ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.658.4

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ВОПРОСЫ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов, В. Д. Скарин

Авторы продолжают изучение аппроксимационных свойств альтернативных схем двойственности для несобственных задач линейного программирования. Изучаемые схемы основаны на использовании классической функции Лагранжа, регуляризованной одновременно по прямым и двойственным переменным. Полученные ранее результаты о связи ее седловых точек с лексикографической коррекцией правых частей ограничений несобственных задач 1-го и 2-го рода перенесены на более общий вид несобственности. Приведены теоремы сходимости, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, несобственные задачи, обобщенные решения, метод регуляризации, метод штрафных функций.

L. D. Popov, V. D. Skarin. Duality and correction of inconsistent constraints for improper linear programming problems.

We continue the study of approximation properties of alternative duality schemes for improper problems of linear programming. The schemes are based on the use of the classical Lagrange function regularized simultaneously in direct and dual variables. The results on the connection of its saddle points with the lexicographic correction of the right-hand sides of constraints in improper problems of the first and second kind are transferred to a more general type of improperness. Convergence theorems are presented and an informal interpretation is given for the obtained generalized solution.

Keywords: linear programming, duality, improper problems, generalized solutions, regularization, penalty methods.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-200-211

Введение

Несобственными принято называть задачи линейного программирования (ЛП), системы ограничений которых, прямые или двойственные, в силу тех или иных причин содержат противоречия [1;2]. Последние могут возникать, например, из-за погрешностей в задании исходной информации, рассогласования ресурсных ограничений и целей математической модели, противоречивости требований, предъявляемых к объекту моделирования и др.

Несобственные задачи ЛП, не имея решения в обычном понимании этого термина, неизбежно должны быть подвергнуты корректировке. Естественно, что такая корректировка должна вносить в них изменения, минимально необходимые для обеспечения свойств разрешимости задачи, и проводиться при посредстве формальных математических методов, называемых методами оптимальной коррекции.

Основой построения методов оптимальной коррекции обычно служат различные схемы нестандартного формирования двойственности для несобственных задач ЛП [1; 2]. Ниже будут исследованы методы оптимальной коррекции несобственных задач ЛП, построенные на основе симметричной регуляризации классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным [3–6]. Предпочтение будет отдано изучению лексикографической постановки [7; 8]. Работа продолжает исследование, начатое в [9] для несобственных

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

задач ЛП 1-го и 2-го рода, и обобщает ее результаты на произвольный тип несобственности. Технической базой исследования служат работы по устойчивости задач квадратичного программирования [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач ЛП:

$$P\colon \quad \max\{(c,\, x)\colon Ax \le b,\ x \ge 0\}, \tag{1}$$

$$D\colon \quad \min\{(b,\, y)\colon A^\top y \ge c,\ y \ge 0\}. \tag{2}$$

Здесь векторы $c, x \in \mathbb{R}^n,\ b, y \in \mathbb{R}^m$, A — матрица размера $m \times n$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Хорошо известно, что если разрешима одна из выписанных задач, то разрешима и другая и их оптимальные значения совпадают. Простым критерием разрешимости этих задач является условие одновременной совместности их систем ограничений.

Если хотя бы одна из систем несовместна, обе задачи становятся неразрешимыми (несобственными). При этом задача называется несобственной 1-го рода, если несовместна только ее система ограничений, несобственной 2-го рода, если несовместна только система ограничений двойственной задачи, и несобственной 3-го рода, если несовместны обе системы одновременно. Несобственность 1-го рода достаточно часто встречается на практике в технических и экономических приложениях, несобственность 2-го рода является ее двойственным отражением, несобственность 3-го рода является своеобразной и неустойчивой “тонкой границей” между первыми двумя родами несобственности в “информационном пространстве” [2].

Один из общих формализованных подходов к анализу несобственных задач ЛП состоит в следующем [2]. Задачи (1), (2) погружают в параметрическое семейство задач вида

$$\max\{(c - \Delta c,\, x)\colon Ax \le b + \Delta b,\ x \ge 0\}, \tag{3}$$

$$\min\{(b + \Delta b,\, y)\colon A^\top y \ge c - \Delta c,\ y \ge 0\}, \tag{4}$$

после чего переходят к поиску таких минимальных (например, относительно евклидовой нормы) векторов коррекции $\widetilde{\Delta} b \ge 0$, $\widetilde{\Delta} c \ge 0$, которые обеспечивали бы совместность ограничений в (3), (4). Соответствующие решения $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ задач (3), (4) объявляют обобщенными решениями пары P, D. При этом наиболее эффективные методы данного направления обязательно совмещают процесс коррекции исходных данных задачи с поиском решения скорректированной постановки.

