ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.917

ОТКРЫТЫЕ УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И ОТДЕЛИМОСТЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ[1]

Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов

Исследуются ультрафильтры топологий, а также множества ультрафильтров, мажорирующих всякий раз фильтр открытых окрестностей некоторой фиксированной точки топологического пространства. Упомянутые множества рассматриваются как "укрупненные точки" исходного пространства. Изучаются условия, обеспечивающие различимость (укрупненных) "точек" упомянутого типа. При этом используются нетрадиционные аксиомы отделимости, для которых анализируется связь с известными аксиомами T_0, T_1 и T_2.

Ключевые слова: замыкание, окрестность, ультрафильтр.

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov. Open ultrafilters and separability with the use of the operation of closure.

We study ultrafilters of topologies as well as sets of ultrafilters that each time dominate the open neighborhood filter of some fixed point in a topological space. The sets of ultrafilters are considered as "enlarged points" of the original space. We study conditions that provide the discernibility of (enlarged) "points" of this type. We use nontraditional separability axioms and study their connection with the known axioms T_o, T_1, and T_2.

Keywords: closure, neighborhood, ultrafilter.

MSC: 54A10, 54A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-212-225

Введение

Основным предметом исследования в работе являются открытые ультрафильтры (у/ф), т. е. ультрафильтры топологий или ультрафильтры, "составленные" из открытых множеств. В то же время сами топологии могут рассматриваться как варианты так называемых π-систем, т. е. семейств множеств, замкнутых относительно конечных пересечений. К этому требованию добавляем нижеследующее: рассматриваем π-системы с "нулем" и "единицей". Фиксируя ту или иную π-систему, мы получаем некоторый аналог измеримого пространства. Можно рассматривать у/ф данного пространства, трактуя открытые у/ф как вариант соответствующего более общего определения. В то же время данный частный случай (открытые у/ф) представляет самостоятельный интерес в связи с понятием абсолюта [1, с. 349]. Отметим работы [2; 3], касающиеся, помимо прочего, вопросов сходимости открытых у/ф. Укажем здесь же, что другой частный случай у/ф π-систем (см. [4, с. 14]) связан с пространствами Стоуна, где используются у/ф алгебры множеств. Конструкции, использующие пространства Стоуна, оказались полезными [2] при построении расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (см. также [2] в части использования для аналогичных целей расширения Волмэна [5]), возникающих в теории управления.

Настоящее исследование непосредственно связано с работой [6], в которой конструируется абсолют хаусдорфова пространства, причем используются для этой цели открытые у/ф (максимальные центрированные системы открытых множеств). В предлагаемой статье элементы

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 16-07-00266, 16-01-00505, 16-01-00649).

конструкций [6] рассматриваются без предположения об отделимости пространства; в то же время отмечается (для некоторых положений [6]) исчерпывающий характер T_2-отделимости. Исходному пространству сопоставляется множество "укрупненных точек", которые отождествляются с непустыми замкнутыми (в естественном смысле) множествами открытых у/ф. При этом открытые у/ф, составляющие "укрупненную точку", соотносятся с некоторой точкой исходного пространства, а именно: все упомянутые у/ф сходятся к последней (в связи с общими вопросами сходимости у/ф см. [2; 7; 8]). Вполне естественным представляется вопрос о различимости "укрупненных точек", изучение которого было начато в [3]. В настоящей работе исследуются различные варианты различимости, а также соотношения, связывающие соответствующие условия упомянутой различимости с традиционными аксиомами отделимости (T_0-, T_1- и T_2-пространства). В формулировках условий на исходное пространство, обеспечивающих различимость "укрупненных точек", удается, в частности, использовать канонически открытые окрестности точек данного пространства. Связь с традиционными условиями отделимости иллюстрируется конкретными примерами.

1. Сводка обозначений общего характера

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество). *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Произвольному объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z в качестве элемента. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) X и полагаем $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, получая семейство всех непустых п/м X. Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; при $f \in B^A$ и $a \in A$ имеем $f(a) \in B$ (значение f в точке a). Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(S)\big)$, то $\mathbf{C}_S[\mathcal{S}] \triangleq \{S \setminus \mathbb{S} \colon \mathbb{S} \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(S)\big)$ (семейство, двойственное к $\mathcal{S}$). Для всяких непустого семейства $\mathcal{X}$ и множества Y в виде $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y \colon X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ имеем след $\mathcal{X}$ на множество Y. Условимся также о следующих соглашениях: если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то в виде

$$\{\cup\}(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \colon \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})\Big\} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\Xi \in \mathcal{E}} \Xi\Big) \,\Big|\, \exists\, \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \colon \Sigma = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\Big\},$$

$$\{\cap\}(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \colon \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})\Big\} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\Xi \in \mathcal{E}} \Xi\Big) \,\Big|\, \exists\, \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \colon \Sigma = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H\Big\}$$

имеем непустые семейства. Нам потребуются некоторые специальные семейства. В этой связи фиксируем до конца раздела непустое множество M. Тогда

$$\pi[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \mid (\varnothing \in \mathcal{M})\,\&\,(M \in \mathcal{M})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{M} \ \ \forall A \in \mathcal{M} \ \ \forall B \in \mathcal{M})\}$$

есть семейство всех π-систем [4, с. 14] п/м M с "нулем" и "единицей", а

$$(\mathrm{top})[M] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[M] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} = \Big\{\tau \in \pi[M] \,\Big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\Big\}$$

есть множество всех топологий на M. Пусть

$$(\mathrm{LAT})_o[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \pi[M] \mid A \cup B \in \mathcal{M} \ \ \forall A \in \mathcal{M} \ \ \forall B \in \mathcal{M}\}$$

(семейство всех решеток п/м E с "нулем" и "единицей"). Заметим, что

$$(\mathrm{top})[M] \subset (\mathrm{LAT})_o[M] \subset \pi[M]. \tag{1.1}$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[M]$ и $H \in \mathcal{P}(M)$, то через $\mathrm{cl}(H,\tau)$ обозначаем замыкание H в топологическом пространстве (ТП) (M,τ). Наряду с $(\mathrm{top})[M]$ используем множество

$$(\mathrm{clos})[M] \triangleq \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))\,\Big|\,(\varnothing \in \mathcal{F})\,\&\,(M \in \mathcal{F})\,\&\,(A \cup B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\,\&$$

$$\Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}\ \ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\Big\}$$

