ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.853

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ НЕВЯЗКИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

В. Д. Скарин

Для коррекции несобственных задач выпуклого программирования применяется стандартная процедура регуляризации некорректных моделей оптимизации — метод невязки. Предлагаются новые итерационные реализации метода невязки, в которых ограничения задачи агрегируются с помощью штрафных функций. Устанавливаются условия сходимости алгоритмических схем, определяются оценки точности аппроксимации.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод невязки, методы штрафных функций.

V. D. Skarin. On the choice of parameters in the residual method for optimal correction of improper problems of convex optimization.

For the correction of improper problems of convex programming, the residual method is used, which is the standard regularization procedure for ill-defined optimization models. We propose new iterative implementations of the residual method, in which the constraints of the problem are included by means of penalty functions. New convergence conditions are established for algorithmic schemes, and bounds are found for the approximation error.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, residual method, penalty function methods.

MSC: 90C25, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-231-243

Введение

Данная работа развивает исследования из [1], связанные с применением одного из распространенных методов регуляризации некорректно поставленных задач условной оптимизации — метода невязки [2] — для целей коррекции задач выпуклого программирования (ВП) с противоречивой системой ограничений.

Интерес к противоречивым моделям, которые составляют важнейший класс несобственных задач (НЗ) [3], обусловлен, прежде всего, практическими соображениями, а именно частотой их появления при моделировании конкретных постановок из области исследования операций. Поэтому продолжает оставаться актуальной проблема разработки теории и методов численной аппроксимации (коррекции) НЗ ВП, т. е. нахождение близкой, в определенном смысле разрешимой, задачи, решение которой принимается за обобщенное решение несобственной постановки (в этой связи можно отметить, например, работы [4–6] по коррекции НЗ линейного программирования (ЛП) и [7] по аппроксимации НЗ ВП). Близко к проблематике НЗ стоят работы [8; 9] по анализу совместности системы ограничений в задаче ЛП, а также [10] по обработке экспериментальных данных с помощью обобщенного метода наименьших квадратов (TLS — Total Least Squares). Последний метод может рассматриваться как способ матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств по минимуму евклидовой нормы [11; 12].

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

Поскольку задачи с несовместной системой ограничений часто возникают вследствие погрешностей в определении исходных данных, что тесно связано с исследованием устойчивости решений, то такие проблемы представляют интерес для теории и методов некорректных задач оптимизации [2;13–15]. Поэтому при анализе несобственных задач имеет смысл рассматривать стандартные способы регуляризации некорректных моделей, одним из которых и является метод невязки.

Аналогично [1] в работе рассматриваются два подхода в применении метода невязки к анализу НЗ ВП. Первый из них использует для учета ограничений в типовой модели метода невязки квадратичную штрафную функцию, второй — точную штрафную функцию. Особенности структуры штрафной функции обуславливают форму оптимальной коррекции НЗ ВП. В одном случае она определяется минимумом евклидовой нормы невязки ограничений, в другом — октаэдрической нормы. Основное внимание при этом уделяется построению итерационных алгоритмов, основанных на применении отмеченных штрафных функций. Отыскиваются условия согласования параметров предлагаемых процедур, обеспечивающих их сходимость к решению аппроксимирующей задачи.

1. Несобственная задача ВП, метод невязки

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Один из классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач — метод невязки — состоит [1] в решении последовательности задач

$$\min\{\|x\|^2 \mid x \in X \cap M_\delta\}, \tag{2}$$

где δ — параметр регуляризации, $\delta \ge \bar{f}$, $M_\delta = \{x \mid f_0(x) \le \delta\}$, $\bar{f}$ — оптимальное значение задачи (1). Если задача (1) разрешима, то для любого δ задача (2) имеет единственное решение $\bar{x}_\delta$. Так как $M_{\delta_1} \supset M_{\delta_2} \supset \ldots \supset M_{\bar{f}}$ при $\delta_1 \ge \delta_2$, то $\|\bar{x}_{\delta_1}\| \le \|\bar{x}_{\delta_2}\| \le \ldots \le \|\bar{\bar{x}}\|$, где $\bar{\bar{x}}$ — решение (1) с минимальной нормой (нормальное решение). Таким образом, все точки $\bar{x}_\delta$ лежат в компактном множестве $\{x \mid \|x\| \le \|\bar{\bar{x}}\|\}$. Пусть $\tilde{x}$ — предельная точка последовательности $\{\bar{x}_\delta\}$ при $\delta \to \bar{f}$. Очевидно, $\tilde{x} \in X$, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$ и $\|\tilde{x}\| \le \|\bar{\bar{x}}\|$. Из единственности $\bar{\bar{x}}$ следует $\tilde{x} = \bar{\bar{x}}$ и $\lim\limits_{\delta \to \bar{f}} \bar{x}_\delta = \bar{\bar{x}}$.

Далее будем предполагать, что система ограничений задачи (1) может быть несовместной, т. е. возможен случай $X = \varnothing$. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Если для (1) $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, то такие задачи принято называть [3] *несобственными задачами* ВП 1-го рода. Эти задачи наиболее распространены на практике, и для них характерно следующее свойство: если вместо X взять $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, так чтобы стало $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_\xi\} > -\infty$.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП состоит в замене (1) задачей

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}}\}, \tag{3}$$

где $\bar{\xi} = \arg\min\{\|\xi\| \mid \xi \in \mathbb{R}^m_+,\ X_\xi \ne \varnothing\}$. Если в (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar{\xi} = 0$ и задачи (1) и (3) совпадают. В противном случае решение (3) принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение НЗ (1). Существование и единственность вектора $\bar{\xi}$ обеспечивает, например, требование непустоты и ограниченности множества X_ξ для некоторого $\xi = \xi_0$. В дальнейшем, не оговаривая отдельно, будем считать условие ограниченности X_{ξ_0} выполненным. Нетрудно видеть, что $\bar{\xi} = f^+(\bar{x})$, где $\bar{x} \in \bar{X} = \operatorname{Arg}\min g(x)$, $g(x) = \|f^+(x)\|^2$, при этом $\bar{X} = X_{\bar{\xi}}$.

2. Применение квадратичной штрафной функции

Рассмотрим вопрос о связи между НЗ ВП (1) и задачей (2), при этом вместо (1) будет выступать ее аппроксимация (3). Ограничения задачи (2) будем учитывать с помощью квадратичной штрафной функции (КШФ)

$$F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^+(x)\|^2 + \rho_0(f_0(x)-\delta)^{+^2}, \qquad r=[\rho,\rho_0]>0, \qquad \delta\in\mathbb{R}^1.$$

Функция $F_\delta(x,r)$ сильно выпуклая по x на $\mathbb{R}^n$, поэтому задача

$$\min_x F_\delta(x,r)$$

разрешима в единственной точке $\bar{x}_{r,\delta}$ для любых $r\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ и $\delta\in\mathbb{R}^1$, в том числе и при $X=\varnothing$, в отличие от задачи (2). Это обстоятельство и позволяет использовать функцию $F_\delta(x,r)$ для анализа НЗ ВП.