Легко заметить, что в собственном случае обобщенные решения совпадают с обычными решениями задач (1), (2).

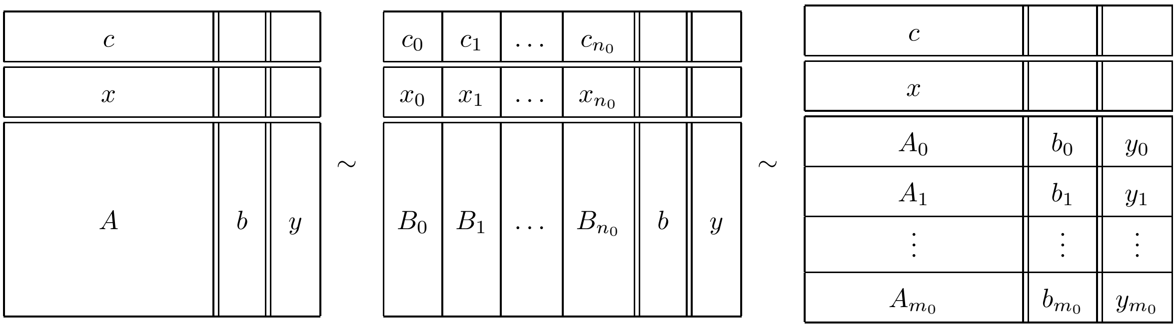
Ниже будет рассмотрен лексикографический вариант приведенной выше постановки. Пусть зафиксировано некоторое разбиение матрицы A на ряд вертикальных и горизонтальных полос:

$$A = [B_0|B_1|\dots|B_{n_0}] = [A_0^\top|A_1^\top|\dots|A_{m_0}^\top]^\top.$$

Соответственно, векторы c, b, x и y окажутся разбитыми на ряд подвекторов меньшей размерности:

$$c^\top = [c_0^\top|c_1^\top|\dots|c_{n_0}^\top], \quad b^\top = [b_0^\top|b_1^\top|\dots|b_{m_0}^\top], \quad x^\top = [x_0^\top|x_1^\top|\dots|x_{n_0}^\top], \quad y^\top = [y_0^\top|y_1^\top|\dots|y_{m_0}^\top].$$

Введенное разбиение иллюстрируется далее рисунком. Поскольку размерности полученных подматриц и подвекторов нигде ниже не играют самостоятельной роли, для них не введено специальных обозначений (в частности, допускается, что часть полос, блоков и подвекторов могут быть пустыми).



Разбиение исходных данных задач (1), (2) на блоки.

В соответствии с введенным разбиением исходных данных задач (1), (2) на блоки перепишем задачи (3), (4) в виде

$$\max\Big\{\sum_{i=0}^{n_0}(c_i-\Delta c_i,\, x_i)\colon A_j x\le b_j+\Delta b_j\ (j=0,1,\ldots,m_0),\ x\ge 0\Big\}, \tag{5}$$

$$\min\Big\{\sum_{j=0}^{m_0}(b_j+\Delta b_j,\, y_j)\colon B_i^\top y\ge c_i-\Delta c_i\ (i=0,1,\ldots,n_0),\ y\ge 0\Big\} \tag{6}$$

и введем множество их разрешимости $\widetilde{\Omega}=\Omega\times\Omega^*$, где

$$\Omega=\{\Delta b=[\Delta b_0,\Delta b_1,\ldots,\Delta b_{m_0}]\ge 0\colon \text{ограничения задачи (5) совместны}\},$$

$$\Omega^*=\{\Delta c=[\Delta c_0,\Delta c_1,\ldots,\Delta c_{n_0}]\ge 0\colon \text{ограничения задачи (6) совместны}\}.$$

Последовательная (лексикографическая) задача отыскания оптимального набора параметров коррекции $\widetilde{\Delta} b=[\widetilde{\Delta} b_0,\widetilde{\Delta} b_1,\ldots,\widetilde{\Delta} b_{m_0}]$, $\widetilde{\Delta} c=[\widetilde{\Delta} c_0,\widetilde{\Delta} c_1,\ldots,\widetilde{\Delta} c_{n_0}]$ может быть сформулирована в виде следующих двух независимых задач последовательной (лексикографической) оптимизации:

З а д а ч а A. Требуется найти элемент $\widetilde{\Delta} b$ множества Ω_{m_0}, где

$$\Omega_0=\operatorname{Arg}\min_{\Delta b\in\Omega}\|\Delta b_0\|,\quad \Omega_j=\operatorname{Arg}\min_{\Delta b\in\Omega_{j-1}}\|\Delta b_j\|,\quad j=1,\ldots,m_0.$$

