быть многообразием, поскольку он не обязан быть замкнут относительно бесконечных прямых произведений (см., например, п. 4° в § 1 работы [5]). Чтобы охарактеризовать системы тождеств Σ, для которых класс K_Σ является многообразием, нам понадобятся некоторые определения. Слово w, записанное в сигнатуре Ω, называется *полугрупповым*, если оно не содержит унарной операции. Тождество $u = v$ сигнатуры Ω, называется *полугрупповым*, если слова u и v являются полугрупповыми, и *смешанным*, если одно из этих слов — полугрупповое, а другое — нет. Полугрупповое тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в обе его части одинаковое число раз.

Лемма 1 [7, предложение 2.15]. *Класс K_Σ является многообразием эпигрупп тогда и только тогда, когда Σ содержит либо полугрупповое неуравновешенное тождество, либо смешанное тождество.* □

Если класс K_Σ является многообразием, то мы будем обозначать это многообразие через $\mathrm{var}\,\Sigma$. Всюду ниже в тех случаях, когда будет использоваться это обозначение, его корректность вытекает из леммы 1. Явных ссылок на это обстоятельство мы ниже делать не будем.

В доказательствах теорем 1 и 2 нам понадобится следующее утверждение, которое может быть доказано дословным повторением рассуждений из первого абзаца разд. 3 статьи [1].

Лемма 2. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *и не содержит многообразия $\mathcal{P} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\, x^2y^2 = y^2x^2\}$ и двойственного к нему многообразия $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то все нильполугруппы в многообразии $\mathcal{V}$ суть полугруппы с нулевым умножением.* □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Как уже отмечалось, эквивалентность условий б) и в) этой теоремы доказана в [9, теорема 1.1]. Импликация б) $\longrightarrow$ а) очевидна. Поэтому достаточно показать импликацию а) $\longrightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — костандартное многообразие эпигрупп. Тогда многообразие $\mathcal{V}$ модулярно. В силу [9, теорема 1.2] отсюда вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В частности, $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Многообразие $\mathcal{V}$ кодистрибутивно. Применяя лемму 2, получаем, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, т. е. $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. □

Пусть I — решеточное тождество вида $s = t$, где s и t — решеточные термы от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in L: \quad s(x, x_1, \ldots, x_n) = t(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что специальные элементы всех перечисленных выше типов являются I-элементами для подходящего I (для нейтральных, [ко]дистрибутивных и [ко]стандартных элементов это очевидно, а для модулярных, верхнемодулярных и нижнемодулярных вытекает из возможности записать модулярный закон в виде тождества). В [4, следствие 2.1] показано, что если I — тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а a — атом и нейтральный элемент некоторой решетки L, то элемент $x \in L$ является I-элементом в L тогда и только тогда, когда этим свойством обладает элемент $x \vee a$. Обозначим через **SEM** решетку всех многообразий полугрупп. Общеизвестно, что многообразия $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ являются атомами решетки **SEM**, а значит, и решетки **EPI**. В [9, теорема 1.1] доказано, что эти многообразия нейтральны. Объединяя сказанное, получаем следующее утверждение, которое пригодится нам в доказательствах теорем 2 и 3.

Лемма 3. *Пусть I — решеточное тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$. Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является I-элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда этим свойством обладает многообразие $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$.*□

Хорошо известно, что во всякой периодической эпигруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение (см., например, п. 4° в § 1 работы [5]). Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп. Далее мы будем использовать этот факт без дополнительных оговорок.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — строго перестановочное кодистрибутивное многообразие эпигрупп. Многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно. В [9, лемма 3.6] показано, что всякое строго перестановочное верхнемодулярное многообразие эпигрупп коммутативно. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ коммутативно. В частности, оно не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Для всякого натурального m положим $\mathcal{C}_m = \mathrm{var}\,\{x^m = x^{m+1},\ xy = yx\}$. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Кроме того, положим $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Как показано в [9, следствие 2.8], всякое строго перестановочное многообразие эпигрупп представимо в виде $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \geq 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. В частности, такой вид имеет многообразие $\mathcal{V}$. В силу леммы 2 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, и потому $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. Кроме того, очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ содержит нильполугруппы, не являющиеся полугруппами с нулевым умножением. Следовательно, $m \leq 1$, и потому $\mathcal{C}_m$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$.