Пусть в задаче (1) (соответственно и в (2)) вместо $f_i(x)$ известны непрерывные функции $f_i^\varepsilon(x)$, определенные на $\mathbb{R}^n$, такие что

$$|f_i(x)-f_i^\varepsilon(x)|<\varepsilon \qquad (\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\ i=0,1,\dots,m), \qquad \varepsilon>0.$$

Тогда метод невязки для задачи (1) сведется к проблеме отыскания точек

$$\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta} = \arg\min_x F^\varepsilon_\delta(x,r), \tag{4}$$

где $F^\varepsilon_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2 + \rho_0(f_0^\varepsilon(x)-\delta)^{+^2}$, $r=[\rho,\rho_0]>0$, $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}^1$, $\varepsilon>0$. Задача (4) разрешима для любых r,ε,δ (см. [7, лемма 1]).

Сходимость метода невязки в данном случае характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* (1) *— НЗ ВП* 1*-го рода,* $\bar{x}$ *— решение задачи* (3)*,* $\bar{f}=f_0(\bar{x})$*,* $\Delta=\bar{f}-\delta$*. Тогда для любых* $r=[\rho,\rho_0]>0$*,* $\delta\in\mathbb{R}^1$*,* $0<\varepsilon\le 1$ *справедливы оценки*

$$\|(f^\varepsilon(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\bar{\xi})^+\| \le \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,B(r,\delta,\varepsilon), \tag{5}$$

$$f_0^\varepsilon(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}) \le \bar{f} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\,B(r,\delta,\varepsilon) - \Delta, \tag{6}$$

$$\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\| \le B(r,\delta,\varepsilon), \tag{7}$$

где $B(r,\delta,\varepsilon) = \left[\|\bar{x}\|^2 + \varepsilon\rho(4\,\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2\right]^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки $\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}$ следует

$$\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})\|^2 + \rho_0(f_0^\varepsilon(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\delta)^{+^2} \le \|\bar{x}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x})\|^2 + \rho_0(f_0^\varepsilon(\bar{x})-\delta)^{+^2}.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$|f_i^{\varepsilon^+}(\bar{x}) - f_i^+(\bar{x})| \le |f_i^\varepsilon(\bar{x}) - f_i(\bar{x})| < \varepsilon, \qquad i=1,\dots,m,$$

$$|(f_0^\varepsilon(\bar{x})-\delta)^+ - (f_0(\bar{x})-\delta)^+| \le |f_0^\varepsilon(\bar{x}) - f_0(\bar{x})| < \varepsilon,$$

имеем

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})\|^2 + \rho_0(f_0^\varepsilon(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\delta)^{+^2} \\ &\le \|\bar{x}\|^2 + \rho\|\bar{\xi}\|^2 + \rho\varepsilon(2\,\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Оценим разность $\|\bar\xi\|^2 - \|f^{\varepsilon^+}(\bar x^\varepsilon_{r,\delta})\|^2$. Так как $\bar x \in \bar X$, то $0 \in \partial g(\bar x)$, где $\partial g(\bar x)$ — субдифференциал функции $g(x)$ в точке $\bar x$. По правилам субдифференцирования выпуклых функций найдутся субградиенты $\bar e_i(\bar x)$ функции $f_i(x)$ в точке $\bar x$, такие что $0 = 2\sum\limits_{i=1}^m f_i^+(\bar x)\bar e_i(\bar x) = 2\sum\limits_{i=1}^m \bar\xi_i \bar e_i(\bar x)$ (здесь $\bar\xi_i$ — i-я компонента вектора $\bar\xi$ $(i=1,\dots,m)$). Из выпуклости функций $f_i(x)$, $i=1,\dots,m$, получаем

$$\sum_{i=1}^m \bar\xi_i f_i(\bar x) \le \sum_{i=1}^m \bar\xi_i f_i(x) + \sum_{i=1}^m \bar\xi_i(\bar e_i(\bar x), \bar x - x),$$

$$\|\bar\xi\|^2 = (\bar\xi, f(\bar x)) \le (\bar\xi, f(x)) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Далее применим неравенство $(a-b)^{+^2} \le (a^+ - b)^2$, справедливое для любых действительных чисел a и b. С учетом (9) для произвольного $x' \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\|(f^\varepsilon(x') - \bar\xi)^+\|^2 \le \|f^{\varepsilon^+}(x') - \bar\xi\|^2 = \|(f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - 2(\bar\xi, f^{\varepsilon^+}(x')) + \|\bar\xi\|^2$$
$$< \|f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - 2(\bar\xi, f^+(x')) + 2\varepsilon\|\bar\xi\|_1 + \|\bar\xi\|^2 \le \|f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - \|\bar\xi\|^2 + 2\varepsilon\|\bar\xi\|_1. \tag{10}$$

Следовательно, при $x' = \bar x$ справедливы неравенства

$$\|(f^\varepsilon(\bar x) - \bar\xi)^+\|^2 - 2\varepsilon\|\bar\xi\|_1 \le \|f^{\varepsilon^+}(\bar x)\|^2 - \|\bar\xi\|^2, \tag{11}$$

$$\|\bar\xi\|^2 - \|f^{\varepsilon^+}(\bar x)\|^2 \le 2\varepsilon\|\bar\xi\|_1. \tag{12}$$

Используя неравенства (11), (12), из (8) сразу получаем оценки (5) и (7). Из неравенства (8) следует, что $\rho_0(f_0^\varepsilon(\bar x^\varepsilon_{r,\delta}) - \delta)^{+^2} \le B(r,\delta,\varepsilon)$. Но $f_0^\varepsilon(\bar x^\varepsilon_{r,\delta}) - \bar f \le (f_0^\varepsilon(\bar x^\varepsilon_{r,\delta}) - \delta)^+ - \Delta$, поэтому справедлива и оценка (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть в задаче* (4) $\rho \to \infty$, $\rho_0 \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\Delta \to 0$, $\varepsilon\rho \to 0$, $\rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2 \to 0$. *Тогда* $\bar x^\varepsilon_{r,\delta} \to \bar{\bar x}$, *где* $\bar{\bar x}$ — *нормальное решение задачи* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть $\bar x = \bar{\bar x}$. При сформулированных условиях на поведение параметров r, δ, ε имеет место равенство $\lim B(r,\delta,\varepsilon) = \|\bar{\bar x}\|$. Поэтому из (7) следует ограниченность последовательности $\{\bar x^\varepsilon_{r,\delta}\}$. Обозначим черех $\tilde x$ ее предельную точку. Принимая во внимание оценки (5)–(7), получаем $\tilde x \in X_{\bar\xi} \cap M_{\bar f}$, $\|\tilde x\| = \|\bar{\bar x}\|$. Поскольку $\bar{\bar x}$ — единственное нормальное решение задачи (3), то $\tilde x = \bar{\bar x}$ и $\lim \bar x^\varepsilon_{r,\delta} = \bar{\bar x}$. □