З а д а ч а B. Требуется найти элемент $\widetilde{\Delta} c$ множества $\Omega^*_{n_0}$, где

$$\Omega^*_0=\operatorname{Arg}\min_{\Delta c\in\Omega^*}\|\Delta c_0\|,\quad \Omega^*_i=\operatorname{Arg}\min_{\Delta c\in\Omega^*_{i-1}}\|\Delta c_i\|,\quad i=1,\ldots,n_0.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем пространстве. В силу ее свойств на каждом шаге решения лексикографических задач A и B единственным образом определяются очередные компоненты $\widetilde{\Delta} b_j$ и $\widetilde{\Delta} c_i$ искомых векторов коррекции $\widetilde{\Delta} b=[\widetilde{\Delta} b_0,\widetilde{\Delta} b_1,\ldots,\widetilde{\Delta} b_{m_0}]$ и $\widetilde{\Delta} c=[\widetilde{\Delta} c_0,\widetilde{\Delta} c_1,\ldots,\widetilde{\Delta} c_{n_0}]$. Тем самым множества Ω_{m_0} и $\Omega^*_{n_0}$ оказываются одноэлементными.

Отличительной чертой евклидовых норм [2] является также то, что обе задачи A и B в действительности сводятся к решению конечной серии задач квадратичного программирования (КП) следующего вида:

З а д а ч а A'. Требуется найти $x\in X_{m_0}$, где

$$X_0=\operatorname{Arg}\min_{x\in\mathbb{R}^n_+}\|(A_0x-b_0)^+\|^2,\quad X_j=\operatorname{Arg}\min_{x\in X_{j-1}}\|(A_jx-b_j)^+\|^2,\quad j=1,\ldots,m_0.$$

З а д а ч а B'. Требуется найти $y \in Y_{n_0}$, где

$$Y_0 = \operatorname{Arg}\min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \|(c_0 - B_0^T y)^+\|^2, \quad Y_i = \operatorname{Arg}\min_{y\in Y_{i-1}} \|(c_i - B_i^T y)^+\|^2, \quad i = 1,\ldots,n_0.$$

Здесь и далее $\mathbb{R}^s_+$ обозначает неотрицательный ортант соответствующего пространства, a^+ означает неотрицательную "срезку" вектора a, т. е. замену его отрицательных компонент нулями.

В самом деле, если на очередном шаге решения задач КП A' и B' уже найдены $x \in X_j$ и $y \in Y_i$, то тем самым однозначно определены векторы $\widetilde{\Delta} b_j = (A_j x - b_j)^+$ и $\widetilde{\Delta} c_i = (c_i - B_i^T y)^+$ как проекции нуля на полиэдральные (а значит, выпуклые и замкнутые) множества $\bigcup\limits_{x\in X_{j-1}} \{z\colon z \geq A_j x - b_j,\ z \geq 0\}$ и $\bigcup\limits_{y\in Y_{i-1}} \{z\colon z \geq c_i - B_i^T y,\ z \geq 0\}$ соответственно, так что множества X_j и Y_i можно представить [9] в виде

$$X_j = \{x\colon A_0 x \leq b_0 + \widetilde{\Delta} b_0, \ldots, A_j x \leq b_j + \widetilde{\Delta} b_j,\ x \geq 0\}, \quad j = 0,1,\ldots,m_0,$$

$$Y_i = \{y\colon B_0^T y \geq c_0 - \widetilde{\Delta} c_0, \ldots, B_i^T y \geq c_i - \widetilde{\Delta} c_i,\ y \geq 0\}, \quad i = 0,1,\ldots,n_0.$$

С содержательной стороны задачи A' и B' описывают так называемый последовательный способ развязки "узких мест" в системах ограничений задач P и D. Суть этого способа в том, что неравенства этих систем предварительно разбиваются на подгруппы по степени их важности для выполнения, причем важность падает с ростом номера соответствующей подматрицы. В процессе их корректировки в первую очередь стремятся минимизировать изменения, вносимые в наиболее важные из корректируемых ограничений, и лишь затем переходят к корректировке менее важных ограничений.

Заметим, что задачи КП, входящие в задачи A' и B', не обязательно решать последовательно. Их можно эффективно свести к единой оптимизационной задаче, для чего ниже будут привлечены идеи теории двойственности и регуляризации.

2. Симметрично регуляризованная функция Лагранжа

Хорошо известно, что разрешимость задач (1), (2) тесно связана с наличием у их функции Лагранжа $L(x,y) = (c,x) - (y, Ax - b)$ седловых точек относительно области $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$. В несобственном случае таковых точек нет. Однако они немедленно появляются, если применить к функции Лагранжа регуляризацию по Тихонову.

