ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

О π-ДЛИНЕ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ π-РАЗДЕЛИМЫХ ГРУПП

З. Б. Селяева

Доказана π-разделимость локально конечной группы G, в которой все конечные подгруппы π-разделимы и их π-длины ограничены в совокупности.

Ключевые слова: локально конечная группа, π-разделимые группы, π-длина группы.

Z. B. Selyaeva. On the π-length of locally finite π-separable groups.

We prove the π-separability of a locally finite group G in which all finite subgroups are π-separable and their π-lengths are bounded in total.

Keywords: locally finite groups, π-separable groups, π-length of a group.

MSC: 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-226-230

Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Группа называется *π-группой*, если она периодическая и порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядков элементов G. Группа называется *π-разделимой*, если она обладает конечным нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой. Такой ряд называется *π-рядом*, а *π-длиной π-разделимой группы* называется наименьшее из возможных чисел нетривиальных π-факторов во всех рядах этой группы.

Настоящая работа является продолжением статьи [1] А. Х. Журтова и автора данной статьи, в которой доказано, что π-длина локально конечной π-разделимой группы G ограничена натуральным числом m, если π-длина любой конечной подгруппы группы G не превосходит m.

Наша цель — показать, что условие π-разделимости группы G излишне, а именно справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть m — натуральное число, G — локально конечная группа. Если любая конечная подгруппа группы G π-длины, не превосходящей m, π-разделима, то G π-разделима и ее π-длина не превосходит m.*

Теорема 2. *Если G — конечная π-разделимая группа π-длины m, то в G существует разрешимая подгруппа π-длины m.*

Эта теорема дает возможность усилить заключение теоремы 1.

Следствие. *Локально конечная группа G π-длины, не превосходящей m, π-разделима тогда и только тогда, когда все конечные подгруппы G π-разделимы и π-длина любой ее разрешимой подгруппы не превосходит m.*

В статье построен пример, показывающий, что локально конечная группа, в которой каждая конечная подгруппа π-разделима, не обязана обладать ни возрастающим, ни убывающим нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой.

1. Основные обозначения и предварительные результаты

Для периодической группы G и множества π простых чисел обозначим через $O_\pi(G)$ наибольшую нормальную π-подгруппу группы G, т. е. произведение всех ее нормальных π-групп. Далее, пусть $O_{\pi,\pi'}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$, $O_{\pi,\pi',\pi}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/O_{\pi,\pi'}(G))$ и т. д.

Ряд

$$1 = P_0(G) \leqslant N_0(G) \leqslant P_1(G) \leqslant N_1(G) \leqslant \dots \leqslant P_n(G) \leqslant N_n(G) \leqslant \dots \tag{1.1}$$

называется *верхним π-рядом группы G*, если

$$N_0(G) = O_{\pi'}(G), \quad P_1(G) = O_{\pi',\pi}(G), \quad N_1(G) = O_{\pi',\pi,\pi'}(G),$$

а для $i > 1$ $P_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/N_{i-1}(G))$, $N_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/P_i(G))$.

Лемма 1 [1, лемма 1]. (а) *Если $1 = P_0 \leqslant N_0 \leqslant P_1 \leqslant N_1 \leqslant \dots \leqslant P_n \leqslant N_n \leqslant \dots$ — ряд нормальных подгрупп группы G, в котором для любого i N_i/P_i — π'-группа, P_{i+1}/N_i — π-группа, то $P_i \leqslant P_i(G)$.*

(б) *Если группа G π-разделима, то ее верхний π-ряд* (1.1) *доходит до G, и если $N_{m-1} \neq P_m(G) \leqslant N_m(G) = G$, то π-длина G равна m.*

(в) *Если H — подгруппа группы G, то $H \cap P_i(G) \leqslant P_i(H)$, $H \cap N_i(G) \leqslant N_i(H)$ $\forall\ i \geqslant 0$.*

(г) *Если H — подгруппа или фактор-группа π-разделимой группы G, то H π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины G.*

Группа G называется *примарной*, если существует такое простое число p, что порядок каждого элемента группы G — степень p.

Элемент g группы называется *примарным*, если его порядок равен степени некоторого простого числа.