Следствие 2. *Пусть существует* $[\bar{\bar x}, \bar\lambda]$ — *седловая точка функции* $L_\xi(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar\xi)$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. *Тогда наряду с* (6) *справедливо неравенство*

$$\bar f - f_0^\varepsilon(\bar x^\varepsilon_{r,\delta}) \le \frac{\|\bar\lambda\|}{\sqrt{\rho}}\, B(r,\delta,\varepsilon) + \varepsilon(1 + \|\bar\lambda\|_1). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по определению точки $[\bar{\bar x}, \bar\lambda]$ для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место соотношения

$$\bar f = f_0(\bar{\bar x}) \le f_0(x) + (\bar\lambda, f(x) - \bar\xi) < f_0^\varepsilon(x) + (\bar\lambda, (f^\varepsilon(x) - \bar\xi)^+) + \varepsilon(1 + \|\bar\lambda\|_1). \tag{14}$$

Отсюда с учетом (5) получаем (13). □

3. Итеративный алгоритм коррекции НЗ ВП на базе квадратичного штрафа

Основная проблема в применении метода невязки состоит в необходимости обеспечения сходимости $\delta \to \bar{f}$. Из оценок (5)–(7) видно, что эта трудность возникает прежде всего тогда, когда $\Delta > 0$, т. е. когда $\delta < \bar{f}$. При этом задача (2) будет несобственной, даже если исходная задача (1) разрешима. В данном случае просматривается связь метода (4) с методом нагруженных функций [2] (методом параметризации целевой функции [16]). В последнем методе задаче (1) ставится в соответствие проблема отыскания

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, \delta), \tag{15}$$

где $\varphi(x,\delta) = \rho_0(f_0(x) - \delta)^{+p_0} + \rho \sum_{i=1}^{m} f_i^{+p_i}(x)$, $\delta \in \mathbb{R}^1$, $\delta < \bar{f}$ (p_i, ρ_0, ρ — параметры метода, $p_i \geq 1$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $\rho_0 > 0$, $\rho > 0$).

Метод нагруженных функций идейно близок к методам штрафных функций для решения задачи (1). Отличие состоит в том, что в методе (15) необязательно стремить параметры ρ_0 и ρ к $+\infty$; достаточно генерировать ограниченную последовательность значений δ, которая бы сходилась к оптимальному значению задачи (1), а соответствующая последовательность $x_\delta = \arg\min_x \varphi(x, \delta)$ сходилась бы к решению (1).

Ниже мы предложим алгоритм управления параметрами задачи (4) (прежде всего, параметром δ), обеспечивающий требуемые сходимости. На данный алгоритм можно смотреть как на итеративную схему метода невязки для НЗ ВП, а можно как на регуляризованный вариант метода нагруженных функций для коррекции НЗ ВП (см. также [17]).

Определим последовательность положительных чисел τ_k так, чтобы $\tau_k \searrow 0$ $(k \to \infty)$. Выберем начальное значение δ_0 параметра δ из условия $\delta_0 < \bar{f} - \tau_0$. Положим

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

где $\bar{x}_k = \arg\min F_k(x)$, $F_k(x) = \widetilde{F}_{\delta_k}^{\varepsilon_k}(x, r_k, \tau_k) = \|x\|^2 + \rho_k \|f^{\varepsilon_k^+}(x)\|^2 + \rho_k^0 (f_0^{\varepsilon_k}(x) - \delta_k - \tau_k)^+$, $r_k = [\rho_k, \rho_k^0] > 0$, $\varepsilon_k \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $L_{\bar{\xi}}(x, \lambda)$ *имеет седловую точку* $[\bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. *Предположим, что параметры* τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k *в алгоритме* (16) *выбраны так, чтобы*

$$\begin{gathered} \tau_k \searrow 0, \qquad \rho_k \nearrow +\infty, \qquad \rho_k^0 \nearrow +\infty, \qquad \frac{\rho_k^0}{\rho_k} \searrow 0, \qquad \varepsilon_k \searrow 0, \\ \rho_k \varepsilon_k \searrow 0, \qquad \sigma_k \equiv \rho_k^0(\tau_k - \tau_{k+1} - \varepsilon_k) \nearrow +\infty \qquad (k \to \infty). \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда $\lim_{k\to\infty} \delta_k = \bar{f}$ *и любая предельная точка последовательности* $\{\bar{x}_k\}$ *есть решение задачи* (3).

Если к тому же $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\rho_k^{0^2}}{\rho_k} = 0$, *то* $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{\bar{x}}$, *где* $\bar{\bar{x}}$ *— нормальное решение задачи* (3).

Доказательство. Из определения точки $\bar{x}_k$ имеем неравенство, аналогичное (8):

$$\begin{gathered} \|\bar{x}_k\|^2 + \rho_k \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2 + \rho_k^0 (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \\ \leq \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \rho_k(\|\bar{\xi}\|^2 + 2\varepsilon_k \|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k^2) + \rho_k^0(\bar{f} - \delta_k - \tau_k)^+ + \rho_k^0 \varepsilon_k. \end{gathered} \tag{18}$$

Из неравенства (10) при $x' = \bar{x}_k$ получим $\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2 \leq 2\varepsilon_k \|\bar{\xi}\|_1$. Поэтому из (18) следует

$$(f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \leq \frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2}{\rho_k^0} + (\bar{f} - \delta_k - \tau_k)^+ + \varepsilon_k + \frac{m\varepsilon_k + 4\|\bar{\xi}\|_1}{\rho_k^0} \varepsilon_k \rho_k. \tag{19}$$