всех замкнутых топологий [1, с. 98,99] на множестве M. Введем в рассмотрение открытые и замкнутые базы, полагая, что

$$(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[M] \triangleq \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))\,\Big|\,\Big(M = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big)\,\&$$

$$\big(\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \ \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon (x \in B_3)\,\&\,(B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big)\Big\},$$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[M] \triangleq \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))\,\Big|\,(M \in \mathcal{B})\,\&\,\Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing\Big)\,\&$$

$$\big(\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \ \forall x \in M \setminus (B_1 \cup B_2)\ \ \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\,\&\,(x \notin B_3)\big)\Big\}$$

(введены семейства открытых и замкнутых баз). При этом

$$\big(\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[M]\ \ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[M]\big)\,\&\,\big(\{\cap\}(\widetilde{\mathcal{B}}) \in (\mathrm{clos})[M]\ \ \forall \widetilde{\mathcal{B}} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[M]\big).$$

Фильтры и ультрафильтры π-систем. Фиксируем до конца раздела произвольную π-систему $\mathcal{M} \in \pi[M]$. Ниже используется семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{M}$:

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \triangleq \Big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M})\,\Big|\,\bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing\ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\Big\}.$$

В виде

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\})\mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\,\&\\ \big(\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall \Lambda \in \mathcal{M}\ \ (F \subset \Lambda) \Rightarrow (\Lambda \in \mathcal{F})\big)\big\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

имеем множество всех фильтров π-системы $\mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*_o(\mathcal{M}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \mid \forall \Lambda \in \mathcal{M}\ \ (\Lambda \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Lambda \in \mathcal{U})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \mid \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{M}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{Z})\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

есть множество всех ультрафильтров данной π-системы; $\mathbb{F}^*_o(\mathcal{M}) \neq \varnothing$. При этом $(\mathcal{M}-\mathrm{triv})[x] \triangleq \{\Lambda \in \mathcal{M} \mid x \in \Lambda\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})\ \forall x \in M$ (введены тривиальные фильтры π-системы $\mathcal{M}$, отвечающие точкам множества M). Пусть

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{M}) \mid \Lambda \in \mathcal{U}\} \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{M}.$$

Тогда $(\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda)\colon \Lambda \in \mathcal{M}\} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})\ [\mathbb{F}^*_o(\mathcal{M})]$, а топология

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[M] \triangleq \{\cup\}\big((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}]\big) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_o(\mathcal{M})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G}\ \ \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{M}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_o(\mathcal{M})]$$

превращает $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ в T_2-пространство. Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{M} \in (\mathrm{LAT})_o[M]$. Тогда [2, § 6] $(\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$ и, как следствие, $\{\cap\}((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}]) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$; при этом (открытая) топология

$$\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[M] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$$

превращает $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ в компактное T_1-пространство (см. [2, предложение 6.1]). Итак, в рассматриваемом случае $\mathcal{M} \in (\mathrm{LAT})_o[E]$ на $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ определены две топологии: $\mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E]$ и $\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E]$. При этом [**?**, предложение 4.1] $\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E]$, и в виде $(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M}), \mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E], \mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E])$ имеем битопологическое пространство.

2. Открытые ультрафильтры и их свойства

Всюду в дальнейшем E — непустое множество и $\tau \in (\mathrm{top})[E]$; итак, (E,τ) — фиксированное ТП. Поскольку (см. (1.1)) $\tau \in (\mathrm{LAT})_o[E]$, то определены топологии $\mathbf{T}^o_\tau[E] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\tau)]$ и $\mathbf{T}^*_\tau[E] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\tau)]$. Более того [3], $\mathbf{T}^o_\tau[E] = \mathbf{T}^*_\tau[E]$, а тогда в виде

$$(\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}^*_\tau[E]) = (\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}^o_\tau[E]) \tag{2.1}$$

имеем непустой нульмерный компакт (см. [3]). Вместе с тем оказывается, что (2.1) — экстремально несвязное [5, с. 540] ТП. Действительно, при $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)$ определено множество $\Phi_\tau\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G\big) \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\tau)\big)$ и, более того,

$$\Phi_\tau\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\Big) = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]\Big). \tag{2.2}$$

Поскольку множество в левой части (2.2) открыто в ТП (2.1) (см. разд. 1), то экстремальная несвязность ТП (2.1) установлена.

Итак, (2.1) есть непустой экстремально несвязный компакт. Если $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)$, то полагаем, что $\mathbb{F}_o^*(\tau|\,\mathcal{G}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau) \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{U}\}$. В этой связи отметим, что при $x \in E$

$$N^o_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (\tau - \mathrm{triv})[x] = \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau), \tag{2.3}$$

и, как следствие, определено (непустое замкнутое) множество

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\,N^o_\tau(x)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\tau)}[\mathbf{T}^*_\tau[E]] \setminus \{\varnothing\}. \tag{2.4}$$

Семейство всех множеств (2.4) будет основным предметом дальнейшего исследования. Сейчас, следуя на идейном уровне [6], отметим, что множество

$$(\tau - \mathrm{Abs})[E] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{x\in E} \mathbb{F}_o^*\big(\tau|\,N^o_\tau(x)\big) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_o^*(\tau)) \tag{2.5}$$

может рассматриваться в виде некоторого аналога абсолюта [6] исходного ТП (E,τ); $\mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}^*_\tau[E]) = \mathbb{F}_o^*(\tau)$, а тогда ТП $\big((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}^*_\tau[E]\big|_{(\tau-\mathrm{Abs})[E]}\big)$ экстремально несвязно (см. [3]). Заметим, что $\{G \in \tau \mid E = \mathrm{cl}(G,\tau)\} \subset \mathcal{U}\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$.