В своей предыдущей работе [9] авторы уже рассматривали классическую функцию Лагранжа, дополненную симметричным рядом регуляризующих слагаемых

$$\mathcal{L}(x,y;\sigma) = (c,x) - (y, Ax - b) - \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i \|x_i\|^2 + \sum_{j=0}^{m_0} \beta_j \|y_j\|^2. \tag{7}$$

Здесь $\sigma = [\alpha, \beta]$, $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}] > 0$, $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}] > 0$ — параметры регуляризации.

Функция (7) в силу своих свойств сильной выпуклости по x и сильной вогнутости по y всегда обладает седловыми точками независимо от того, разрешимы или нет задачи (1), (2). Она естественным образом порождает пару минимаксных задач, которые всегда разрешимы и оптимальные значения которых совпадают. Эти задачи имеют вид

$$P_\sigma\colon \max_{x\geq 0}\min_{y\geq 0} \mathcal{L}(x,y;\sigma) = \max_{x\geq 0} \Phi_\sigma(x), \tag{8}$$

где

$$\Phi_\sigma(x) = (c,x) - \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i \|x_i\|^2 - \sum_{j=0}^{m_0} \frac{1}{4\beta_j} \|(A_j x - b_j)^+\|^2,$$

и

$$D_\sigma\colon\ \min_{y\geq 0}\max_{x\geq 0}\mathcal{L}(x,y;\sigma)=\min_{y\geq 0}\Psi_\sigma(y), \tag{9}$$

где

$$\Psi_\sigma(x)=(b,y)+\sum_{j=0}^{m_0}\beta_j\|y_j\|^2+\sum_{i=0}^{n_0}\frac{1}{4\alpha_i}\|(c_i-B_i^Ty)^+\|^2.$$

Следующие теоремы сформулированы и доказаны в [9].

Теорема 1 [9, теорема 1]. *Независимо от того, разрешимы или нет задачи* (1) *и* (2), *задачи* (8) *и* (9) *для любого набора параметров* $\sigma>0$ *разрешимы в единственных точках* x^σ *и* y^σ *соответственно и* $\Phi_\sigma(x^\sigma)=\Psi_\sigma(y^\sigma)=\mathcal{L}(x^\sigma,y^\sigma;\sigma)$.

Теорема 2 [9, теорема 2]. *Оптимальные векторы* x^σ *и* y^σ *задач* (8) *и* (9) *являются также решениями соответственно задач* (5) *и* (6) *при* $\Delta c_i=2\alpha_i x_i^\sigma=(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+$ $(i=0,1,\ldots,n_0)$ *и* $\Delta b_j=2\beta_j y_j^\sigma=(A_jx^\sigma-b_j)^+$ $(j=0,1,\ldots,m_0)$.

Именно на изучении задач P_σ и D_σ мы сосредоточимся ниже и, в частности, найдем условия на бесконечно малые параметры регуляризации $\sigma=[\alpha,\beta]>0$, которые гарантировали бы сходимость порождаемых этими задачами векторов

$$\Delta c_i^\sigma=2\alpha_i x_i^\sigma=(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\ (i=0,1,\ldots,n_0),\quad \Delta b_j^\sigma=2\beta_j y_j^\sigma=(A_jx^\sigma-b_j)^+\ (j=0,1,\ldots,m_0)$$

к решению задач A и B. Кроме того, при некоторых условиях последовательности x^σ, y^σ могут давать обобщенное решение одной из исходных несобственных постановок (обеих в собственном случае).

3. Вспомогательные построения

Пусть $\widetilde{\Delta}c=[\widetilde{\Delta}c_0,\widetilde{\Delta}c_1,\ldots,\widetilde{\Delta}c_{n_0}]$, $\widetilde{\Delta}b=[\widetilde{\Delta}b_0,\widetilde{\Delta}b_1,\ldots,\widetilde{\Delta}b_{m_0}]$ — решения задач A и B из разд. 1. Обратимся к аппроксимирующим задачам (5), (6). Обозначим через $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ их нормальные решения, отвечающие параметрам $\Delta c=\widetilde{\Delta}c$, $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$.