В силу условий (17) начальные значения параметров $\varepsilon_0, \rho_0, \rho_0^0, \tau_0, \tau_1$ можно выбрать так, чтобы $\varepsilon_0 < 1$, $\rho_0\varepsilon_0 \le (m+4\|\bar{\xi}\|_1)^{-1}$, $\sigma_0 \ge \|\bar{\bar{x}}\|^2+1$. Тогда полагая в (19) $k=0$ и учитывая неравенство $\delta_0 < \bar{f} - \tau_0$, получим

$$\delta_1 = \delta_0 + (f_0^{\varepsilon_0}(\bar{x}_0) - \delta_0 - \tau_0)^+ \le \frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2}{\rho_0^0} + \bar{f} - \tau_0 + \varepsilon_0 + \frac{m+4\|\bar{\xi}\|_1}{\rho_0^0}\varepsilon_0\rho_0$$
$$\le \frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2+1}{\rho_0^0} + \bar{f} - \tau_0 + \varepsilon_0 \le \bar{f} - \tau_1.$$

Таким образом, если $\delta_k < \bar{f} - \tau_k$, то из (19) и монотонного характера сходимости последовательностей из (17) будет следовать $\delta_k \le \delta_{k+1} < \bar{f} - \tau_{k+1}$. Последнее же влечет наличие предела $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar{\delta}$, причем $\bar{\delta} \le \bar{f}$. Кроме того,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ = 0. \tag{20}$$

Далее, из (18) следует

$$\rho_k(\|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2) \le \rho_k^0(\bar{f} - f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)) + \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \rho_k\varepsilon_k(2\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k) + \rho_k^0\varepsilon_k. \tag{21}$$

Так как $[\bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}]$ — седловая точка функции $L_{\bar{\xi}}(x,\lambda)$, то по аналогии с (14) имеем

$$\bar{f} - f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) \le \|\bar{\lambda}\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\| + \varepsilon_k(1 + \|\bar{\lambda}\|_1). \tag{22}$$

Применяя это неравенство и оценку (10) при $x' = \bar{x}_k$, из (21) получим

$$\rho_k\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\|^2 - \rho_k^0\|\bar{\lambda}\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\| \le \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \rho_k\varepsilon_k(4\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k) + \rho_k^0\varepsilon_k(2 + \|\bar{\lambda}\|_1).$$

Выделяя в левой части данного соотношения полный квадрат, будем иметь

$$\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\| \le \frac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar{\lambda}\| + \sqrt{B_1(r_k,\varepsilon_k)}, \tag{23}$$

где $B_1(r_k,\varepsilon_k) = \dfrac{{\rho_k^0}^2}{4\rho_k^2}\|\bar{\lambda}\|^2 + \dfrac{\|\bar{\bar{x}}\|^2}{\rho_k} + \varepsilon_k(4\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k) + \dfrac{\rho_k^0}{\rho_k}\varepsilon_k(2 + \|\bar{\lambda}\|_1)$. Из неравенства (23) следует

$$f_i(\bar{x}_k) \le \bar{\xi}_i + \frac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar{\lambda}\| + \sqrt{B_1(r_k,\varepsilon_k)} + \varepsilon_k, \qquad i = 1,\dots,m. \tag{24}$$

Если выполнены условия (17), то $\lim\limits_{k\to\infty} B_1(r_k,\varepsilon_k) = 0$. Поэтому, начиная с некоторого k_0, все точки $\bar{x}_k$ будут лежать во множестве $X_{\xi'}$, где $\xi' > \bar{\xi}$, $k \ge k_0$. По предположению множество $X_{\xi'}$ ограничено. Тогда ограниченной будет и последовательность $\{\bar{x}_k\}$. Обозначим через x^* ее предельную точку. В силу (24) $x^* \in X_{\bar{\xi}}$ и $f_0(x^*) \ge \bar{f}$. Но, с другой стороны, из (20) следует $f_0(x^*) \le \bar{\delta} \le \bar{f}$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar{\delta} = \bar{f} = f_0(x^*)$.

Если дополнительно к условиям (17) потребовать, чтобы $\dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k} \to 0$ при $k \to \infty$, то $\{\bar{x}_k\}$ будет сходиться к нормальному решению задачи (3). В самом деле, из (18) следует

$$\|\bar{x}_k\|^2 \le \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \rho_k(\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2) + \rho_k^0(\bar{f} - f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)) + 2\rho_k\varepsilon_k\|\bar{\xi}\|_1 + \rho_k\varepsilon_k^2 m + \rho_k^0\varepsilon_k.$$

Применяя к правой части этого неравенства оценки (10) (при $x' = \bar{x}_k$) и (22), получим

$$\|\bar{x}_k\|^2 \le \|\bar{\bar{x}}\|^2 - \rho_k\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\|^2 + \rho_k^0\|\bar{\lambda}\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{\xi})^+\| + B_2(r_k,\varepsilon_k),$$

где $B_2(r_k, \varepsilon_k) = \rho_k\varepsilon_k(4\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k) + \rho_k^0\varepsilon_k(\|\bar{\lambda}\|_1 + 2)$. Отсюда $\|\bar{x}_k\|^2 \leq \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \dfrac{{\rho_k^0}^2}{4\rho_k}\|\bar{\lambda}\|^2 + B_2(r_k, \varepsilon_k)$. Так как согласно (17) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\rho_k^0}{\rho_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k\varepsilon_k = 0$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k^0\varepsilon_k = 0$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} B_2(r_k, \varepsilon_k) = 0$. Из последнего неравенства следует $\|x^*\| = \|\bar{\bar{x}}\|$, что в силу единственности нормального решения задачи (3) влечет $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{\bar{x}}$.

Теорема доказана.

Для алгоритма (16) оценим величины уклонений $|\delta_k - \bar{f}|$ и $|f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{f}|$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2. *Справедливы оценки*

$$|\delta_{k+1} - \bar{f}| \leq B_3(r_k, \varepsilon_k) + \tau_k, \tag{25}$$

$$|f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{f}| \leq \max\{B_3(r_k, \varepsilon_k), \tau_k - \tau_{k+1}\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

где $B_3(r_k, \varepsilon_k) = \|\bar{\lambda}\|\left(\dfrac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar{\lambda}\| + \sqrt{B_1(r_k, \varepsilon_k)}\right) + \varepsilon_k(1 + \|\bar{\lambda}\|_1)$, $B_1(r_k, \varepsilon_k)$ *— из* (23), $B_3(r_k, \varepsilon_k) \to 0$ $(k \to \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (16) имеем

$$\delta_{k+1} - \bar{f} = \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ - \bar{f} \geq f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{f} - \tau_k.$$

Отсюда с учетом (22) и (23) получим $\bar{f} - \delta_{k+1} \leq \bar{f} - f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) + \tau_k \leq B_3(r_k, \varepsilon_k) + \tau_k$. Этим доказана оценка (25), поскольку по построению алгоритма (16) $\delta_{k+1} < \bar{f}$.