Возвращаясь к (2.4), отметим, что данные множества можно рассматривать как "укрупненные точки" в (E,τ). В этой связи напомним, что (наряду с (2.3)) в [7] предлагается более общее понятие окрестности:

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, G \in N^o_\tau(x)\colon G \subset H\} \qquad \forall x \in E \tag{2.6}$$

(введено семейство всех окрестностей x в ТП (E,τ)). Кроме того,

$$\beta_o[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$$

есть (см. [7]) семейство всех баз фильтров множества E. Если $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$, то $\mathfrak{F}[\mathcal{B}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, B \in \mathcal{B}\colon B \subset H\}$ есть фильтр E, порожденный базой $\mathcal{B}$; при этом (см. [7, гл. I]) $\forall x \in E$

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset \mathfrak{F}[\mathcal{B}]). \tag{2.7}$$

Ясно, что $\mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_o[E]$, а потому (2.7) применимо к открытым фильтрам ТП (E,τ).

Предложение 2.1. *Если $x \in E$, то справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x)) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau) \mid \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\}. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (2.8), полагая $x \in E$ фиксированным. Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x))$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$ и $N_\tau^o(x) \subset \mathfrak{U}$. В частности, $\mathfrak{U} \in \beta_o[E]$ и определен "стоун-чеховский" фильтр $\widetilde{\mathfrak{U}} \triangleq \mathfrak{F}[\mathfrak{U}]$, для которого $\mathfrak{U} \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$. Как следствие $N_\tau^o(x) \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$ и (см. [7, гл. I]) с учетом (2.6) $N_\tau(x) \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$, что согласно (2.7) означает сходимость $\mathfrak{U} \overset{\tau}{\Rightarrow} x$. Поэтому $\mathfrak{U} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x)) \subset \Omega. \tag{2.9}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$ и при этом $\mathcal{V} \overset{\tau}{\Rightarrow} x$. Заметим, что, в частности, $\mathcal{V} \in \beta_o[E]$ и определен фильтр

$$\mathcal{W} \triangleq \mathfrak{F}[\mathcal{V}] = \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, V \in \mathcal{V}\colon V \subset H\},$$

для которого согласно (2.7) $N_\tau(x) \subset \mathcal{W}$. При этом, однако, $N_\tau^o(x) \subset N_\tau(x)$ и $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Тогда $N_\tau^o(x) \subset \mathcal{W} \cap \tau$, где, как легко проверить (см. [9, (2.4.5)]), $\mathcal{W} \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$. При этом $\mathcal{V} \subset \tau$, а потому $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \cap \tau$. Тогда (см. (1.3)) $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \tau$, и, как следствие, $N_\tau^o(x) \subset \mathcal{V}$. В итоге $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x))$, чем завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}_o^*\big(\tau|\, N_\tau^o(x)\big)$, откуда с учетом (2.9) следует равенство $\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x)) = \Omega$.

Предложение доказано.

С учетом предложения 2.1 логично рассматривать множества (2.4) как "укрупненные точки" исходного ТП. Кроме того, из (2.5) и предложения 2.1 следует, что

$$\forall \mathcal{U} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E]\ \ \exists\, x \in E : \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x. \tag{2.10}$$

3. Вопросы различимости "укрупненных точек"

В настоящем разделе исследуются условия на ТП (E,τ), позволяющие в том или ином смысле различать множества (2.4), отвечающие выбору несовпадающих точек множества E.

Предложение 3.1. *Если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, то*

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \neq \varnothing\big) \iff \big(\exists\, G \in \tau\colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\, \&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau))\big). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$. Пусть истинно утверждение в левой части (3.1). С учетом этого выберем и зафиксируем у/ф

$$\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)).$$

Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$, $N_\tau^o(x_1) \subset \mathfrak{U}$ и $N_\tau^o(x_2) \setminus \mathfrak{U} \neq \varnothing$. В силу (1.3) имеем, что $\forall G \in \tau$

$$(G \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathfrak{U}) \Longrightarrow (G \in \mathfrak{U}). \tag{3.2}$$

Пусть $\mathbb{G} \in N_\tau^o(x_2) \setminus \mathfrak{U}$. Тогда (см. (3.2)) для некоторого $U_o \in \mathfrak{U}$ имеем равенство $\mathbb{G} \cap U_o = \varnothing$, откуда следует, что

$$x_2 \notin \mathrm{cl}(U_o, \tau). \tag{3.3}$$

С другой стороны, поскольку $U_o \in \mathfrak{U}$ и $N_\tau^o(x_1) \subset \mathfrak{U}$, имеем, что $U_o \cap G \neq \varnothing \ \ \forall G \in N_\tau^o(x_1)$. Последнее означает, что $x_1 \in \mathrm{cl}(U_o, \tau)$, откуда согласно (3.3) имеем:

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(U_o, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(U_o, \tau)). \tag{3.4}$$

Поскольку $U_o \in \tau$, из (3.4) вытекает истинность утверждения в правой части (3.1). Установлена импликация

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \neq \varnothing\big) \Rightarrow \big(\exists\, G \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G, \tau))\big). \tag{3.5}$$

Пусть, напротив, истинно утверждение в правой части (3.1) (т. е. утверждение следствия (3.5)). Выберем и зафиксируем $V \in \tau$ со свойством

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(V, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(V, \tau)). \tag{3.6}$$

Тогда (см. (3.6)) $V \cap G \neq \varnothing \ \ \forall G \in N_\tau^o(x_1)$. Поэтому $\mathcal{A} \overset{\triangle}{=} N_\tau^o(x_1) \cup \{V\} \in (\mathrm{Cen})[\tau]$, а тогда, как легко видеть, $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ для некоторого у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$. В частности, $N_\tau^o(x_1) \subset \mathcal{V}$, и, следовательно,

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)). \tag{3.7}$$

С другой стороны, $E \backslash \mathrm{cl}(V, \tau) \in \tau$ и согласно (3.6) $x_2 \in E \backslash \mathrm{cl}(V, \tau)$. Поэтому $E \backslash \mathrm{cl}(V, \tau) \in N_\tau^o(x_2)$. Поскольку $V \in \mathcal{V}$, то (см. (1.2))

$$(E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in \mathcal{V}) \implies \big((E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)) \cap V \neq \varnothing\big). \tag{3.8}$$

Однако $V \subset \mathrm{cl}(V, \tau)$, и потому $(E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)) \cap V = \varnothing$, а тогда согласно (3.8)

$$E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \notin \mathcal{V}.$$

Получили свойство $E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in N_\tau^o(x_2) \setminus \mathcal{V}$. Тогда $N_\tau^o(x_2) \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$ и $\mathcal{V} \notin \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2))$. В итоге (см. (3.7))

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)).$$

Тем самым установлена импликация, противоположная (3.5), а стало быть, и эквиваленция (3.1).

