ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$[1]

И. Н. Белоусов

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$. Показано, что если Γ — вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, то его группа автоморфизмов является $\{2, 3, 5\}$-группой.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$.

We find possible orders and fixed point subgraphs of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$. It is shown that, if Γ is a vertex-symmetric graph with intersection array $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, then its automorphism group is a $\{2, 3, 5\}$-group.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-23-30

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u, u^g) = i$.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (99,14,1,2).

Предложение [1, теорема]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ — *антиподальный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$ *или* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ *и спектром* $99^1, \sqrt{99}^{300}, -1^{99}, -\sqrt{99}^{300}$ *или* $99^1, 11^{315}, -1^{99}, -9^{385}$ *соответствено*;

(2) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$ *и спектром* 99^1, $27^{141}, 5^{1080}, -9^{1034}$.

В данной работе изучаются возможные порядки и подграфы неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ имеет $v = 1 + 99 + 693 + 7 = 800$ вершин. Ввиду границы Хофмана — Дельсарта максимальный порядок клики из Γ не больше $1 - k/\theta_d = 12$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) $s = 0$ *и либо*

(i) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100l$, $\alpha_2(g) = 800 - 100l$, $\alpha_3(g) = 0$, *где* $0 \le l \le 8$, *либо*

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ *для некоторого* $0 \le l \le 50$;

(2) $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$;

(3) $p = 7$, *подграф* Ω *является t-кликой и либо*

(i) $t = 2$, $\alpha_3(g) = 14$, $\alpha_1(g) = 140l + 98$ *для некоторого целого числа* l, *либо*

(ii) $t = 9$, $\alpha_3(g) = 63$, $\alpha_1(g) = 140l - 49$;

(4) $p = 5$, $s = 3$, $\alpha_0(g) = 3t$ *и* $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$;

(5) $p = 3$ *и либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, *либо*

(ii) $s = 5$ *и* $t \in \{1, 4, 7, \ldots, 22\}$, *либо*

(iii) $s = 8$ *и* $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$;

(6) $p = 2$, *t четно и либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \le 28$, *либо*

(ii) $s = 4$ *и* $t \le 28$, *либо*

(iii) $s = 6$ *и* $t \le 18$, *либо*

(iv) $s = 8$ *и* $t \le 12$.

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по $s > 0$ вершин в t антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$;

(2) $p = 7$, *подграф* Ω *является 2-кликой*;

(3) $p = 3$ *и* $t = 1$ *или* $t = 4$ *и* Ω *является объединением изолированных* 4*-клик*;
(4) $p = 2$ *и* $t = 2$.

Следствие. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$*, группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ*. Тогда* G *является* $\{2, 3, 5\}$*-группой.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [2]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P, а $m_j u_j$ — строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$, где $v = |\Gamma|$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [2, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$.

Лемма 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*. Если* $g \in G$*,* χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 315*,* χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 99*, то* $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5$*,* $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$*. Если* $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_1(g) - 315$ *и* $\chi_2(g) - 99$ *делится на* p*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 99 & 14 & 12 & 0 \\ 0 & 84 & 86 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1) = 11$. Тогда

$$P_1 - 11I = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 99 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 84 & 75 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Если $(1, u_2, u_3, u_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1 - 11I$, то $u_2 = 1/9$, $u_3 = -1/63$ и $u_4 = -1/7$. Отсюда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 315 & 35 & -5 & -45 \\ 99 & -1 & -1 & 99 \\ 385 & -35 & 5 & -55 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (63\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/160$. Подставляя $\alpha_2(g) = 800 - \alpha_1(g) - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5$.

Аналогично $\chi_2(g) = (99\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 99\alpha_3(g))/800$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из утверждения 3 [3, лемма 2].

Лемма доказана.

Лемма 2 [4, теорема 1]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и* $p \in \{3, 11\}$;

(2) $|\Omega| = 1$ *и* $p \in \{2, 7\}$;

(3) Ω — *треугольник и* $p = 3$.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Напомним, что Γ содержит 100 антиподальных классов, в каждом из которых по 8 вершин.