Для вывода (26) теперь достаточно оценить разность $f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \bar{f}$. Воспользуемся неравенством (19). Так как $(\|\bar{\bar{x}}\|^2 + 1)(\rho_k^0)^{-1} \leq \tau_k - \tau_{k+1} - \varepsilon_k$, то

$$f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \tau_k \leq \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \leq \frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2 + 1}{\rho_k^0} + \bar{f} - \tau_k + \varepsilon_k \leq \bar{f} - \tau_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Отсюда и из (22), (23) вытекает оценка (26).

Теорема доказана.

Приведем пример последовательностей τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k, удовлетворяющих условиям (17).

Выберем положительные числа α, β, γ, так чтобы $\dfrac{\alpha}{3} < \gamma < \beta < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Положим

$$\tau_k = \alpha^{k+1}, \qquad \rho_k = \frac{1}{\gamma^{k+1}}, \qquad \rho_k^0 = \frac{1}{\beta^{k+1}}, \qquad \varepsilon_k = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k^0 = +\infty$, $\dfrac{\rho_k^0}{\rho_k} = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^k \to 0$, $\rho_k\varepsilon_k = \left(\dfrac{\alpha}{3\gamma}\right)^k \to 0$, $\rho_k^0(\tau_k - \tau_{k+1} - \varepsilon_k) = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k\left(1 - \alpha - \dfrac{1}{3^k}\right) > \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k \to +\infty$ $(k \to \infty)$. В конкретных числах обсуждаемые параметры могут выглядеть так: $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 1/4$.

Для сходимости последовательности $\{\tilde{x}_k\}$ к $\bar{\bar{x}}$ требуется, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k} = 0$. Этого можно достигнуть, если положить $\rho_k = \dfrac{1}{\gamma^{2(k+1)}}$, оставляя прежним ρ_k^0: $\dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k} = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^{2(k+1)} \to 0$ $(k \to \infty)$. Для выполнения условий (17) в этом случае надо также принять $\varepsilon_k = \left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^{2(k+1)}$.

4. Учет ограничений с помощью точного штрафа

Выше метод невязки был сведен к решению задачи (4), где в качестве минимизируемой функции использовалась КШФ $F_\delta(x,r)$. Ограничения задачи (2) можно агрегировать и с помощью других модификаций штрафных функций, среди которых в первую очередь следует выделить точную штрафную функцию (ТШФ) Еремина — Зангвилла. Метод ТШФ характеризуется наличием пороговых значений штрафных коэффициентов $r = \bar r$, начиная с которых исходная задача ВП (1) в случае ее разрешимости и задача минимизации штрафной функции становятся эквивалентными в смысле совпадения множеств оптимальных решений.

ТШФ для задачи (2) имеет следующую конструкцию:

$$\Phi_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^+(x)\|_1 + \rho_0(f_0(x)-\delta)^+,$$

$r = [\rho, \rho_0] > 0,\ \delta \in \mathbb{R}^1$. Применим ее для анализа НЗ ВП 1-го рода.

Вид функции $\Phi_\delta(x,r)$ приводит к мысли об изменении формы коррекции задачи (1). Прежде аппроксимационная задача (3) для НЗ ВП определялась вектором $\bar\xi = f^+(\bar x)$, где $\bar x$ — точка минимума функции $g(x) = \|f^+(x)\|^2$. Функция $g(x)$, в свою очередь, являлась составным элементом конструкции $F_\delta(x,r)$. При использовании $\Phi_\delta(x,r)$ ограничениям, задающим множество X, соответствует функция $g_1(x) = \|f^+(x)\|_1$, и поэтому представляется естественным взять в качестве корректирующего вектор $\tilde\xi = f^+(\tilde x)$, где $\tilde x \in \operatorname{Arg\,min} g_1(x)$. Вектор $\tilde\xi$ существует при тех же условиях, что и $\bar\xi$. Однако если $\bar\xi$ определялся единственным образом, то относительно $\tilde\xi$ такое утверждение, вообще говоря, не выполняется. Проиллюстрируем этот факт на простом примере.

П р и м е р 1. Определим зависимость оптимальной коррекции НЗ ВП от выбора нормы корректирующего вектора.

Рассмотрим задачу линейного программирования с противоречивыми ограничениями:

$$\min\{x_1\colon x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 2\}.$$

Здесь $X = \{x = [x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2\colon f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,4}\}$, $f_1(x) = x_1,\ f_2(x) = x_2,\ f_3(x) = -x_1+1$, $f_4(x) = -x_2+2$, $X = \varnothing$. Пусть $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+\colon X_\xi \ne \varnothing\}$, $\bar\xi^{(i)} = \arg\min\{\|\xi\|_i\colon \xi \in E\}$, $i = 1,2,\infty$. Найдем вначале корректирующий вектор относительно минимума евклидовой нормы ($i=2$). Для этого минимизируем функцию $g(x) = \|f^+(x)\|^2$. Получим $\min g(x) = 2.5$, $\bar X = \operatorname{Arg\,min} g(x) = \{\bar x\} = \{[0.5,1]\}$, $\bar\xi = \bar\xi^{(2)} = f^+(\bar x) = [0.5,1,0.5,1]$, $X_{\bar\xi} = \{x = [x_1,x_2]\colon x_1 = 0.5,\ x_2 = 1\} = \bar X = \{\bar x\}$. Для отыскания $\bar\xi^{(1)}$ минимизируем функцию

$$g_1(x) = \|f^+(x)\|_1 = \sum_{i=1}^m f_i^+(x).$$

Имеем $\min g_1(x) = 3$, $\bar X^1 = \operatorname{Arg\,min} g_1(x) = \{x = [x_1,x_2]\colon 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 2\}$ ($\bar X^1$ — прямоугольник на плоскости Ox_1x_2). В качестве $\tilde\xi = \bar\xi^{(1)}$ можно взять любой вектор $f^+(x)$, где $x \in \bar X^1$. Например, при $x = [0,0]$ будет $\tilde\xi = [0,0,1,2]$, $X_{\tilde\xi} = \{[0,0]\}$. Вектор $\tilde\xi$ определяется, таким образом, неоднозначно, но для каждого $\bar\xi^{(1)}$ будет $\|\bar\xi^{(1)}\|_1 = \|\tilde\xi\|_1 = 3$ и $\bar X^1 = \bigcup\limits_{\|\xi\|_1=3} X_\xi$.