Предложение доказано.

Следствие 3.1. *Если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, то*

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \neq \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2))\big) \Longleftrightarrow$$

$$\big((\exists\, G_1 \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau))) \vee (\exists\, G_2 \in \tau \colon (x_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)) \,\&\, (x_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau)))\big).$$

Доказательство вытекает из предложения 3.1 с учетом того, что

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \neq \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2))\big) \Longleftrightarrow$$

$$\big((\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \neq \varnothing) \vee (\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \neq \varnothing)\big).$$

Определение 3.1. Будем называть ТП (E, τ) $T_{[0]}$-*пространством*, если $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (x_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)) \,\&\, (x_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau))\big).$$

В силу следствия 3.1 получаем теперь

Предложение 3.2. *Эквивалентны следующие условия*:
1) (E,τ) *есть* $T_{[0]}$*-пространство*;
2) $\mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_1)) \neq \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_2)) \qquad \forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем называть ТП (E,τ) $T_{[1]}$*-пространством*, если $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ $\exists\, G \in \tau$: $(x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau))$.

Из предложения 3.1 получаем очевидное теперь

Предложение 3.3. *Эквивалентны следующие условия*:
1′) (E,τ) *есть* $T_{[1]}$*-пространство*;
2′) $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_2)) \neq \varnothing\big)\,\&\,\big(\mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_2)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_1)) \neq \varnothing\big).$$

Вполне очевидно также следующее свойство: из того, что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство, вытекает, что (E,τ) является $T_{[0]}$-пространством.

Предложение 3.4. *Если ТП (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство, то оно является также T_1-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство. Выберем произвольно $u \in E$ и $v \in E \setminus \{u\}$. Тогда $v \in E$ и $u \in E \setminus \{v\}$. С учетом определения 3.2 подберем $\mathbb{G} \in \tau$ со свойствами

$$(v \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau))\,\&\,(u \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)). \tag{3.9}$$

Тогда $E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in \tau$ и при этом (см. (3.9)) $u \in E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Это означает, что $E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in N^o_\tau(u)$.
С другой стороны, из (3.9) вытекает, что $v \notin E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Стало быть, $\exists\, G \in N^o_\tau(u)$: $v \notin G$. Поскольку выбор u и v был произвольным, установлено, что (E,τ) есть T_1-пространство.
Предложение доказано.

Предложение 3.5. *Из того, что (E,τ) есть T_2-пространство, следует*: (E,τ) *является также $T_{[1]}$-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (E,τ) является T_2-пространством. Выберем произвольно $u \in E$ и $v \in E \setminus \{u\}$. Используя отделимость (E,τ), подберем $G' \in N^o_\tau(u)$ и $G'' \in N^o_\tau(v)$, для которых $G' \cap G'' = \varnothing$. При этом $E \setminus G'' \in \mathbf{C}_E[\tau]$ и $G' \subset E \setminus G''$. Поэтому $\mathrm{cl}(G',\tau) \subset E \setminus G''$, откуда следует, что $u \in \mathrm{cl}(G',\tau)$ и $v \notin \mathrm{cl}(G',\tau)$. Поскольку $G' \in \tau$, получили, что $\exists\, G \in \tau$: $(u \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(v \notin \mathrm{cl}(G,\tau))$. Коль скоро выбор u и v был произвольным, установлено (см. определение 3.2), что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство.
Предложение доказано.

Отметим еще несколько свойств, имеющих отношение к проблеме различимости “укрупненных точек”. Так $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E$

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_1)) \cap \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_2)) = \varnothing\big) \Longleftrightarrow \big(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(x_1)\ \exists\, G_2 \in N^o_\tau(x_2)\colon G_1 \cap G_2 = \varnothing\big). \tag{3.10}$$

З а м е ч а н и е 3.1. В связи с проверкой (3.10) ограничимся следующим рассуждением. Пусть утверждение в левой части (3.10) выполнено, а утверждение в правой части — нет. Итак,

$$G_1 \cap G_2 \neq \varnothing \qquad \forall G_1 \in N^o_\tau(x_1) \qquad \forall G_2 \in N^o_\tau(x_2) \tag{3.11}$$

(в пределах данного замечания $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ фиксированы). Тогда, как легко видеть, $N^o_\tau(x_1) \cup N^o_\tau(x_2) \in (\mathrm{Cen})[\tau]$, а потому для некоторого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau)$ имеем, что $N^o_\tau(x_1) \cup N^o_\tau(x_2) \subset \mathcal{U}$. Поэтому $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_1)) \cap \mathbb{F}^*_o(\tau|\,N^o_\tau(x_2))$, что невозможно. Полученное противоречие опровергает (3.11). Прочие рассуждения по проверке (3.10) очевидным образом следуют из определений.