Лемма 2. (а) *Любой элемент g конечного порядка в группе представим в виде $g = g_1g_2\dots g_s$, где каждый элемент g_i, $i = 1, 2, \dots, s$, примарен и является степенью g.*

(б) *Если G — конечная группа и для каждого простого числа P_i означает ее некоторую силовскую p_i-подгруппу, то $G = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s\rangle$, где s — число простых делителей порядка группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а). Любая силовская p_i-подгруппа P_i циклической группы $\langle g\rangle$ имеет вид $\langle g^{m_i}\rangle$ для некоторого целого числа m_i и $\langle g\rangle = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_s$, где s — число простых делителей порядка g. Поэтому $g = g_1 \cdots g_s$, где $g_i \in P_i, i = 1, \dots, s$. Отсюда следует заключение пункта.

(б). Порядок подгруппы $P = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s\rangle$ делится на $|P_i|, i = 1, \dots, s$, поэтому он делится на $|P_1| \cdots |P_s| = |G|$, откуда $|G| \leq |P| \leq |G|$ и $P = G$. Лемма доказана.

Если группа A действует на группе B, то обозначим через $C_B(A)$ подгруппу

$$\{b \in B \mid b^\alpha = b \text{ для всех } \alpha \in A\},$$

а через $[B, A]$ подгруппу

$$\big\langle [b, \alpha] = b^{-1}b^\alpha \mid b \in B,\ \alpha \in A\big\rangle.$$

Заметим, что если при этом B и A — подгруппы некоторой общей группы, то $C_B(A)$ — обычный централизатор A в B, а $[B, A]$ — обычный взаимный коммутант B и A.

Лемма 3 [1, лемма 5]. *Если N — нормальная подгруппа конечной группы G и G/N разрешима, то существует разрешимая подгруппа H, для которой $G = NH$.*

Если H — нормальная подгруппа группы G, $N \leqslant K \leqslant G$ и $L \leqslant G$, то *централизатором* K/N в L назовем подгруппу

$$G_L(K/N) = \{x \in L \mid [k,x] \in N \ \text{ для всех } k \in K\}.$$

Лемма 4 [1, лемма 6]. *Пусть G — локально конечная π-разделимая группа. Тогда*
(а) *Если $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G\left(O_\pi(G)\right) \leqslant O_\pi(G)$.*
(б) $C_G\big(O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G)\big) \leqslant O_{\pi',\pi}(G)$.

Лемма 5. *Пусть $K = L\langle a\rangle$ — конечная группа, для которой L — π'-группа, нормальная в K, a — примарный π-элемент, не централизующий L. Тогда в L найдется a-инвариантная силовская подгруппа S и нетривиальный элемент $b \in S$ такой, что $B = \langle b^x \mid x \in \langle a\rangle\rangle = [B,\langle a\rangle]$, в частности $b \in [B,\langle a\rangle]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — простое число, делящее $|L|$, P — силовская p-подгруппа из L. По замечанию Фраттини (см. [2, теорема 1.3.7]) $K = LN_K(P)$.

Так как порядки L и $\langle a\rangle$ взаимно просты, то $N_K(P)$ содержит по теореме Цассенхауза [3, теоремы I.18.1 и I.18.2] с учетом [4]) элемент a^x для некоторого $x \in K$ и поэтому a нормализует некоторую силовскую p-подгруппу S_p группы L. По лемме 2(a) $L = \langle S_p \mid p \in \pi(L)\rangle$, поэтому a нормализует, но не централизует некоторую силовскую подгруппу S группы L. Не нарушая общности, можно считать, что $L = S$, т. е. L — p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi'$. Можно также считать, что $[L_0,\langle a\rangle] = 1$ для любой собственной a-инвариантной подгруппы L_0 из L. По [2, теорема 5.3.5] $[L,\langle a\rangle] = L$. Пусть b — любой элемент из L, не перестановочный с a. Подгруппа $B = \langle b^x \mid x \in \langle a\rangle\rangle$ не содержится в $C_L(a)$ и a-инвариантна, поэтому $B = L$ по выбору L. Таким образом, $L = B$ — искомая подгруппа. Лемма доказана.