Иногда предпочтительной может быть коррекция $\bar\xi^{(\infty)}$ (см., например, [18]). В данном примере $\min g_2(x) = 1$, где $g_2(x) = \max\limits_i f_i^+(x) = \|f^+(x)\|_\infty$. При этом $\bar X^2 = \operatorname{Arg\,min} g_2(x) = \{x = [x_1,x_2]\colon 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = 1\}$ (отрезок на Ox_1x_2). Здесь хотя $\bar X^2$ — бесконечное множество точек, тем не менее вектор $\bar\xi^{(\infty)}$ определяется однозначно: $\bar\xi^{(\infty)} = [1,1,1,1]$ и $X_{\bar\xi^{(\infty)}} = \bar X^2$.

Заметим, что неоднозначность в определении вектора $\tilde\xi = \bar\xi^{(1)}$ не является обязательной.

П р и м е р 2. Исходная НЗ ВП задана в виде

$$\min\{x_1^2 + x_2^2 \colon x \in X\},$$
$$X = \{x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \colon f_1(x) \le 0,\ f_2(x) \le 0\},$$
$$f_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 1, \quad f_2(x) = x_1 + x_2 - 1. \quad \text{Здесь } X = \varnothing.$$

Для нахождения оптимального корректирующего вектора минимизируем функции: $g(x) = {f_1^+}^2(x) + {f_2^+}^2(x)$, $g_1(x) = f_1^+(x) + f_2^+(x)$, $g_2(x) = \max\{f_1^+(x), f_2^+(x)\}$. Получим: $\min g(x) = 1.823$ (достигается в точке $\bar{x} = [1.09, 1.09]$); $\min g_1(x) = 1.586$ (достигается в точке $\tilde{x} = [1.293, 1.293]$); $\min g_2(x) = 1$ (достигается в точке $x^2 = [1, 1]$).

Соответствующие корректирующие векторы и допустимые множества аппроксимирующих задач имеют вид $\bar{\xi} = [0.656, 1.18]$, $\tilde{\xi} = [0, 1.586]$, $\bar{\xi}^{(\infty)} = [1, 1]$, $X_{\bar{\xi}} = \{\bar{x}\} = \bar{X}$, $X_{\tilde{\xi}} = \{\tilde{x}\} = \bar{X}^1$, $X_{\bar{\xi}^{(\infty)}} = \{x^2\} = \bar{X}^2$, при этом $\|\bar{\xi}\| = 1.35$, $\|\tilde{\xi}\| = \|\tilde{\xi}\|_1 = 1.586$, $\|\bar{\xi}^{(\infty)}\|_\infty = 1$, $\|\bar{\xi}^{(\infty)}\| = 1.41$. В данном примере все векторы оптимальной коррекции определяются единственным образом, все они различные и различны соответствующие допустимые множества аппроксимирующих задач.

Таким образом, при применении в методе невязки ТШФ $\Phi_\delta(x, r)$ в качестве аппроксимации для задачи (1) в случае $X = \varnothing$ примем задачу

$$\min\{f_0(x) \colon x \in \bar{X}^1\}. \tag{27}$$

Выпишем далее аналог задачи (4), который поставим в соответствие методу невязки (2) при условии приближенного задания функций $f_i(x)$:

$$\min_x \Phi_\delta^\varepsilon(x, r), \tag{28}$$

где $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r) = \|x\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(x)\|_1 + \rho_0(f_0^\varepsilon(x) - \delta)^+$, $r = [\rho, \rho_0] > 0$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \ge 0$.

Вначале покажем разрешимость задачи (28).

Лемма. *Для любых $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$ и $\delta \in \mathbb{R}^1$ существует $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \arg\min\limits_x \Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая функции $\Phi_\delta(x, r)$ и $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$, можем записать

$$\Phi_\delta(x, r) = \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) + \rho\sum_{i=1}^m (f_i^+(x) - f_i^{\varepsilon^+}(x)) + \rho_0[(f_0(x) - \delta)^+ - (f_0^\varepsilon(x) - \delta)^+].$$

Отсюда $\Phi_\delta(x, r) \le \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) + \varepsilon(m\rho + \rho_0)$. Поэтому если $x' \in M_1 = \{x \colon \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) \le C_1(r, \delta, \varepsilon)\}$, где $C_1(r, \delta, \varepsilon) = \Phi_\delta^\varepsilon(x^0, r)$, x^0 — фиксированная точка, то

$$\Phi_\delta(x', r) \le C_1(r, \delta, \varepsilon) + \varepsilon(m\rho + \rho_0) = C_2(r, \delta, \varepsilon).$$

Так как $\Phi_\delta(x, r)$ — сильно выпуклая по x функция, то множество $M_2 = \{x \colon \Phi_\delta(x, r) \le C_2(r, \delta, \varepsilon)\}$ ограничено для любых фиксированных r, δ и ε. Но $M_1 \subset M_2$, так что непрерывная функция $\varphi(x) = \Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$ на ограниченном множестве достигает минимума в некоторой точке $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть задача* (27) *разрешима в точке $\tilde{x}$, $\tilde{\xi} = f^+(\tilde{x})$, $f_0(\tilde{x}) = \tilde{f}$. Для любых $r = [\rho, \rho_0] > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \ge 0$ справедливы оценки*

$$\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 - \|\tilde{\xi}\|_1 \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho} + \varepsilon\Big[m + \frac{\rho_0}{\rho}(\widetilde{\Delta}^+ + \varepsilon)\Big], \tag{29}$$

$$f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \tilde{f} \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho_0} + \varepsilon\Big(1 + \frac{2\rho}{\rho_0}m\Big) + \widetilde{\Delta}^+ - \widetilde{\Delta}, \tag{30}$$

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 \le \|\tilde{x}\|^2 + \varepsilon(2m\rho + \rho_0) + \rho_0\widetilde{\Delta}^+, \tag{31}$$

где $\widetilde{\Delta} = \tilde{f} - \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $|f_i^{\varepsilon+}(\tilde{x}) - f_i^+(x)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$, $f_0^\varepsilon(\tilde{x}) - \delta < \tilde{f} - \delta + \varepsilon = \widetilde{\Delta} + \varepsilon$, то

$$\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x})\|_1 = \sum_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(\tilde{x}) < \sum_{i=1}^m f_i^+(\tilde{x}) + m\varepsilon = \|\tilde{\xi}\|_1 + m\varepsilon, \qquad (f_0^\varepsilon(\tilde{x}) - \delta)^+ < \varepsilon + \widetilde{\Delta}^+.$$

Из определения точки $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon$ следует

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + \rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+). \tag{32}$$

Отсюда сразу вытекает оценка (29). Кроме того, из (32) также получаем

$$\rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1) + \rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+).$$

Так как $\|f^+(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 < \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + m\varepsilon$, то

$$\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 \le \|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^+(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + m\varepsilon \le m\varepsilon, \tag{33}$$

и, следовательно, $\rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + 2\rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+)$. Но $f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \tilde{f} \le (f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ - \widetilde{\Delta}$, поэтому справедлива оценка (30).