Введем в рассмотрение канонически открытые и канонически замкнутые множества в ТП (E,τ) (см. [1, с. 105, 106]). Пусть

$$(\tau-\mathrm{Int})[A] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in E \mid A \in N_\tau(x)\} \qquad \forall A \in \mathcal{P}(E) \tag{3.12}$$

(посредством (3.12) введена внутренность произвольного п/м E). Тогда

$$(\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{(\tau-\mathrm{int})[F] \colon F \in \mathbf{C}_E[\tau]\} \in \mathcal{P}'(\tau)$$

есть семейство всех канонически открытых (в (E,τ)) п/м E. Соответственно

$$(\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{cl}(G,\tau) \colon G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\tau]) \tag{3.13}$$

есть семейство всех канонически замкнутых п/м E. Легко видеть, что

$$(E\backslash F \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\ \forall F \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau])\,\&\,(E\backslash G \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]\ \forall G \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]). \tag{3.14}$$

Предложение 3.6. *Эквивалентны следующие условия*:
1) (E,τ) *есть* $T_{[1]}$*-пространство*;
2) $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, G \in N^o_\tau(x_1) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau] \colon x_2 \notin G.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Итак, пусть истинно 1), т. е. (E,τ) — $T_{[1]}$-пространство. Пусть $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E \setminus \{x^{(1)}\}$. Тогда (см. определение 3.2) имеем $\mathbb{G} \in \tau$ со свойствами

$$(x^{(2)} \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau))\,\&\,(x^{(1)} \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)), \tag{3.15}$$

где $\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$. Тогда $E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ в силу (3.14) и при этом $x^{(1)} \in E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Имеем, в частности,

$$E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in \tau \colon x^{(1)} \in E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau).$$

Это означает, что $E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in N^o_\tau(x^{(1)}) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$, причем согласно (3.15) $x^{(2)} \notin E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Так как выбор $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ был произвольным, установлено свойство 2). Итак, 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть теперь истинно 2). Выберем произвольно $y_1 \in E$ и $y_2 \in E\setminus\{y_1\}$. Тогда для некоторой окрестности

$$\Gamma \in N^o_\tau(y_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau] \tag{3.16}$$

имеет место свойство $y_1 \notin \Gamma$ (учитываем, что $y_2 \in E$ и $y_1 \in E \setminus \{y_2\}$). Тогда в силу (3.14) $E \setminus \Gamma \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$, причем $y_1 \in E \setminus \Gamma$. Вместе с тем $E \setminus \Gamma = \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$, где $\Omega \in \tau$. Поэтому $y_1 \in \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$. Кроме того, $y_2 \in \Gamma$ в силу (3.16), а потому $y_2 \notin E \setminus \Gamma$ и, стало быть, $y_2 \notin \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$. Поэтому

$$\Omega \in \tau \colon (y_1 \in \mathrm{cl}(\Omega,\tau))\,\&\,(y_2 \notin \mathrm{cl}(\Omega,\tau)).$$

Поскольку выбор y_1 и y_2 был произвольным, установлено, что

$$\forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\} \qquad \exists\, G \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau)).$$

С учетом определения 3.2 получаем, что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство, т. е. истинно 1). Итак, 2) $\Rightarrow$ 1), а потому 1) $\Leftrightarrow$ 2).

Предложение доказано.

Предложение 3.7. *Эквивалентны следующие условия*:
1) (E,τ) *есть* $T_{[0]}$*-пространство*;
2) $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(x_1) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau] \colon x_2 \notin G_1) \vee (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(x_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau] \colon x_1 \notin G_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства подобна в значительной степени рассуждению предыдущего доказательства. Тем не менее в целях полноты изложения рассмотрим эту схему. Пусть истинно 1) и выбраны произвольные точки $u_1 \in E$ и $u_2 \in E \setminus \{u_1\}$. Тогда

$$\begin{gathered}\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (u_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(u_2 \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \\ \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (u_1 \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(u_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Рассмотрим первую возможность в (3.17), фиксируя $\mathbb{G}_1 \in \tau$ со свойствами $(u_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau))\,\&$ $(u_2 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau))$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$ и, как следствие (см. (3.14)), $\mathbb{G}^{(1)} \triangleq E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$, причем $u_2 \in \mathbb{G}^{(1)}$. Тогда $\mathbb{G}^{(1)} \in N^o_\tau(u_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $u_1 \notin \mathbb{G}^{(1)}$. Итак, из первого положения в (3.17) следует, что

$$\exists\, G \in N^o_\tau(u_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_1 \notin G. \tag{3.18}$$

Пусть истинно второе утверждение в (3.17) и $\mathbb{G}_2 \in \tau$ таково, что $(u_1 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau))\,\&\,(u_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau))$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$, а потому (см. (3.14)) $\mathbb{G}^{(2)} \triangleq E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$, причем $u_1 \in \mathbb{G}^{(2)}$ и $u_2 \notin \mathbb{G}^{(2)}$. Итак, из второго положения в (3.17) следует, что

$$\exists\, G \in N^o_\tau(u_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_2 \notin G. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19) вытекает, что при условии (3.17) непременно

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(u_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_2 \notin G_1) \,\vee\, (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(u_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_1 \notin G_2).$$

Поскольку u_1 и u_2 выбирались произвольно, имеем 2). Следовательно, 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть истинно 2). Выберем произвольно $v_1 \in E$ и $v_2 \in E \setminus \{v_1\}$. Тогда

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(v_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_2 \notin G_1) \,\vee\, (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(v_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_1 \notin G_2). \tag{3.20}$$

Пусть сначала истинно первое положение в (3.20), а $\Gamma_1 \in N^o_\tau(v_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $v_2 \notin \Gamma_1$. Тогда $E \setminus \Gamma_1 \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$ и, стало быть, $E \setminus \Gamma_1 = \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$, где $\Gamma^o_1 \in \tau$. Тогда $v_1 \notin \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$ и $v_2 \in \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$. Итак,

$$\big(\exists G_1 \in N^o_\tau(v_1) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_2 \notin G_1\big) \Longrightarrow \big(\exists G' \in \tau\colon (v_1 \notin \mathrm{cl}(G',\tau))\&(v_2 \in \mathrm{cl}(G',\tau))\big). \tag{3.21}$$

Пусть истинно второе положение в (3.20), а $\Gamma_2 \in N^o_\tau(v_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $v_1 \notin \Gamma_2$. Тогда $E \setminus \Gamma_2 \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$, откуда следует, что $E \setminus \Gamma_2 = \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$, где $\Gamma^o_2 \in \tau$. Тогда $v_1 \in \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$. Вместе с тем $v_2 \notin E \setminus \Gamma_2$ и, как следствие, $v_2 \notin \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$. Поэтому

$$\exists\, G'' \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\,\&\,(v_2 \notin \mathrm{cl}(G'',\tau)),$$

чем и завершается проверка истинности импликации

$$\big(\exists G_2 \in N^o_\tau(v_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_1 \notin G_2\big) \Longrightarrow \big(\exists G'' \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\&(v_2 \notin \mathrm{cl}(G'',\tau))\big). \tag{3.22}$$

Из (3.20)–(3.22) получаем теперь, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(v_2 \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (v_1 \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(v_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big).$$

Поскольку выбор v_1 и v_2 был произвольным, установлено (см. определение 3.1), что (E,τ) есть $T_{[0]}$-пространство, т. е. истинно 1). Итак, 2) $\Rightarrow$ 1).