Достаточность. В силу леммы 3 достаточно убедиться в кодистрибутивности произвольного многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$. Легко заметить, что всякое многообразие эпигрупп либо является периодическим многообразием, либо содержит многообразие $\mathcal{AG}$ всех абелевых групп. Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия эпигрупп. Предположим сначала, что хотя бы одно из этих многообразий содержит $\mathcal{AG}$. Для определенности будем считать, что $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG}$. Значит, $\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG} \supseteq \mathcal{G}$, откуда

$$\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{G} = \mathcal{G} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае многообразие $\mathcal{G}$ кодистрибутивно. Поэтому далее можно считать, что многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются периодическими, а значит, могут рассматриваться как многообразия полугрупп. Теперь мы можем завершить доказательство достаточности, дословно повторяя ту часть доказательства импликации в) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.2 работы [1], в которой рассматривается случай, когда многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ периодичны. □

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся еще три вспомогательных утверждения.

Предложение 1. *Всякое 0-приведенное многообразие эпигрупп является модулярным и нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В части, относящейся к модулярным многообразиям, это утверждение доказано в [3, предложение 5.1]. Докажем его для нижнемодулярных многообразий.

Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие эпигрупп, F — свободная унарная полугруппа счетного ранга, а ν — вполне инвариантная конгруэнция на F, отвечающая многообразию $\mathcal{V}$. Конгруэнция ν имеет ровно один неодноэлементный класс (состоящий из тех и только тех слов, которые равны 0 в $\mathcal{N}$). Решетка всех многообразий унарных полугрупп антиизоморфна решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F, которая, в свою очередь, вкладывается в решетку эквивалентностей на множестве F. Как проверено в [2, предложение 3], если отношение эквивалентности на некотором множестве X имеет ровно один неодноэлементный класс, то оно является верхнемодулярным элементом в решетке эквивалентностей на X. Таким образом, ν — верхнемодулярный элемент в решетке эквивалентностей на множестве F, а значит, и в решетке вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F. Следовательно, многообразие $\mathcal{N}$ является нижнемодулярным элементом в решетке всех многообразий унарных полугрупп, и тем более в ее подрешетке **EPI**. $\square$

Следующее предложение дает положительный ответ на вопрос 5.6 из работы [9].

Предложение 2. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *является периодическим многообразием.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое нижнемодулярное многообразие эпигрупп. Как известно (см., например, [5, наблюдение 10]), существует натуральное число n такое, что во всякой эпигруппе $S \in \mathcal{V}$ n-я степень любого элемента является групповым элементом. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = \overline{\overline{x^n}}$. Пусть n — минимальное число с таким свойством. Рассмотрим многообразия

$$\mathcal{Y} = \mathrm{var}\,\{x^n y^3 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z} = \mathrm{var}\,\{x^n y^2 x = x^n y^3 x\}.$$

Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно и $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, имеет место равенство

$$(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y} = (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}.$$

Заметим, что в многообразии $\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$. В самом деле,

$$\begin{aligned}
x^n y^2 x &= x^n y^3 x && \text{в многообразии } \mathcal{Z},\\
&= \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x && \text{в многообразии } \mathcal{Y},\\
&= \overline{\overline{x^n}} \cdot \overline{x^n}\, x^n y^3 x && \text{так как } \overline{x^n}\, x^n \text{ — единица в группе, содержащей } \overline{\overline{x^n}},\\
&= \overline{\overline{x^n}} \cdot \overline{x^n}\, x^n y^2 x && \text{в многообразии } \mathcal{Z},\\
&= \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x && \text{так как } \overline{x^n}\, x^n \text{ — единица в группе, содержащей } \overline{\overline{x^n}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$ выполнено в $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}$, а значит, и в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$. Это означает, что существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$. В частности, существует слово w такое, что в одном из многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^n y^2 x = w$. Предположим сначала, что оно выполнено в $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$. Очевидно, что слова $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$ не содержат образов друг друга относительно эндоморфизмов абсолютно свободной унарной полугруппы. Следовательно, из тождества $x^n y^2 x = x^n y^3 x$ невозможно вывести никакое тождество вида $x^n y^2 x = w$, где w отлично от слов $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$. В частности, никакое тождество такого вида не выполнено в $\mathcal{Z}$. Многообразие $\mathcal{V}$ непериодично и потому не удовлетворяет тождеству $x^n y^2 x = x^n y^3 x$. Следовательно, многообразие $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству вида $x^n y^2 x = w$. Противоречие. Очевидно, что тождество $x^n y^3 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x$ выполнено в многообразии $\mathcal{AG}$ и потому многообразие $\mathcal{Y}$ не периодично. Рассуждая так же, как выше, получаем, что если слово w отлично от слов $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$, то никакое нетривиальное тождество вида $x^n y^2 x = w$ не выполняется в многообразии $\mathcal{Y}$. Следовательно, никакое тождество такого вида не выполнено и в многообразии $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$.