Лемма 1. *Существует такое число* $K_0>0$, *что при всех* $x\geq 0$, $y\geq 0$ *верно*

$$(c-\widetilde{\Delta}c,x-\tilde{x})\leq K_0\sum_{j=0}^{m_0}\|(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j\|,\quad (b+\widetilde{\Delta}b,\tilde{y}-y)\leq K_0\sum_{i=0}^{n_0}\|(c_i-B_i^Ty)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|.$$

Доказательство. Положим $K_0>\max\{\max_j\|\tilde{y}_j\|,\max_i\|\tilde{x}_i\|\}$. Покажем справедливость первого неравенства. Обозначим через $v(\cdot,\widetilde{\Delta}c)$ функцию оптимума прямой задачи в точке $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$. Как известно,

$$v(\Delta b,\widetilde{\Delta}c)\leq v(\widetilde{\Delta}b,\widetilde{\Delta}c)+\sum_{j=0}^{m_0}(\tilde{y}_j,\Delta b_j-\widetilde{\Delta}b_j).$$

Вектор x удовлетворяет ограничениям задачи (5) при $\Delta b_j=(A_jx-b_j)^+$, $j=0,\ldots,m_0$. Следовательно,

$$(c-\widetilde{\Delta}c,x)\leq v(\Delta b,\widetilde{\Delta}c)\leq(c-\widetilde{\Delta}c,\tilde{x})+\sum_{j=0}^{m_0}(\tilde{y}_j,(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j)$$

$$\leq(c-\widetilde{\Delta}c,\tilde{x})+K_0\sum_{j=0}^{m_0}\|(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j\|,$$

что и требовалось. Справедливость второго неравенства доказывается аналогично с привлечением свойств функции оптимума $v(\widetilde{\Delta}b,\cdot)$ двойственной задачи.

Лемма доказана.

Далее обратимся к задачам КП

$$\min\{\|(A_jx-b_j)^+\|^2\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ A_1x\le b_1+\Delta b_1,\ \ldots,\ A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ x\ge 0\},\quad (10)$$

$$\min\{\|(c_i-B_i^Ty)^+\|^2\colon B_0^Ty\ge c_0+\Delta c_0,\ B_1^Ty\ge c_1+\Delta c_1,\ \ldots,B_{i-1}^Ty\le c_{i-1}+\Delta c_{i-1},\ y\ge 0\}.\ (11)$$

Задачи (10) и (11) при $j=0,1,\ldots,m_0$, $i=0,1,\ldots,n_0$ входят соответственно в состав задач A' и B'. Хотя эти задачи и нелинейны, их оптимальные множества $\widetilde{M}_j(\Delta b)$, $\widetilde{M}_i^*(\Delta c)$, как уже отмечалось выше, полиэдральны и описываются системами неравенств вида

$$\widetilde{M}_j(\Delta b)=\{x\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ldots,A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ A_jx\le b_j+w_j(\Delta b),\ x\ge 0\},$$

$$\widetilde{M}_i^*(\Delta c)=\{y\colon B_0^Ty\ge c_0-\Delta c_0,\ldots,B_{i-1}^Ty\ge c_{i-1}-\Delta c_{i-1},\ B_i^Ty\ge c_i-w^*{}_i(\Delta c),\ y\ge 0\}.$$

Здесь $w_j(\Delta b)=\pi(0;Z_j(\Delta b))$, $w^*{}_i(\Delta c)=\pi(0;Z_i^*(\Delta c))$, множества $Z_j(\Delta b)$ и $Z_i^*(\Delta c)$ определены как

$$Z_j(\Delta b)=\bigcup_{x\in M_j(\Delta b)}\{z\colon z\ge A_jx-b_j\},\quad Z_i^*(\Delta c)=\bigcup_{y\in M_i^*(\Delta c)}\{z\colon z\ge c_i-B_i^Ty\},$$

$M_j(\Delta b)$ — допустимое множество задачи (10), $M_i^*(\Delta c)$ — допустимое множество задачи (11).

Подвергнем задачи (10), (11) линеаризации в точках $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ соответственно. Получим две задачи ЛП вида

$$\min\{(\widetilde{\Delta}b_j,z)\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ldots,A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ A_jx-z\le b_j,\ z\ge 0,\ x\ge 0\},$$

$$\min\{(\widetilde{\Delta}c_i,z)\colon B_0^Ty\ge c_0-\Delta c_0,\ldots,B_{i-1}^Ty\ge c_{i-1}-\Delta c_{i-1},\ B_i^Ty+z\ge c_i,\ z\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

Эти задачи разрешимы по крайней мере при всех $\Delta b\in\Omega$, $\Delta c\in\Omega^*$. В частности, при $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$, $\Delta c=\widetilde{\Delta}c$ оптимальные значения этих задач равны $\|\widetilde{\Delta}b_j\|^2$ и $\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2$ соответственно.