Предложение доказано.

4. Некоторые примеры

В настоящем разделе уточняются соотношения, связывающие $T_{[0]}$- и $T_{[1]}$-пространства с ТП, удовлетворяющими традиционным аксиомам отделимости. Сначала рассмотрим простейший пример T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства.

Итак, пусть (здесь и ниже) $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$. Через $\mathfrak{K}$ обозначаем далее семейство всех конечных п/м $\mathbb{N}$: $\mathfrak{K} \overset{\triangle}{=} \mathrm{Fin}(\mathbb{N}) \cup \{\varnothing\}$.

П р и м е р 1. Пусть $E = \mathbb{N}$ и $\tau = \{\mathbb{N} \setminus K : K \in \mathfrak{K}\} \cup \{\varnothing\}$. Итак, рассматриваем натуральный ряд в топологии Зарисского (см. [8, с. 11]). Легко видеть, что (E, τ) является (в данном случае) T_1-пространством. При этом $\mathbf{C}_E[\tau] = \mathfrak{K} \cup \{E\}$. Покажем сначала, что (E, τ) не является $T_{[1]}$-пространством. Фиксируем $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ (x_1 и x_2 — два различных натуральных числа). Допустим, что для некоторого множества $\mathbb{G} \in \tau$

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)). \tag{4.1}$$

Тогда (см. первое положение в (4.1)) $\mathbb{G} \neq \varnothing$, а потому $\mathbb{G} = E \setminus \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} \in \mathfrak{K}$. Тогда $\mathbb{G}$ — бесконечное множество и $\mathbb{G} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$, а потому $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau) = E$ (поскольку $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$) и, вопреки (4.1), $x_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$. Полученное противоречие показывает, что (4.1) невозможно ни при каком выборе множества $\mathbb{G} \in \tau$, откуда легко следует, что (E, τ) не является $T_{[1]}$-пространством.

Фактически данный вывод может быть усилен:

$$\mathfrak{W} \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{N} \setminus K : K \in \mathfrak{K}\} = \tau \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$$

и, более того, $\mathbb{F}_o^*(\tau) = \{\mathfrak{W}\}$ (действительно, если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, то $\mathcal{F}$ состоит из непустых открытых множеств и, стало быть, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{W}$, где $\mathfrak{W} \in \mathbb{F}^*(\tau)$). Ясно также, что в данном случае $N_\tau^o(k) \subset \mathfrak{W}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. В самом деле, открытые окрестности содержатся в $\tau \setminus \{\varnothing\} = \mathfrak{W}$. Поэтому $\mathbb{F}_o^*(\tau | N_\tau^o(k)) = \{\mathfrak{W}\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Мы получили свойство “полной неразличимости” (в смысле (2.4)) элементов $E = \mathbb{N}$. Отсюда, кстати, следует (см. предложение 3.2), что (E, τ) не является $T_{[0]}$-пространством (учитываем, что $E = \mathbb{N}$ неодноточечно). Итак, получен пример T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства.

Следовательно, существуют T_1-пространства, не являющиеся $T_{[0]}$-пространствами. При этом имеются бесконечные T_1-пространства, для которых все множества (2.4) совпадают.

Теперь рассмотрим пример $T_{[0]}$-, но не T_1-пространства. Для этого воспользуемся схемой построения ТП в терминах систем окрестностей (см. [1; 5; 8]), элементы которой напомним в требуемом (для примера) варианте.

П р и м е р 2. Через $(\mathrm{SYST})[E]$ обозначим множество всех отображений $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^E$, для каждого из которых

$$(x \in U \ \ \forall x \in E \ \ \forall U \in \mathfrak{U}(x)) \,\&\, (\forall x \in E \ \ \forall U_1 \in \mathfrak{U}(x) \ \ \forall U_2 \in \mathfrak{U}(x) \ \ \exists U_3 \in \mathfrak{U}(x) : U_3 \subset U_1 \cap U_2). \tag{4.2}$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E] \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \forall x \in G \ \ \exists U \in \mathfrak{U}(x) : U \subset G\} \in (\mathrm{top})[E]$ $\forall \mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})[E]$. Пусть далее

$$(\mathrm{SYST})_o[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})[E] \mid \forall x \in E \ \ \forall U_1 \in \mathfrak{U}(x) \ \ \forall y \in U_1 \ \ \exists U_2 \in \mathfrak{U}(y) : U_2 \subset U_1\}.$$

Легко видеть, что при $\mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})_o[E]$ и $x \in E$ семейство $\mathfrak{U}(x)$ является локальной базой топологии $(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E]$ в точке x (фундаментальной системой окрестностей) и, в частности, $\mathfrak{U}(x) \subset N^o_{(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E]}(x)$.