Из (32) и (33) также получаем

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 \le \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1) + \rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+) \le \|\tilde{x}\|^2 + 2\rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+),$$

т. е. имеет место оценка (31).

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть в задаче* (28) $\rho = \rho_0 = r$, $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $r\varepsilon \to 0$, $\widetilde{\Delta} \to 0$, $r\widetilde{\Delta}^+ \to 0$. *Тогда* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \tilde{\tilde{x}}$, *где* $\tilde{\tilde{x}}$ — *нормальное решение задачи* (27).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть в теореме 4 $\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Из оценки (31) следует ограниченность последовательности $\{\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\}$. Обозначим через x' ее предельную точку. Согласно (29), (30) имеем $\|f^+(x')\|_1 = \|\tilde{\xi}\|_1$, $f_0(x') = \tilde{f}$, т. е. x' — решение задачи (27), причем в соответствии с (31) $\|x'\| \le \|\tilde{\tilde{x}}\|$. Отсюда в силу единственности нормального решения в задаче (27) следует требуемое заключение. □

Следствие 4. *Пусть в задаче* (28) $\rho = \rho_0 = r$, $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $r\varepsilon \to 0$ *и* $\delta = \bar{\delta} \ge \tilde{f}$. *Тогда* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \bar{x}_{\bar{\delta}} = \arg\min\{\|x\|^2 \colon x \in X_{\tilde{\xi}} \cap M_{\bar{\delta}}\}$, $\tilde{\xi} = f^+(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \bar{X}^1$. *Если к тому же* $\delta \to \tilde{f}$, *то* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \tilde{\tilde{x}}$.

5. Итеративный алгоритм на базе точного штрафа

Рассмотрим далее аналог алгоритма (16), построенного на основе применения функции $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$.

Ранее мы предполагали, что множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0 \in \mathbb{R}_+^m$. Тогда ограниченным будет и множество $\bar{X}^1$. Следовательно, задача (27) разрешима в некоторой точке $\tilde{x}$. Пусть $f_0(\tilde{x}) = \tilde{f}$, $f^+(\tilde{x}) = \tilde{\xi}$ и существует вектор $\tilde{\lambda}$ такой, что $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$ будет седловой точкой функции Лагранжа $L_{\tilde{\xi}}(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \tilde{\xi})$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Определим, как и ранее, последовательность чисел $\tau_k > 0$, $\tau_k \searrow 0$ $(k \to \infty)$. Выберем δ_0 из условия $\delta_0 < \tilde{f} - \tau_0$. Положим

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\tilde{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{34}$$

где $\tilde{x}_k = \arg\min_x \Phi_k(x)$, $\Phi_k(x) = \widetilde{\Phi}_{\delta_k}^{\varepsilon_k}(x, r_k, \tau_k) = \|x\|^2 + \rho_k\|f^{\varepsilon_k{}^+}(x)\|_1 + \rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(x) - \delta_k - \tau_k)^+$, $r_k = [\rho_k, \rho_k^0] > 0$, $\varepsilon_k \ge 0$.

Теорема 5. *Пусть при сформулированных выше условиях параметры* τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k *в алгоритме* (34) *выбраны в соответствии с* (17). *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k = \tilde f$ *и любая предельная точка последовательности* $\tilde x_k$ *решает задачу* (27).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале оценим $(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x) - \delta_k - \tau_k)^+ \le f_0(\tilde x) - \delta_k - \tau_k + \varepsilon_k$, $\|f^{\varepsilon_k +}(\tilde x_k)\|_1 > \|f^+(\tilde x_k)\|_1 - m\varepsilon_k$, $\|f^{\varepsilon_k +}(\tilde x)\|_1 < \|\tilde\xi\|_1 + m\varepsilon_k$. Так как $\Phi_k(\tilde x_k) \le \Phi_k(\tilde x)$, то с учетом верхних оценок имеем

$$\|\tilde x_k\|^2+\rho_k(\|f^+(\tilde x_k)\|_1-\|\tilde\xi\|_1)+\rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k)-\delta_k-\tau_k)^+ \le \|\tilde x\|^2+2m\rho_k\varepsilon_k+\rho_k^0\varepsilon_k+\rho_k^0(\tilde f-\delta_k-\tau_k)^+. \quad (35)$$

Поэтому справедлив следующий аналог неравенства (19):

$$(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k^0} + \Big(2m\frac{\rho_k}{\rho_k^0} + 1\Big)\varepsilon_k + (\tilde f - \delta_k - \tau_k)^+. \quad (36)$$

В силу условий (17) начальные значения параметров $\varepsilon_0, \rho_0, \rho_0^0, \tau_0, \tau_1$ можно выбрать так, чтобы $\varepsilon_0 < 1$, $2m\rho_0\varepsilon_0 \le 1$, $\sigma_0 \ge \|\tilde x\|^2 + 1$. Тогда из (36) и (17) будет следовать $\delta_k \le \delta_{k+1} < \tilde f - \tau_{k+1}$ $(\forall k)$. Последовательность δ_k монотонно возрастает и ограничена сверху величиной $\tilde f$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k = \bar\delta$ и $\bar\delta \le \tilde f$. Кроме того,

$$\varlimsup_{k\to\infty}(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ = 0. \quad (37)$$

Из неравенства (35) вытекает

$$\|\tilde x_k\|^2 + \rho_k(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1) + \rho_k^0(f_0(\tilde x_k) - \tilde f) \le \|\tilde x\|^2 + 2m\rho_k\varepsilon_k + 2\rho_k^0\varepsilon_k.$$

Таким образом,

$$\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 \le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2m\varepsilon_k + 2\,\frac{\rho_k^0}{\rho_k}\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}(\tilde f - f_0(\tilde x_k)). \quad (38)$$

По определению седловой точки $[\tilde x, \tilde\lambda]$ функции $L_{\tilde\xi}(x,\lambda)$ имеем

$$\tilde f = f_0(\tilde x) \le f_0(\tilde x_k) + (\tilde\lambda, f^+(\tilde x_k) - \tilde\xi).$$

С учетом этого неравенства из (38) получим

$$\begin{aligned}\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 &\le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\|f^+(\tilde x_k) - \tilde\xi\|_1 \\ &\le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 + \|\tilde\xi\|_1) \\ &= \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 + 2\|\tilde\xi\|_1) + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 \le \Big(1 - \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\Big)^{-1}\Big[\frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\|\tilde\xi\|_1 + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k\Big].$$