Лемма 2. *Константу K_0 из леммы 1 можно сделать настолько большой, что при всех $x\ge 0$, $y\ge 0$ и всех $i=1,\ldots,n_0$ и $j=1,\ldots,m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\widetilde{\Delta}b_j\|^2-(\widetilde{\Delta}b_j,(A_jx-b_j)^+)\le K_0\sum_{s=0}^{j-1}\|(A_sx-b_s)^+-\widetilde{\Delta}b_s\|,$$

$$\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2-(\widetilde{\Delta}c_i,(c_i-B_i^Ty)^+)\le K_0\sum_{s=0}^{i-1}\|(c_s-B_s^Ty)^+-\widetilde{\Delta}c_s\|.$$

Доказательство данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 1.

Перейдем к обоснованию сходимости предложенного метода.

4. Обоснование сходимости

В дальнейшем для простоты изложения будем считать число вертикальных и горизонтальных полос на выше приведенном рисунке совпадающим. Это не снижает общности рассуждений, так как при необходимости каждое из этих чисел можно увеличить путем введения дополнительных полос (пустых). По этой же причине можно считать, что все $\alpha_i=\beta_i$. Сохраним за ними единое обозначение $\sigma_i=\alpha_i=\beta_i$, $i=0,1,\ldots,m_0=n_0$.

Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 3. *Пусть* x^σ *и* y^σ *— оптимальные векторы соответственно задач* (8) *и* (9). *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|^2)$$
$$\le\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}[(\widetilde{\Delta}b_i,(A_ix^\sigma-b_i)^+)+(\widetilde{\Delta}c_i,(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+)]$$
$$+\sum_{i=0}^{m_0}K_0(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теорем 1, 2 получаем

$$\Phi_\sigma(x^\sigma)=(c,x^\sigma)-\sum_{i=0}^{m_0}\sigma_i\|x_i^\sigma\|^2-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2$$
$$=(c,x^\sigma)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2,$$
$$\Psi_\sigma(y^\sigma)=(b,y^\sigma)+\sum_{i=0}^{m_0}\sigma_i\|y_i^\sigma\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2$$
$$=(b,y^\sigma)+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2.$$

А так как $\Phi_\sigma(x^\sigma)=\Psi_\sigma(y^\sigma)$, то

$$(c,x^\sigma)-(b,y^\sigma)=\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2$$
$$=\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|^2)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2)$$
$$+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{\sigma_i}[((A_ix^\sigma-b_i)^+,\widetilde{\Delta}b_i)+((c_i-B_i^Ty^\sigma)^+,\widetilde{\Delta}c_i)].$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по лемме 1

$$(c,x^\sigma)-(b,y^\sigma)=(c-\widetilde{\Delta}c,x^\sigma-\tilde{x})-(b+\widetilde{\Delta}b,y^\sigma-\tilde{y})+(\widetilde{\Delta}c,x^\sigma)+(\widetilde{\Delta}b,y^\sigma)$$
$$\le\sum_{i=0}^{m_0}K_0(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|)+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}((c_i-B_i^Ty^\sigma)^+,\widetilde{\Delta}c_i)$$
$$+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}((A_ix^\sigma-b_i)^+,\widetilde{\Delta}b_i).$$

Лемма доказана.

Представим теперь условия, при которых будет обоснована сходимость метода. А именно, будем предполагать, что параметры регуляризации σ_i положительны и

$$\sigma_i\to+0\quad(0\le i\le m_0),\quad \mu_i:=\sigma_{i-1}\sigma_{m_0}^2/\sigma_i^3\to0\quad(0<i\le m_0). \tag{13}$$

При помощи математической индукции легко показать, что из (13) вытекают условия

$$\gamma_i=\sigma_{i-1}/\sigma_i\to0,\quad \gamma_{i-1}/\gamma_i\to0\quad(0<i\le m_0). \tag{14}$$

Покажем, что при выполнении этих условий $\|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| \to 0$, $0 \le s \le m_0$, и $\|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\| \to 0$, $0 \le s \le n_0$, где $\widetilde{\Delta} b = [\widetilde{\Delta} b_0, \dots, \widetilde{\Delta} b_{m_0}]$ — решение задачи A из разд. 1 и $\widetilde{\Delta} c = [\widetilde{\Delta} c_0, \dots, \widetilde{\Delta} c_{n_0}]$ — решение задачи B. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Базой этой индукции служит следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть параметры регуляризации* σ_i, $i = 0, 1, \dots, m_0$, *положительны и выполнены условия* (13). *Тогда найдется такая константа* $N_0 > 0$, *что* $\delta_0(\sigma) \le N_0 \sqrt{\gamma_1}$, *где* $\delta_0(\sigma) := \|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 3. Умножим обе части неравенства (12) на $2\sigma_0 > 0$ и перегруппируем слагаемые. С учетом очевидных неравенств

$$(\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+) \ge 0, \quad (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+) \ge 0$$