Сейчас мы сконструируем нужный вариант отображения $\mathfrak{U}$. Пусть

$$E \overset{\triangle}{=} (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \tag{4.3}$$

($\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Теперь введем требуемый вариант отображения из $(\mathrm{SYST})_o[E]$. Итак, полагаем при $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, что

$$V_\varepsilon(x) \triangleq \{(y,0)\colon y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times\{0\}.$$

Далее, при $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\varepsilon \in]0,|x|[$ полагаем

$$W_\varepsilon(x) \triangleq \{(y,1)\colon y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\times\{1\}.$$

Наконец, пусть $U_\varepsilon \triangleq \{(x,0)\colon x \in]-\varepsilon,\varepsilon[\} \cup \{(y,1)\colon y \in]-\varepsilon,\varepsilon[\}\ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$. Если $z \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно:

$$z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)), \qquad \mathrm{pr}_1(z) \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{pr}_2(z) \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

В силу (4.3) соглашение (4.4) применимо к элементам E.

Пусть теперь $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^E$ определяется условиями

$$\begin{gathered}\big(\mathcal{T}(z) \triangleq \{V_\varepsilon(\mathrm{pr}_1(z))\colon \varepsilon \in]0,\infty[\}\ \forall z \in \mathbb{R}\times\{0\}\big)\ \&\\ \big(\mathcal{T}(z) \triangleq \{W_\varepsilon(\mathrm{pr}_1(z))\colon \varepsilon \in]0,|\mathrm{pr}_1(z)|[\}\ \forall z \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\{1\}\big)\ \&\\ \big(\mathcal{T}(z_o) \triangleq \{U_\varepsilon\colon \varepsilon \in]0,\infty[\}\big),\end{gathered} \tag{4.5}$$

где $z_o \triangleq (0,1)$. Заметим, что каждая из зависимостей

$$\varepsilon \longmapsto V_\varepsilon(x)\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathcal{P}'(E), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon \longmapsto W_\varepsilon(x)\colon]0,|x|[\longrightarrow \mathcal{P}'(E), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\varnothing\},$$

$$\varepsilon \longmapsto U_\varepsilon\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathcal{P}'(E)$$

изотонна, а тогда (см. (4.2), (4.5)) $\mathcal{T} \in (\mathrm{SYST})[E]$ и определена топология $(\mathcal{T}-\mathrm{top})^o_*[E] = \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \forall z \in G\ \exists U \in \mathcal{T}(z)\colon U \subset G\} \in (\mathrm{top})[E]$. Кроме того, из (4.5) вытекает, что $\forall z \in E\ \forall \widetilde{U}_1 \in \mathcal{T}(z)\ \forall y \in \widetilde{U}_1\ \exists \widetilde{U}_2 \in \mathcal{T}(y)\colon \widetilde{U}_2 \subset \widetilde{U}_1$. Поэтому $\mathcal{T} \in (\mathrm{SYST})_o[E]$. Полагая в дальнейшем, что $\tau \triangleq (\mathcal{T}-\mathrm{top})^o_*[E]$, мы имеем важное свойство: при $z \in E$ семейство $\mathcal{T}(z) \in \mathcal{P}'(\tau)$ является локальной базой в точке z:

$$(\mathcal{T}(z) \subset N^o_\tau(z))\,\&\,(\forall G \in N^o_\tau(z)\ \exists T \in \mathcal{T}(z)\colon T \subset G). \tag{4.6}$$

В частности, (4.6) справедливо при $z = z_o$. Тогда (E,τ) не является T_1-пространством, так как при всяком выборе $G \in N^o_\tau(z_o)$ имеем $U_\varepsilon \subset G$ при некотором $\varepsilon \in]0,\infty[$ и, как следствие, $(0,0) \in G$.

Покажем, что (E,τ) является $T_{[0]}$-пространством. Пусть $a \in E$ и $b \in E\setminus\{a\}$. Надо проверить, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big).$$

При этом согласно (4.3) $i \triangleq \mathrm{pr}_2(a) \in \{0;1\}$ и $j \triangleq \mathrm{pr}_2(b) \in \{0;1\}$, где $\{0;1\} \triangleq \{0\}\cup\{1\}$. Пусть $\alpha \triangleq \mathrm{pr}_1(a)$ и $\beta \triangleq \mathrm{pr}_1(b)$, тогда $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Поскольку $a \neq b$, то

$$(\alpha \neq \beta) \vee (i \neq j). \tag{4.7}$$

Оба случая, упомянутые в (4.7), рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала $\alpha \neq \beta$, тогда $|\alpha-\beta| \in]0,\infty[$. При этом $(\alpha \neq 0) \vee (\beta \neq 0)$. Пусть $\alpha \neq 0$. Полагаем, что

$$\varepsilon^o_\alpha \triangleq 1/2\ \inf(\{|\alpha-\beta|; |\alpha|/2\}).$$

Тогда $\varepsilon^o_\alpha \in]0,\infty[$, $\Sigma \stackrel{\triangle}{=}]\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha[\times\{i\} \in \tau$ и $\mathrm{cl}(\Sigma,\tau) = [\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha]\times\{i\}$, причем $b \notin \mathrm{cl}(\Sigma,\tau)$, так как $\beta \notin [\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha]$. С другой стороны, $a = (\alpha, i) \in \mathrm{cl}(\Sigma,\tau)$. Итак, имеем, что

$$(\alpha \neq 0) \Longrightarrow \big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big). \tag{4.8}$$

Пусть теперь $\beta \neq 0$. Введем в рассмотрение

$$\varepsilon^o_\beta \stackrel{\triangle}{=} 1/2\ \inf(\{|\alpha-\beta|;|\beta|/2\}) \in]0,\infty[.$$

Тогда $\varepsilon^o_\beta \in]0,\infty[$ и $\Xi \stackrel{\triangle}{=}]\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta[\times\{j\} \in \tau$. При этом $\mathrm{cl}(\Xi,\tau) = [\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta]\times\{j\}$. Ясно, что $b \in \mathrm{cl}(\Xi,\tau)$, так как $b = (\beta, j)$. Вместе с тем $\alpha \notin [\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta]$, и, стало быть, $a \notin \mathrm{cl}(\Xi,\tau)$. Поэтому

$$(\beta \neq 0) \Longrightarrow \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big). \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) получаем нужное свойство $T_{[0]}$-отделимости векторов a и b в случае 1). Итак, установлена импликация

$$(\alpha \neq \beta) \Longrightarrow \Big(\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big)\Big). \tag{4.10}$$

2) Пусть $i \neq j$. Если при этом $\alpha \neq \beta$, то истинно утверждение в правой части (4.10). Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha = \beta$. Итак, пусть $a = (\alpha, i)$ и $b = (\alpha, j)$. Если $\alpha \neq 0$, то из (4.5) следует, в частности, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big) \tag{4.11}$$

(на самом деле можно утверждать большее).