З а м е ч а н и е. Если Ω пересекает антиподальные классы K и L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

В самом деле, вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 3. *Если* Ω — *пустой граф, то либо*

(i) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100l$, $\alpha_2(g) = 800 - 100l$, $\alpha_3(g) = 0$, *где* $0 \leq l \leq 8$, *либо*

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ *для некоторых* $0 \leq l \leq 50$ *и* $4l/5 - 20 \leq m \leq 4l/5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$. Так как $800 = 2^5 \cdot 5^2$, то $p = 5$ или 2.

Если $p = 5$ и $\alpha_3(g) \neq 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе, противоречие. Поэтому при $p = 5$ имеем $w_3 = 0$, $\chi_1(g) = w_1/4 - 5$; отсюда $w_1 = 20l$ и $w_2 = 160 - 20l$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 16l$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 16l)/20 - 5$ $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторых $0 \leq l \leq 50$ и $4l/5 - 20 \leq m \leq 4l/5$. Лемма доказана.

В леммах 4–7 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 7$, то g поточечно фиксирует содержащий a антиподальный класс, поэтому $\alpha_3(g) = 0$. Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда p делит $100 - t$ и $8 - s$. В случае $s = 8$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω. Пусть F — антиподальный класс, содержащий вершину a, $F \cap \Omega = \{a, a_2, \ldots, a_s\}$ и $e \in \Omega(a)$.

Лемма 4. *Если* $p \geq 7$, *то либо* $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$, *либо* $p = 7$, *подграф* Ω *является* t*-кликой и верно одно из утверждений*

(i) $t = 2$, $\alpha_3(g) = 14$, $\alpha_1(g) = 140l + 98$ *для некоторого целого числа* l;

(ii) $t = 9$, $\alpha_3(g) = 63$, $\alpha_1(g) = 140l - 49$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p > 13$, то для вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leq 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 16, 1; 1, 12, t - 1\}$, поэтому $t - 16 = 7 \cdot 12$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $100 - t$ делится на 13 и $t = 9$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) = 2$, число $|\Omega(a) \cap [c]|$ равно 12. Поэтому $\Omega(e)$ содержит не менее двух вершин из $a^\perp$ и по 12 вершин из $[a_2], \ldots, [a_s]$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $100 - t$ делится на 11 и $t \in \{1, 12\}$. Пусть $t = 12$. Тогда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{11, 7, 1; 1, 1, 11\}$, противоречие с условием целочисленности.

Значит, $t = 1$. Тогда $\chi_1(g) = (64 + 11w_1)/20 - 5$, поэтому $w_1 = 20l - 4$.

$\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5 = (8 + \alpha_1(g))/20 - 5$ и ввиду леммы 1 число $(8 + \alpha_1(g))/20 - 5 - 315$ делится на 11, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $100 - t$ делится на 7 и $s \in \{1, 8\}$. При $s = 8$ вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leq 14$. Тогда $\Omega(e)$ содержит a и не менее чем по 5 вершин из $[a_2], \ldots, [a_s]$, противоречие. Поэтому $s = 1$ и Ω является t-кликой. Ввиду границы Хофмана — Дельсарта имеем $t \in \{2, 9\}$.

При $t = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 14$, $\chi_1(g) = (16 + 7w_1 - 14)/20 - 5$ и $\alpha_1(g) = 140l + 98$ для некоторого целого числа l.

При $t = 9$ имеем $\alpha_3(g) = 63$, $\chi_1(g) = (72 + 7w_1 - 63)/20 - 5$ и $\alpha_1(g) = 140l - 49$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если* $p = 5$, *то* $s = 3$, $\alpha_0(g) = 3t$ *и* $t = 15, 20, \ldots, 35$;
(2) *если* $p = 3$, *то либо*
 (i) $s = 2$ *и* $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, *либо*
 (ii) $s = 5$ *и* $t \in \{1, 4, 7, \ldots, 22\}$, *либо*
 (iii) $s = 8$ *и* $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 5$. Тогда t делится на 5 и $s \in \{3, 8\}$.