В частности, в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$ не выполнено тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. □

Обозначим через **Per** решетку всех многообразий периодических полугрупп. Ясно, что **Per** является подрешеткой в **EPI**. Формулировка следующего утверждения почти дословно повторяет формулировку леммы 3.1 работы [8]. Однако, нам необходима некоторая модификация терминов, используемых в [8]. А именно, мы будем называть слова u и v *эквивалентными*, если u совпадает с образом слова v относительно некоторого автоморфизма абсолютно свободной унарной полугруппы.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *а u, v, s и t –– попарно неэквивалентные слова одной и той же длины, зависящие от одних и тех же букв. Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $u = v$ и $s = t$, то оно удовлетворяет также и тождеству $u = s$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 2 многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, оно является нижнемодулярным элементом решетки **Per**. В то же время, дословно повторяя доказательство леммы 3.1 работы [8], можно показать, что если заключение леммы не выполнено, то $\mathcal{V}$ не нижнемодулярно в **Per**. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. *Достаточность* непосредственно вытекает из леммы 3 и предложения 1.

Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярный элемент в решетке **EPI**. Согласно предложению 2 $\mathcal{V}$ периодично. В [8, предложение 3.3] доказано, что если многообразие периодических полугрупп является нижнемодулярным элементом решетки **SEM**, то оно есть объединение одного из многообразий $\mathcal{T}$ или $\mathcal{SL}$ и 0-приведенного многообразия. Дословно повторяя доказательство этого утверждения, но используя предложение 2.6 работы [9] вместо леммы 2.6 статьи [8] и лемму 4 настоящей работы вместо леммы 3.1 статьи [8], мы можем заключить, что многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ обладает тем же свойством. □

3. Следствия и вопросы

Сравнение теоремы 2 с теоремой 1.2 работы [1] показывает, что справедливо

Следствие 1. *Строго перестановочное периодическое многообразие полугрупп является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда оно является кодистрибутивным элементом решетки* **SEM**. □

Вопрос о том, можно ли в этом следствии отказаться от требования строгой перестановочности многообразия, остается открытым. Сформулируем его в явном виде.

В о п р о с 1. Верно ли, что произвольное периодическое многообразие полугрупп является кодистрибутивным элементом решетки **EPI** тогда и только тогда, когда оно является кодистрибутивным элементом решетки **SEM**?

Из теоремы 1 вытекает следующий эпигрупповой аналог следствия 1.1 работы [1].

Следствие 2. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся костандартным элементом решетки* **EPI**, *является стандартным элементом этой решетки.* □

Сравнение теоремы 1 с теоремой 1.3 работы [1], показывает, что верно

Следствие 3. *Для периодического многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **EPI**;
б) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **EPI**;
в) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **SEM**;
г) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **SEM**. □

Сравнивая теорему 3 с теоремой 1.1 работы [10], мы получаем

Следствие 4. *Периодическое многообразие полугрупп является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда оно является нижнемодулярным элементом решетки* **SEM**. □

Из теоремы 3, предложения 1 и леммы 3 вытекает следующий эпигрупповой аналог следствия 1.2 работы [10].

Следствие 5. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *является модулярным элементом этой решетки.* □

Напомним, что многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом*, если квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ является вполне регулярной полугруппой. В [1, теорема 1.1] показано, что всякое собственное кодистрибутивное в **SEM** многообразие полугрупп является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. Это делает естественным

В о п р о с 2. Верно ли, что произвольное многообразие эпигрупп, являющееся кодистрибутивным элементом решетки **EPI**, является многообразием эпигрупп с вполне регулярным квадратом?

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Б.М. Верникову за постоянное внимание, поддержку и помощь, оказанную на всех этапах выполнения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верников Б.М.** Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 13–21.
2. **Верников Б.М., Волков М.В.** Решетки нильпотентных многообразий полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1988. С. 53–65.
3. **Скоков Д.В.** Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 723–731.
4. **Шапрынский В.Ю.** Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 67–79.
5. **Шеврин Л.Н.** К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.
6. **Grätzer G.** Lattice Theory: Foundation. Birkhäuser: Springer Basel AG, 2011. 614 p.
7. **Gusev S.V., Vernikov B.M.** Endomorphisms of the lattice of epigroup varieties [e-resource]. URL: http://arxiv.org/abs/1404.0478v3. 22 p.
8. **Shaprynskiĭ V.Yu.** Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties // Semigroup Forum. 2012. Vol. 85, no. 1. P. 97–110.
9. **Shaprynskiĭ V.Yu., Skokov D.V., Vernikov B.M.** Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis. 2016. Vol. 76, iss. 1. P. 1–30.
10. **Shaprynskiĭ V.Yu., Vernikov B.M.** Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, no. 3–4. P. 371–382.

Скоков Дмитрий Вячеславович
ассистент
Институт математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dmitry.skokov@gmail.com

Поступила 24.07.2015