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$. Тогда $a = (0, i)$ и $b = (0, j)$, где $i \neq j$. Отдельно обсудим случаи $(i = 0)\,\&\,(j = 1)$ и $(i = 1)\,\&\,(j = 0)$.

$1'$) Пусть $i = 0$ и $j = 1$, тогда $a = (0,0)$ и $b = (0,1)$. Имеем, что $T \stackrel{\triangle}{=}]-\infty, 0[\,\times\{1\} \in \tau$ и согласно (4.5) $b = (0,1) \in \mathrm{cl}(T,\tau)$, где $\mathrm{cl}(T,\tau) =]-\infty, 0]\,\times\{1\}$. В то же время $a \notin \mathrm{cl}(T,\tau)$. Итак,

$$\big((i = 0)\,\&\,(j = 1)\big) \Longrightarrow \big(\exists\, G' \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G',\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G',\tau))\big). \tag{4.12}$$

$2'$) Пусть $i = 1$ и $j = 0$, тогда $a = (0,1)$ и $b = (0,0)$. Мы снова используем множество $T \in \tau$ (см. случай $1'$)). При этом $a = (0,1) \in]-\infty, 0]\times\{1\}$, т. е. $a \in \mathrm{cl}(T,\tau)$, в то время как $b \notin \mathrm{cl}(T,\tau)$. Получили, что

$$\big((i = 1)\,\&\,(j = 0)\big) \Longrightarrow \big(\exists\, G'' \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G'',\tau))\big). \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) получаем, что и при $\alpha = 0$ справедливо (4.11). С учетом этого имеем, что

$$(i \neq j) \Longrightarrow \Big(\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big)\Big). \tag{4.14}$$

Из (4.10) и (4.14) вытекает, что (4.11) справедливо во всех возможных случаях. Поскольку выбор $a \in E$ и $b \in E \setminus \{a\}$ был произвольным, установлено, что в рассматриваемом случае (E,τ) является $T_{[0]}$-пространством, не будучи T_1-пространством.

Итак, существуют T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства, и $T_{[0]}$-, но не T_1-пространства.

5. Некоторые замечания о T_2-отделимости

В настоящем разделе мы, следуя идейно конструкциям [6], отметим некоторые простые добавления, связанные со свойством (3.10). Прежде всего отметим (в развитие положений [6]), что в силу (1.2), (1.3) и (3.10) имеет место свойство: (E,τ) есть T_2-пространство тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(x_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(x_2)) = \varnothing \qquad \forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) и предложения 2.1 получаем, что в случае, когда (E,τ) есть T_2-пространство, имеет место свойство

$$\forall \mathcal{U} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E] \qquad \exists!\, x \in E : \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x, \tag{5.2}$$

являющееся усилением (2.10). Справедливо также следующее предложение.

Предложение 5.1. *Если ТП* (E,τ) *удовлетворяет условию* (5.2), *то оно является* T_2*-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинно (5.2). Покажем, что (E,τ) есть T_2-пространство. Допустим противное. Тогда для некоторых точек $q_1 \in E$ и $q_2 \in E \setminus \{q_1\}$ имеем

$$G_1 \cap G_2 \neq \varnothing \qquad \forall G_1 \in N_\tau^o(q_1) \qquad \forall G_2 \in N_\tau^o(q_2). \tag{5.3}$$

С учетом (3.10) и (5.3) получаем тогда свойство $\mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(q_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(q_2)) \neq \varnothing$.

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(q_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\,N_\tau^o(q_2))$. Из предложения 2.1 получаем, стало быть, что

$$(\mathcal{V} \overset{\tau}{\Longrightarrow} q_1)\,\&\,(\mathcal{V} \overset{\tau}{\Longrightarrow} q_2), \tag{5.4}$$

где $\mathcal{V} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E]$ в силу (2.5). С учетом (5.2) получаем из (5.4), что $q_1 = q_2$. Однако по выбору q_1 и q_2 имеем свойство $q_1 \neq q_2$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что (E,τ) является T_2-пространством.

Предложение доказано.

Из (5.1) и предложения 5.1 вытекает с очевидностью

Теорема 5.1. *Эквивалентны следующие условия*:
1) (E,τ) *есть* T_2*-пространство*; 2) *истинно* (5.2).

В связи с построением аналогов T_2-отделимости, использующих операцию замыкания, отметим следующую возможность.

О п р е д е л е н и е 5.1. Назовем ТП (E,τ) $T_{[2]}$-пространством, если $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, G_1 \in \tau\ \ \exists\, G_2 \in \tau$:

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(x_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(\mathrm{cl}(G_1,\tau) \cap \mathrm{cl}(G_2,\tau) = \varnothing).$$

З а м е ч а н и е 5.1. Отметим возможный вариант определения 5.1. (E,τ) есть $T_{[2]}$-пространство, если $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, F_1 \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]\ \ \exists\, F_2 \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]$:

$$(x_1 \in F_1)\,\&\,(x_2 \in F_2)\,\&\,(F_1 \cap F_2 = \varnothing). \tag{5.5}$$

Эквивалентность определения в терминах (5.5) и определения 5.1 вытекает из (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
2. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика, механика, компьютерные науки.)
3. **Пыткеев Е. Г., Ченцов А. Г.** Некоторые свойства открытых ультрафильтров // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2015. Вып. 2(46). С. 140–148.
4. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
5. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
6. **Илиадис С. Д., Фомин С. В.** Метод центрированных систем в теории топологических пространств // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, № 4. С. 47–76.
7. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
8. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.** Общая топология: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1979. 336 с.
9. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.

Поступила 14.01.2016

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pyt@imm.uran.ru