Пусть G — локально конечная группа, m — натуральное число.

Опорной последовательностью длины m назовем упорядоченный набор примарных элементов $A = \{a_1, b_1, \ldots, b_{m-1}, a_m\}$ из G, обладающий при $m \geqslant 2$ следующими свойствами:

(1) $H = \langle A\rangle$ — π-разделимая группа π-длины m; для $i = 1,\ldots,m$ $\ a_i \in P_i(H)/P_{i-1}(H)$; для $j = 1,\ldots,m-1$ $\ b_j \in N_j(H)/N_{j-1}(H)$;

(2) для $i = 1,\ldots,m$ подгруппа $K = \left\langle \overline{a}_i, \overline{b}_{i-1}\right\rangle$ из $\overline{P}_i = P_i(H)/P_{i-1}(H)$, где $\overline{a}_i = P_{i-1}(H)\cdot a_i$, $\overline{b}_i = P_{i-1}(G)\cdot b_{i-1}$, равна $B_{i-1}\langle \overline{a}_i\rangle$, где $B_{i-1} = \left\langle \overline{b}_{i-1}^{\,x} \mid x \in \langle a_i\rangle\right\rangle$ — примарная группа, $\langle a_i\rangle$ действует нетривиально и неприводимо на H, а $\overline{b}_{i-1} \in [B_i\langle a\rangle]$; в частности,

$$\overline{b}_{i-1} \in \left[\left\langle \overline{b}_{i-1}^{\,x} \mid x \in \langle a_i\rangle\right\rangle, \langle a_i\rangle\,\right] \cdot P_{i-1}(G);$$

(3) для $i = 1,\ldots,m-1$ подгруппа $L_j = \left\langle \overline{b}_j, \overline{a}_j\right\rangle$ из $\overline{N}_j = N_j(G)/N_{j-1}(G)$, где $\overline{b}_j = N_{j-1}(G)\cdot b_j$, $\overline{a}_j = N_{j-1}(G)\cdot a_j$, равна $A_j\left\langle \overline{b}_j\right\rangle$, где группа $A_j = \left\langle \overline{a}_j^{\,x} \mid x \in \langle b_j\rangle\right\rangle$ примарна. $\langle b_j\rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $A_j/\Phi\left(A_j\right)$ и $\overline{a}_j \in [A_j, \langle b_j\rangle]$.

В частности, $a_j \in \left[\langle {a_j}^x \mid x \in \langle b_j\rangle\rangle, \langle b_j\rangle\right] \cdot N_{j-1}(G)$.

Опорной последовательностью длины 1 назовем набор из одного нетривиального примарного π-элемента.

Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 6 [1, лемма 8]. *Для любой локально конечной π-разделимой группы G π-длины m и любого примарного элемента $a_i \in\ P_m(G)\backslash N_{m-1}(G)$ существует опорная последовательность $A = \{a_1, b_1, \ldots, a_m\}$, для которой $a_m = a$.*

2. Доказательство основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $P_0(G) \leqslant N_0(G) < P_1(G) < N_1(G) < \ldots$ — верхний π-ряд группы G. Его π-длина не превосходит m по теореме из [1], и если объединение N членов этого ряда совпадает с G, то утверждение теоремы верно.

Если же $N \neq G$, т. е. $\overline{G} = G/N \neq 1$, то условие теоремы выполняется для $\overline{G}$ вместо G и можно считать, что $N = 1$, т. е. $O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G) = 1$.

По лемме 1 каждая подгруппа H из G π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины группы G. Не нарушая общности, можно считать, что π-длина H равна m. По лемме 6 в H существует опорная последовательность $A = \{a_1, b_1, \ldots, b_{m-1}, a_m\}$. По определению опорной последовательности π-длина $\langle A\rangle$ равна m, и поэтому можно считать, что $H = \langle A\rangle$. Поскольку $O_\pi(G) = 1$, то $\left\langle a_1^G\right\rangle$ не является π-группой и, следовательно, найдутся элементы $g_1, \ldots, g_t \in G$ такие, что $\langle a_1, a_1^{g_1}, \ldots, a_1^{g_t}\rangle$ не является π-группой.