и свойств евклидовых проекций, согласно которым

$$\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 \le (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+), \quad \|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 \le (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+),$$

получим оценку

$$\begin{aligned}
&\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\|^2 + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|^2 \\
&\le 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) + \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_0} 2K_0\sigma_0(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&= 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) + \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&\quad - \sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0}\Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 - \sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0}\Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 \\
&\quad + 2K_0^2\sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \le 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) \\
&\quad + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{m_0}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0^2\sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i.
\end{aligned}$$

Полученная оценка и элементарное неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ убеждают нас в том, что найдется такая константа $K_1 > 0$, для которой величина

$$\delta_0(\sigma) = \|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|$$

удовлетворяет квадратному неравенству

$$\delta_0(\sigma)^2 \le 4K_0\sigma_0\delta_0(\sigma) + 2K_1\sigma_0/\sigma_1,$$

откуда найдется такое $N_0 > 0$, что

$$\delta_0(\sigma) \le 2K_0\sigma_0 + \sqrt{4K_0^2\sigma_0^2 + 2K_1\sigma_0/\sigma_1} \le N_0\sqrt{\sigma_0/\sigma_1}.$$

Здесь учтены сравнительные порядки малости (13), (14) параметров σ_i.

Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Лемма 5. *Пусть выполнены все предположения леммы* 4 *и* $\delta_s(\sigma) \le N_s\sqrt{\gamma_{s+1}}$, *где* $\delta_s(\sigma) := \|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| + \|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\|$, $s = 0, \ldots, k-1 < m_0 - 1$. *Тогда найдется константа* $N_k > 0$ *такая, что также* $\delta_k(\sigma) \le N_k\sqrt{\gamma_{k+1}}$, *где* $\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова воспользуемся леммой 3. Умножим обе части неравенства (12) на $2\sigma_k > 0$ и перегруппируем его слагаемые следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2 \\
&\le \big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}\Big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+)\big)\Big] \\
&+ 2K_0\sigma_k \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) + \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ 2K_0\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \\
&- \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ \frac{\sigma_k}{\sigma_0}\big(\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+)\big) + \frac{\sigma_k}{\sigma_0}\big(\|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+)\big) \\
&- \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Оценим сверху отдельные слагаемые в правой части этого неравенства.

Во-первых, по лемме 2 с учетом предположений леммы 5 имеем

$$
\begin{aligned}
&\big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \\
&\le K_0 \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|\widetilde{\Delta} c_i - (c_i - B_i^T y^\sigma)^+\|) \le K_0 \sum_{i=0}^{k-1} N_i\sqrt{\sigma_i/\sigma_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку имеют место условия (14) на сравнительную малость параметров $\gamma_{i+1} = \sigma_i/\sigma_{i+1}$, то найдется такое $K_2 > 0$, для которого

$$
\big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \le K_2\sqrt{\gamma_k}.
$$

Во-вторых, по аналогичным соображениям (см. предположения леммы 5 и условия (13), (14)) найдется такое $K_3 > 0$, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}\Big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+)\big)\Big] \\
&\qquad \le K_0 \sum_{i=1}^{k-1}\Big(\frac{\sigma_k}{\sigma_i}\sqrt{\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}}\Big) \le K_3\sigma_k/\sigma_{m_0} \sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{\mu_i}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

В-третьих, найдется и $K_4 > 0$ такое, что

$$
2K_0\sigma_k \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \le K_4\sigma_k\sqrt{\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}} = K_4\sqrt{\sigma_k\sigma_{k-1}}.
$$

В-четвертых, найдется такое $K_5 > 0$, что

$$\sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} (\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|)$$

$$- \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) = \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2)$$

$$- \sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 - \sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2$$

$$+ 2K_0^2\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \sigma_i \le \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0^2\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \sigma_i \le K_5\sigma_k/\sigma_{k+1}. \qquad (17)$$

И наконец, при доказательстве леммы 4 уже упоминалось, что

$$\big(\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+)\big) \le 0, \quad \big(\|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+)\big) \le 0,$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \le 0.$$

Применяя все эти оценки к правой части соотношения (15), получаем следующее неравенство:

$$\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2$$
$$\le 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|) + K_2\sqrt{\gamma_k} + K_3\sigma_k/\sigma_{m_0}$$
$$+ K_4\sqrt{\sigma_k\sigma_{k-1}} + K_5\gamma_{k+1}.$$