Пусть $s = 8$. Тогда вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leq 14$. Далее, $\Omega(e)$ содержит 5 вершин из $a^{\perp}$ и не менее чем по 2 вершины из $[a_2], \ldots, [a_s]$, противоречие.

Пусть $s = 3$. Тогда $t = 5l$ и $\alpha_3(g) = 5t$. Далее, $\Omega(e)$ содержит не менее 9 вершин. С другой стороны, $\Omega(e)$ содержит не более 15 вершин из $a^{\perp}$ и не более 12 вершин из $[a_i]$, поэтому $2 \leq l \leq 8$. Если $l = 2$, то Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{9, 4, 1; 1, 2, 9\}$, противоречие с тем, что граф с таким массивом пересечений не существует. Если $l = 8$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 24, 1; 1, 12, 39\}$, противоречие с тем, что граф с таким массивом пересечений не существует.

Пусть $p = 3$. Тогда $s \in \{2, 5, 8\}$ и $t - 1$ делится на 3. В случае $s = 8$ вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 14$.

Пусть $s = 5$. Тогда $\Omega(e)$ содержит кратное 3 число вершин из $a^{\perp}$ и кратное 3 число вершин из $[a_2], \ldots, [a_s]$, поэтому $t \geq 4$ и если $t = 4$, то Ω — объединение пяти изолированных 4-клик. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \leq 22$.

В случае $s = 2$ имеем $|\Omega(e) \cap a^{\perp}| + |\Omega(e) \cap [a_2]| = t - 1$, поэтому $t \leq 28$. Если $t = 28$, то Ω — граф Тэйлора с массивом пересечений $\{27, 12, 1; 1, 12, 27\}$, и $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(27, 14, 7, 7)$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $p = 2$, *то* t *четно и либо*
 (i) $s = 2$ *и* $t \leq 28$, *либо*
 (ii) $s = 4$ *и* $t \leq 28$, *либо*
 (iii) $s = 6$ *и* $t \leq 18$, *либо*
 (iv) $s = 8$ *и* $t \leq 12$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 2$. Тогда t четно и для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ число $[u] \cap \Omega$ четно. Далее, $s \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Пусть $s = 2$. Тогда $|\Omega(e) \cap a^{\perp}| + |\Omega(e) \cap [a_2]| = t - 1$, поэтому $t \leq 28$.

Пусть $s = 4$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \leq 28$.

Пусть $s = 6$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $6t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \le 18$.

Пусть $s = 8$. Тогда вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \le 14$. Если $t = 14$, то $\alpha_2(g) = 0$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (64 \cdot 14 + 688)/20 - 5$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3–6 следует теорема 1.

Доказательство теремы 2 вытекает из леммы 2 и теоремы 1.

3. Граф с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ не является реберно симметричным

До конца раздела предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 800$ и $|G : G_{\{F\}}| = 100$ для антиподального класса F. Из теоремы следует, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$, причем $|G|$ не делится на 49 и на 121.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка r из G, g — элемент простого порядка $p < r$ из $C_G(f)$. Тогда*

(1) *если $r = 11$, то $p = 2$, $t = 12$, $s \in \{2, 4, 6, 8\}$, $\alpha_1(g) = 40l - 108s + 96$ и $s - 2l + 4$ делится на 11;*

(2) *если $r = 7$, то либо $p = 3$, $s = 9$, $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов, $n = 0, t = 7$ или $n = 3, t = 10$, или $n = 6, t = 13$, либо $p = 2$ и*

(i) *Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторого l, кратного 7, $40m + 2$ делится на 7, или*

(ii) *$\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой и $t = 2$, или*

(iii) *$\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов и либо $n = 1, t = 8$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 5, t = 12$;*

(3) *если $r = 7$, то $|C_G(f) : C_G(f)_a|$ не делится на 4 для $a \in \mathrm{Fix}(f)$.*

Доказательство. Пусть $r = 11$. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ — антиподальный класс и $\alpha_1(f) = 220l - 44$.