Пусть $K = \langle H, g_1, \ldots, g_t\rangle$. По условию K конечна и π-разделима, поэтому найдется $i \geqslant 1$, для которого $a_1 \in P_i(K)\backslash P_{i-1}(K)$. Если $b_1 \in N_{i-1}(K)$, то по определению опорной последовательности

$$a_1 \in \left[\langle a_1^x \mid x \in \langle b_1\rangle\rangle, \langle b_1\rangle\right] P_{i-1}(K) \leqslant N_{i-1}(K).$$

Поскольку a_1 является π-элементом, то из этого включения вытекает, что $a_1 \in P_{i-1}(K)$; противоречие. Поэтому $b_1 \notin N_{i-1}(K)$.

Если теперь $a_2 \in P_i(K)$, то по определению опорной последовательности так же, как в предыдущем абзаце, получаем $b_1 \in N_{i-1}(K)$; противоречие. Поэтому $a_2 \notin P_i(K)$. Продолжая очевидным образом этот процесс, получим, что $a_m \notin P_{i+m-2}(K)$.

Поскольку π-длина K не превосходит m, то $i = 1$ и a_1 не централизует $O_{\pi'}(K)$. По лемме 5 в $O_{\pi'}(K)$ найдется нетривиальный примарный π-элемент b_0 такой, что $b_0 \in [\langle b_0^x \mid x \in \langle a_1\rangle\rangle, \langle a_1\rangle]$.

Так как $O_{\pi'}(G) = 1$, то $\left\langle b_0^G\right\rangle$ не является π'-группой и найдутся $g_1', \ldots, g_s' \in G$, для которых $\left\langle b_0^{g_1'}, \ldots, b_0^{g_s'}\right\rangle$ не является π'-группой.

Пусть $L = \langle K, g_1', \ldots, g_s'\rangle$. Очевидно $b_0 \notin O_{\pi'}(L)$ и поэтому $b_0 \notin N_{i-1}(L)$, для некоторого $i > 1$. Но тогда $a_1 \notin P_1(L)$ и, как и выше, $a_m \notin P_m(L)$, откуда π-длина L не меньше $m+1$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проведем общей индукцией по $|G|$ и m.

Теорема очевидна при $m = 1$.

Пусть $m \geqslant 2$. Если $O_{\pi'}(G) \neq 1$, то так как π-длина $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$ равна m, в $\overline{G}$ найдется по индукции разрешаемая подгруппа $\overline{H}$ π-длины m и полный прообраз $\overline{H}$ в G по индукции совпадает с G, т. е. $G/O_{\pi'}(G)$ — разрешимая группа. Пусть H — подгруппа минимального порядка, для которой $G = O_{\pi'}(G)H$. По лемме 3 H разрешима. Очевидно, π-длина H совпадает с π-длиной G, т. е. равна m. Поэтому можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$.

Теперь $O_\pi(G) \neq 1$ и π-длина $G/O_{\pi,\pi'}(G)$ равна $m-1$. По индукции в $G/O_{\pi,\pi'}(G)$ существует разрешимая подгруппа $\overline{H}$ π-длины $m-1$.

Пусть H — прообраз $\overline{H}$ в G наименьшего порядка. Тогда H разрешима по лемме 3 и $H/H \cap O_{\pi,\pi'}(G) \simeq \overline{H}$, откуда следует, что π-длина H не меньше $m-1$.

Если π-длина H равна m, то H — искомая подгруппа. Пусть π-длина H равна $m-1$. Если $\overline{A} = \langle \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m\rangle$ — опорная последовательность в $\overline{H}$, существующая по лемме 6, и $a_2, \ldots,\ a_m$ — примарные прообразы в H элементов $\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ соответственно, то $A = \{a_2, \ldots, a_m\}$ — опорная последовательность в H и $a_2 \notin O_{\pi,\pi'}(G)$.

Пусть $G_1 = O_{\pi,\pi'}(G) \cdot H$. Так как $[O_\pi(G), O_{\pi'}(G_1)] = 1$ и $O_{\pi'}(G) = 1$, то по лемме 4(a) $O_{\pi'}(G_1) = 1$.