Осталось применить условия (13), (14) о сравнительной малости параметров регуляризации, чтобы убедиться в том, что найдется такое $K_6 > 0$, при котором

$$\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2$$
$$\le 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|) + K_6\gamma_{k+1}.$$

Поэтому величина

$$\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$$

удовлетворяет квадратному неравенству

$$\delta_k(\sigma)^2 \le 4K_0\sigma_k\delta_k(\sigma) + 2K_6\gamma_{k+1}, \qquad (18)$$

откуда следует, что

$$\delta_k(\sigma) \le 2K_0\sigma_k + \sqrt{4K_0^2\sigma_k^2 + 2K_6\gamma_{k+1}} \le N_k\sqrt{\gamma_{k+1}}$$

при подходящем $N_k > 0$.

Лемма доказана.

Осталось установить, что верна

Лемма 6. *При предположениях леммы* 5

$$\delta_{m_0}(\sigma) := \|(A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0})^+ - \widetilde{\Delta} b_{m_0}\| + \|(c_{m_0} - B_{m_0}^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_{m_0}\| \to 0.$$

Доказательство проводится при помощи тех же выкладок, которые использовались при доказательстве предыдущей леммы, но с небольшими уточнениями.

Во-первых, оценка (17) не понадобится, так как при $k = m_0$ соответствующие слагаемые просто исчезают из неравенства (15).

Во-вторых, оценка (16) приобретает несколько иной вид, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m_0-1} \frac{\sigma_{m_0}}{\sigma_i} \big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+) \big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+) \big) \big]$$

$$\le K_0 \sum_{i=1}^{m_0-1} \Big(\frac{\sigma_{m_0}}{\sigma_i} \sqrt{\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}} \Big) \le K_3 \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\mu_i}.$$

Поэтому неравенство (18) относительно

$$\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$$

при $k = m_0$ изменится и примет вид $\delta_{m_0}(\sigma)^2 \le 4K_0 \sigma_{m_0} \delta_{m_0}(\sigma) + \theta_0$, где

$$\theta_0 = K_2 \sqrt{\gamma_{m_0}} + K_3 \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\mu_i} + K_4 \sqrt{\sigma_{m_0} \sigma_{m_0-1}} \to 0,$$

а также

$$\delta_{m_0}(\sigma) \le 2K_0 \sigma_{m_0} + \sqrt{4K_0^2 \sigma_{m_0}^2 + \theta_0} \to 0.$$

Лемма доказана.

Сформулируем итоговое утверждение, которое вытекает из всех проведенных выше рассуждений и лемм 4–6.

Теорема 3. *Пусть параметры регуляризации* $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m_0}$ *положительны и выполнены условия* (13), (14). *Тогда*

$$\delta_s(\sigma) = \|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| + \|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\| \to 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0).$$

Замечание. Условия (13) представляются чересчур сильными, однако они обеспечивают сходимость метода в применении к несобственным задачам ЛП 3-го рода в случае, когда число вертикальных и горизонтальных разбиений исходных данных больше двух. Если же число таких разбиений не превышает двух или ограничения хотя бы одной из задач (прямой или двойственной) совместны, то можно обойтись более слабыми условиями (14). Следует также оговорить, что сходимость последовательностей x^σ и y^σ к решению исходной пары задач имеет место только в собственном случае. Если исходная задача — несобственная 1-го рода, то к ее обобщенному решению сходится только последовательность x^σ, а последовательность y^σ не ограничена. Для несобственной задачи 2-го рода к ее обобщенному решению сходится только последовательность y^σ, а последовательность x^σ не ограничена. В случае несобственности 3-го рода обе эти последовательности не ограничены.

5. Заключение

Ранее авторами был предложен и исследован новый подход к лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая симметричная регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Получающаяся функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. В предыдущих работах был исследован случай несобственности 1-го и 2-го родов. В данной работе результаты распространены на 3-й род несобственности. Приведены условия сходимости метода, дана содержательная интерпретация получаемого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
4. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. **Скарин В. Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
6. **Скарин В. Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
7. **Еремин И. И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
8. **Попов Л. Д.** Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 103–115.
9. **Попов Л. Д., Скарин В. Д.** Лексикографическая регуляризация и двойственность для несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 279–291.
10. **Guddat J.** Stability in convex quadratic programming // Mathematische Operationsforschung und Statistik. 1976. Vol. 8. P. 223–245.
11. **Dorn W. S.** Duality in quadratic programming // Buart. Appl. Math. 1960. № 18. P. 407–413.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 19.02.2016

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук
e-mail: skavd@imm.uran.ru