Если $p = 7$, то Ω является t-кликой, $t \in \{2, 9\}$ и 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 5$, то $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$ и 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 3$, то либо $s = 2$ и $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, либо $s = 5$ и $t = 1, 4, 7, \ldots, 22$, либо $s = 8$ и $t = 1, 4, 7, 10, 13$. В любом случае 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 2$, то t четно и либо $s = 2$ и $t \le 28$, либо $s = 4$ и $t \le 28$, либо $s = 6$ и $t \le 18$, либо $s = 8$ и $t \le 12$. Отсюда $t = 12$ и $s = 2, 4, 6, 8$. Далее, $\chi_1(g) = (96s + \alpha_1(g) - 12(8 - s))/20 - 5$ и $108s + \alpha_1(g) - 96$ делится на 40. Поэтому $\alpha_1(g) = 40l - 108s + 96$ делится на 22. Отсюда $s - 2l + 4$ делится на 11.

Пусть $r = 7$. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ является e-кликой, $e = 2, 9$.

Если $p = 5$, то $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$. Далее, g фиксирует антиподальный класс F, пересекающий $\mathrm{Fix}(f)$, противоречие с тем, что $s = 3$.

Если $p = 3$, то $s - 1$ делится на 7, поэтому $s = 8$ и $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$. Так как 7 не делит $t - 2$, то $e = 9$. Пусть $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов. Тогда 3 делит $9 - n$ и 7 делит $t - n$, поэтому либо $n = 0, t = 7$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 6, t = 13$.

Допустим, что $|C_G(f)|$ делится на 9. Если $C_G(f)$ содержит элемент h порядка 9, то можно считать, что $h^3 = g$. Так как S_7 не содержит элементов порядка 9, то $n = 0, t = 7$. Противоречие с тем, что 93 не делится на 9. Пусть $C_G(f)$ содержит элементарную абелеву подгруппу $W = \langle g, h \rangle$ порядка 9. Тогда h фиксирует антиподальнй класс из Ω, не пересекающий $\mathrm{Fix}(f)$. Поэтому W действует полурегулярно на $\Gamma - (\mathrm{Fix}(f) \cup \Omega)$, противоречие с тем, что 9 не делит 84.

Если $p = 2$, то либо Ω — пустой граф и $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой, либо $s = 8$ и $t \in \{2, 4, 8, 10, 12\}$.

В первом случае $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторого l, кратного 7, причем $40m + 2$ делится на 7.

Во втором случае либо $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой и $t = 2$, либо $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов. Тогда 2 делит $9-n$ и 7 делит $t-n$, поэтому либо $n = 1, t = 8$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 5, t = 12$.

Допустим, что $|C_G(f) : C_G(f)_a|$ делится на 4. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой. Противоречие с тем, что силовская 2-подгруппа из $C_G(f)$ фиксирует точку из $\mathrm{Fix}(f)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если G — неразрешимая группа, $\bar{G} = G/S(G)$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *$S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой*;

(2) *если $|G|$ не делится на 7 и на 11, то каждая компонента группы $\bar{G}$ изоморфна A_5, A_6, $PSp_4(3)$*;

(3) *если $|G|$ делится на 7, но не делится на 11, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ изоморфен $L_2(7)$, $L_2(8), U_3(3)$, A_n, $n \in \{7, 8, 9, 10\}$, $U_3(5), L_3(4), J_2, U_4(3), Sp_6(2), \Omega_8^+(2)$*;

(4) *если $|G|$ делится на 11, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, $U_5(2)$, McL, HS, $U_6(2)$.*

Доказательство. Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой.