Далее, $O_\pi(G_1)/O_\pi(G)$ централизует $O_{\pi,\pi'}(G)/O_\pi(G)$, и по лемме 4(a) $O_\pi(G_1) = O_\pi(G)$. Поэтому $P_1(G_1) = O_\pi(G)$ и, следовательно, $a_2 \notin P_1(G_1)$. Из свойств последовательности $a_2, \ldots, a_m$

теперь вытекает, что $a_m \notin P_{m-1}(G_1)$, т. е. π-длина G_1 равна m. По индукции можно считать, что $G_1 = G$.

По лемме 4(б) a_2 не централизует $R = O_{\pi,\pi'}(G)/O_\pi(G)$.

По лемме 5 в R найдется силовская подгруппа S, которую a_2 нормализует, но не централизует, а также нетривиальный элемент $\overline{b}_1 \in S$ такой, что $\overline{b}_1 \in \big[\langle \overline{b}_1^x \mid x \in \langle a_2\rangle\rangle, \langle a_2\rangle\big]$.

Пусть теперь $\hat{G} = G/O_\pi(G) = R \cdot N_G(S)$ и $\hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ — образы $a_2, \dots, a_m$ в $\hat{G}$.

Тогда $\hat{b}_2 = b_2' \cdot g_2, \dots, \hat{a}_m = a_m' \cdot g_m$, где $a_2, b_2', \dots, a_m' \in N(S)$, $g_2, \dots, g_m \in R$. Так как $N(S)/R \cap N(S) \simeq \overline{H}$ — разрешимая группа, минимальный прообраз $\overline{H}$ в $N(S)$ — разрешимая группа по лемме 3 и, в частности, элементы $a_2, b_2', \dots, a_m'$ могут быть выбраны так, чтобы они порождали разрешимую группу в $N(S)$. Поскольку $b_1 \in S$, то $\langle b_1, a_2', \dots, a_m'\rangle$ — разрешимая группа и $\hat{b}_1$ не централизует $O_\pi(G)$.

Отсюда π-длина группы $O_\pi(G) \cdot \langle b_1 a_2, \dots, a_m\rangle$ равна m и можно, как и раньше, с помощью лемм 3 и 5 найти в G разрешимую подгруппу π-длины m.

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Если G π-длины m π-разделима, то все ее конечные подгруппы π-разделимы и π-длина каждой из них, в том числе и разрешимой, не превосходит m.

Пусть теперь каждая конечная подгруппа G π-разделима, а любая разрешимая подгруппа имеет π-длину, не превосходящую m. По теореме 2 π-длина каждой конечной подгруппы G не превосходит m. По теореме 1 группа G π-разделима, а по [1] π-длина G не превосходит m. Следствие доказано.

Следующий пример показывает невозможность усиления теоремы 1.

П р и м е р. Пусть Z_p означает циклическую группу порядка p. Положим $G_0 = Z_2 \wr Z_3$ — сплетение групп порядков 2 и 3. Далее, для $m \geqslant 0$ определим $G_{4m+1} = Z_3 \wr G_{4m}$, $G_{4m+2} = G_{4m+1} \wr Z_2$, $G_{4m+3} = Z_2 \wr G_{4m+2}$, $G_{4(m+1)} = G_{4m+3} \wr Z_3$. При естественном вложении G_i в G_{i+1}, $i = 0, 1, \dots$, возникает бесконечная возрастающая последовательность $G_0 < G_1 < G_2 \dots$.

Объединение G этой последовательности является счетной локально конечной группой, в которой каждая конечная подгруппа разрешима и, в частности, $\{2\}$-разделима. Тем не менее в G нет нормальных нетривиальных примарных подгрупп, а также G не обладает нетривиальной примарной фактор-группой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Журтов А.Х., Селяева З.Б.** О локально конечных π-разделимых группах // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 2. С. 16–22.
2. **Gorenstein D.** Finite groups. N.Y.: Chelsea, 1980. 549 p.
3. **Huppert B.** Endliche gruppen I. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979. 811 p.
4. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13, no. 3. P. 775–1029.

Селяева Зулиха Борисовна
Поступила 23.12.2015
аспирант
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: zhurtov_a@mail.ru