Отсюда при $\rho_k \to \infty$, $\dfrac{\rho_k^0}{\rho_k} \to 0$ следует

$$\varlimsup_{k\to\infty}\|f^+(\tilde x_k)\|_1 \le \|\tilde\xi\|_1. \quad (39)$$

Из (38) также имеем

$$f_0(\tilde{x}_k) - \tilde{f} \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m\frac{\rho_k}{\rho_k^0} + 1\Big)\varepsilon_k. \tag{40}$$

В силу неравенства (39) и ограниченности множеств X_ξ можно сделать вывод об ограниченности последовательности $\{\tilde{x}_k\}$. Обозначим через x^* ее предельную точку. Из (39) вытекает $x^* \in \bar{X}_1$, а из (40) $f_0(x^*) \le \tilde{f}$, т. е. x^* решает задачу (27) и $f_0(x^*) = \tilde{f}$. В свою очередь, из (37) получаем $f_0(x^*) \le \bar{\delta} \le \tilde{f}$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar{\delta} = \tilde{f} = f_0(x^*)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждения о сходимости алгоритмов (16) и (34) остаются в силе, если точки $\bar{x}_k$ в (16) и $\tilde{x}_k$ в (34) определяются соответственно из условий $F_k^* \le F_k(\bar{x}_k) \le F_k^* + \eta_k$ и $\Phi_k^* \le \Phi_k(\tilde{x}_k) \le \Phi_k^* + \eta_k$, где $\eta_k \ge 0$, $\eta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $F_k^* = \min\limits_x F_k(x)$, $\Phi_k^* = \min\limits_x \Phi_k(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть исходная задача (1) разрешима и существует соответствующий множитель Лагранжа. Рассмотрим следующие алгоритмы, основанные на применении функций $F_k(x)$ и $\Phi_k(x)$, которые можно интерпретировать как модификации алгоритмов (16) и (34):

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{1}{\rho_k^0}\, F_k(\bar{x}_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{1}{\rho_k^0}\, \Phi_k(\tilde{x}_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где точки $\bar{x}_k$ и $\tilde{x}_k$ определяются, как в (16) и (34) соответственно, параметры τ_k , r_k, ε_k выбираются согласно (17). Сходимость данных алгоритмов проверяется по схеме доказательств теорем 2 и 5 с учетом условия $\bar{\xi} = \tilde{\xi} = 0$.

З а м е ч а н и е 3. В алгоритмах (16) и (34) требуется, чтобы начальное значение параметра $\delta = \delta_0$ было меньше оптимального значения откорректированной исходной задачи. Если известно значение $f^* = \inf\limits_x f_0(x) > -\infty$, то можно брать $\delta_0 < f^*$. Другой вариант — взять вектор $\xi' \in \mathbb{R}^m_+$ так, чтобы заведомо $\xi' > \bar{\xi}$ (или $\xi' > \tilde{\xi}$), и положить $\delta_0 = \inf\limits_x\{f_0(x)\colon x \in X_{\xi'}\}$. В любом случае для определения δ_0 может понадобиться ряд итераций некоторого классического метода безусловной или условной минимизации функции $f_0(x)$.

З а м е ч а н и е 4. Сравнивая подходы к оптимальной коррекции НЗ ВП с помощью квадратичной и точной штрафных функций, следует отметить определенные преимущества метода квадратичного штрафа. Это — единственность вектора $\bar{\xi}$, совпадение множеств $\bar{X} = \operatorname{Arg\,min}\|f^+(x)\|^2$ и $X_{\bar{\xi}}$, большее разнообразие оценок сходимости метода. С другой стороны, метод с точным штрафом выглядит более естественно при построении итерационной реализации (алгоритм (34)). Алгоритм же (16), строго говоря, не вполне основывается на квадратичной штрафной функции $F_\delta(x, r)$. В основе построения (16) лежит функция $F_k(x)$, в которой квадратичными являются стабилизатор $\|x\|^2$ и штраф $\|f^+(x)\|^2$ за нарушение ограничений $f(x) \le 0$. Ограничение же $f_0(x) \le \delta$ учитывается слагаемым вида $(f_0(x) - \delta)^+$, типичным для точного штрафа.

6. Заключение

В работе рассматривались методы оптимальной коррекции НЗ ВП, в основе которых лежало использование идеи метода невязки — одного из классических подходов к регуляризации некорректных задач оптимизации. Исходной несобственной задаче ставилась в соответствие типовая модель метода невязки, анализ которой проводился, в свою очередь, с помощью метода штрафных функций. Последовательно использовались две модификации метода штрафов — метод квадратичной и метод точной штрафных функций. Показано, что каждому методу соответствует свой способ выбора вектора ξ оптимальной коррекции правых частей ограничений исходной задачи. Для метода КШФ предпочтительной оказывалась коррекция по минимуму евклидовой нормы ξ, для метода ТШФ — по минимуму октаэдрической нормы. Для каждого подхода предложены конкретные итеративные схемы управления параметрами алгоритмов, обеспечивающих требуемую сходимость. Предлагаемые итеративные процедуры могут рассматриваться, с одной стороны, как способы регуляризации задачи, аппроксимирующей исходную несобственную постановку, а с другой, — как реализация некоторых вариантов регуляризованного метода нагруженной функции для НЗ ВП, имеющего определенные преимущества по сравнению с методами штрафных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Скарин В. Д.** О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 268–276.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
3. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. **Ерохин В. И.** Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.
5. **Попов Л. Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
6. **Leon T., Liern V.** A fuzzy method to repair infeasibility in linear constrained problems // Fuzzy Set and Systems. 2001. Vol. 122, no. 2. P. 237–243.
7. **Скарин В. Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.
8. **Chinneck J. W., Dravnieks E. W.** Locating minimal infeasible constraint sets in linear programs // ORSA J. on Computing. 1991. Vol. 3, no. 2. P. 157–168.
9. **Ben-Tal A., Nemirovski A.** Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data // Math. Progr. 2000. Vol. 88, no. 3. P. 411–424.
10. **De Groen P.** An introduction to total least squares // Niew Archief voor Wiskunde. 1996. Vol. 14, no. 2. P. 237–254.
11. **Dax A.** The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities // Optimization and Engineering. 2001. Vol. 2. P. 349–359.
12. **Amaral P., Barahona P.** Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 395. P. 191–210.
13. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
14. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
15. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems. Berlin; N. Y.: W. de Gruyter, 2008. 194 p.
16. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
17. **Попов Л. Д.** Об адаптации метода нагруженного функционала к несобственным задачам математического программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 247–255.
18. **Скарин В. Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 15.02.2016