Пусть $|G|$ не делится на 11, $\bar{L}$ — компонента группы $\bar{G}$. Если $|L|$ не делится на 7, то группа $\bar{L}$ изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$.

Если $|G|$ делится на 7, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ — простая неабелева группа. Если $|\bar{T}|$ не делится на 5, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$.

Если же $|\bar{T}|$ делится на 35, то ввиду [5, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_n, $n = 7, 8, 9, 10$, $U_3(5), L_3(4), J_2, U_4(3), Sp_6(2), \Omega_8^+(2)$.

Пусть $|G|$ делится на 11. Тогда цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ — простая неабелева группа. Ввиду [5, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11), M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, U_5(2), McL, HS, U_6(2)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $|G|$ делится на 7 или на 11, то $S(G)$ является 2-группой, $\bar{T} \cong U_3(5)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$ и $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $|G|$ делится на 11. Заметим, что группы $L_2(11), M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, U_5(2), McL, U_6(2)$ не содержат подгрупп индекса, делящего 100. Группа Хигмена — Симса HS содержит подгруппу индекса 100, изоморфную M_{22}. В этом случае $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, поэтому $|S(G)|$ делит 8. Далее, либо $|S(G) : S(G)_a| = 8$, либо $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}(HS)$, $\bar{G}_a \cong M_{22}$ и $|S(G) : S(G)_a| = 4$. В любом случае имеем противоречие с тем, что элемент порядка 7 из G поточечно фиксирует антиподальный класс.

Пусть $|G|$ делится на 7, но не делится на 11. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 100, то либо

(1) $\bar{T} \cong A_{10}$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_9$, либо

(2) $\bar{T} \cong U_3(5)$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$, либо

(3) $\bar{T} \cong J_2$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong U_3(3)$.

Если $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то $|S(G)|$ делит 8. В случаях (1,3) имеем противоречие с тем, что элемент порядка 7 из G поточечно фиксирует антиподальный класс. В частности, случай (3) не возникает.

В случае (2) число $|S(G) : S(G)_{\{F\}}|$ делит 2, поэтому $S(G)$ является 2-группой. Далее, A_7 фиксирует вершину $a \in F$ и, естественно, действует на оставшихся 7 вершинах. Если $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то $|S(G)| = 8$, $\bar{G} \cong U_3(5).Z_2$ и $\bar{G}_{\{F\}} \cong A_7$. Компьютерные вычисления показывают, что построенный граф не является дистанционно регулярным.

В случае (1) число $|S(G):S(G)_{\{F\}}|$ делится на 5. Поэтому $S(G)$ содержит главный фактор V группы G, являющийся 5-группой, причем $C_V(f)=1$ для элемента f порядка 7 из G. Противоречие с тем, что $|V:V_{\{F\}}|=5,25$ и $V_{\{F\}}$ допускает f. Лемма доказана.

Доказательство следствия. Имеем $|\bar{G}:\bar{G}_{\{F\}}|=50$, поэтому $|S(G):S(G)_a|=4,8$. Из лемм 8, 9 и действия элемента $f\in G_a$ порядка 7 на $S(G)$ следует, что $|S(G):S(G)_a|=8$ и $C_{S(G)}(f)\le S(G)_a$ для любой вершины $a\in \mathrm{Fix}(f)$. Если $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой, то $\mathrm{Fix}(z)$ является объединением двух антиподальных классов, пересекающих $\mathrm{Fix}(f)$ для любой инволюции $z\in S(G)_a$. Так как 98 не делится на 4, то $|S(G)_a|$ делит 2, противоречие. Если $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, то $\mathrm{Fix}(z)$ содержит объединение девяти антиподальных классов, пересекающих $\mathrm{Fix}(f)$. Противоречие с леммой 7. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (99,14,1,2) // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 6. С. 606–609.
2. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
3. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
4. **Махнев А.А., Минакова И.М.** Об автоморфизмах графов с $\lambda=1$, $\mu=2$ // Дискрет. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 95–104.
5. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru

Поступила 22.04.2016