ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.982.272+515.122.55

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ТЕСНОТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

А. В. Осипов

В работе исследуются различные виды тесноты для пространства непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ на тихоновском пространстве X, наделенного множественно-открытой топологией.

Ключевые слова: множественно-открытая топология, теснота, веерная теснота, сильная веерная теснота, T-теснота, множественная теснота, функциональное пространство.

A. V. Osipov. Different kinds of tightness of a functional space.

We study different kinds of tightness for the space $C(X)$ of continuous real-valued functions on a Tychonoff space X with the set-open topology.

Keywords: set-open topology, tightness, fan tightness, strong fan tightness, T-tightness, set tightness, functional space.

MSC: 54C30, 54C35, 54D65

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-192-199

Введение

На множестве непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ существует широкий спектр классических топологий, при которых пространство $C(X)$ является топологическим кольцом, топологической группой или топологическим векторным пространством (относительно естественных операций поточечного сложения, умножения и умножения на скаляр). Наиболее известные и широко исследуемые топологические кольца на пространстве непрерывных функций — это множество $C(X)$ с топологией поточечной сходимости (обозначаемое как $C_p(X)$) и множество $C(X)$ с компактно-открытой топологией (обозначаемое как $C_c(X)$ или как $C_k(X)$). Естественным обобщение этих топологий является множественно-открытая топология на $C(X)$. Напомним определение этой топологии. Пусть λ — некоторое семейство непустых подмножеств пространства X, тогда предбазисным множеством для λ-открытой топологии является множество вида $[A,U] := \{f \in C(X)\colon f(A) \subseteq U\}$, где $A \in \lambda$ и U — открытое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. Топологическое пространство $C(X)$, наделенное λ-открытой топологией, будем обозначать как $C_\lambda(X)$.

Заметим, что, если семейство λ совпадает с семейством всех конечных (с семейством всех компактных) подмножеств пространства X, то λ-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости (с компактно-открытой топологией) т. е. $C_\lambda(X) = C_p(X)$ $(C_\lambda(X) = C_c(X))$. Отметим, что если λ — произвольное семейство, то пространство $C_\lambda(X)$ может не быть топологическим кольцом, топологической группой, однородным и даже хаусдорфовым пространством. В работе [8] было доказано, что $C_\lambda(X)$ есть хаусдорфовое топологическое векторное пространство (топологическая группа, паратопологическая группа, топологическая алгебра) тогда и только тогда, когда семейство λ обладает следующими тремя свойствами:

(а) λ — π-сеть для пространства X (критерий хаусдорфовости $C_\lambda(X)$);

(б) λ состоит из C-компактных подмножеств пространства X (A — C-компактно в X, если $f(A)$ — компакт в $\mathbb{R}$ для любого $f \in C(X)$);

(в) $\lambda = \lambda(C)$, где $\lambda(C) = \{A \in \lambda$ для каждого C-компактного (в X) подмножества $B \subseteq A$, множество $[B,U]$ открыто в $C_\lambda(X)$ для любого открытого U в $\mathbb{R}\}$.

Обозначим через Ψ множество всех семейств λ на пространстве X, обладающих (одновременно) свойствами (а), (б) и (в). Таким образом, $C_\lambda(X)$ — хаусдорфовое топологическое векторное пространство (топологическая алгебра, топологическая группа, паратопологическая группа) тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Psi$. Заметим, что если $\lambda \in \Psi$, то, не уменьшая общности, можно полагать, что λ — π-сеть из замкнутых C-компактных подмножеств, замкнутая относительно C-компактных (в X) подмножеств своих элементов и конечных объединений.

Если семейство λ состоит из всех C-компактных подмножеств пространства X, то λ-открытую топологию будем называть *C-компактно-открытая топология*, а топологическое пространство записывать как $C_{rc}(X)$. Отметим, что для любого тихоновского пространства X пространство $C_{rc}(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_c(\nu X)$, где νX — хьюиттовское пополнение пространства X (см. [2]). Если $A \subseteq X$, а $f \in C(X)$, то через $f \restriction A$ обозначаем сужение функции f на множество A.

1. Основные определения и обозначения

Многие топологические свойства определяются и характеризуются в терминах классических селекционных принципов. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — множества, состоящие из семейств подмножеств топологического пространства (X, τ). Напомним определения некоторых базисных селекционных принципов.

Пространство X удовлетворяет селекционному принципу $S_1^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ($X \in S_1^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in A_\alpha$ такое, что $\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

Пространство X удовлетворяет селекционному принципу $S_{fin}^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ($X \in S_{fin}^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in [A_\alpha]^{<\omega}$ такое, что $\bigcup\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

В частности, селекционные принципы $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ и $S_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — семейство открытых покрытий топологического пространства X, называют *свойством Менгера* и *Ротбергера* соответственно.

В этой работе мы исследуем различные виды тесноты функционального пространства $C_\lambda(X)$, применяя для этого селекционные принципы $S_1^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $S_{fin}^\kappa(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Напомним определения тесноты и различных видов тесноты для произвольного топологического пространства.

• *Теснотой топологического пространства* (X, τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любого $A \subseteq X$ и $x \in \overline{A}$ существует $B \subseteq A$ такое, что $\mid B \mid \leq \kappa$ и $x \in \overline{B}$. Эту функцию обозначают как $t(X)$.

Для топологического пространства (X, τ) и фиксированной точки $x \in X$ мы используем символ Ω_x для обозначения множества $\{A \subset X \colon x \in \overline{A} \setminus A\}$.

• *Веерной теснотой топологического пространства* (X, τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любой точки $x \in X$ и каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ элементов семейства Ω_x существует трансфинитная последовательность $\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ конечных множеств таких, что $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ для каждого $\alpha < \kappa$, и $x \in cl(\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha)$, т. е. выполняется $S_{fin}^\kappa(\Omega_x, \Omega_x)$. Эту функцию обозначают как $vet(X)$.

• *Сильной веерной теснотой топологического пространства* (X, τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любой точки $x \in X$ выполняется $S_1^\kappa(\Omega_x, \Omega_x)$. Мы будем обозначать эту функцию как $vet_1(X)$.

• *T-теснотой топологического пространства* X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что, если $\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где $cf(\kappa) > \tau$, то $\bigcup\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — замкнутое множество.

Это определение было введено Юхасом в работе [5]. Так как семейство $\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ возрастающее и $cf(\kappa)$ — регулярный кардинал, мы можем говорить, что T-теснота $T(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где κ — регулярный кардинал, больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha\colon \alpha<\kappa\}$ — замкнутое подмножество в X.

• *Множественной теснотой* (*set-tightness*) $t_s(X)$ пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $A \subset X$ и $x \in \overline{A}\setminus A$, то существует семейство $\{A_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ подмножеств A таких, что $x \notin \overline{A_\alpha}$ для любого $\alpha<\tau$ и $x \in \overline{\bigcup\{A_\alpha\colon \alpha<\tau\}}$.

Это понятие было впервые введено в работе [3] и называлось как квазихарактер. Термин “set-tightness” был предложен Юхасом в работе [5].

Заметим, что выполняются следующие отношения между кардинальнозначными функциями:

$t_s(X) \le T(X) \le t(X) \le vet(X) \le vet_1(X)$. (Соотношения $t_s(X) \le T(X) \le t(X)$ были показаны в [5].)

Если X компакт, то $t_s(X) = t(X)$ [3].

Напомним, что *нуль-множеством* называют подмножество A пространства X, если $A = f^{-1}(0)$ для некоторой $f \in C(X)$. Подмножество A пространства X называют *ко-нуль* (или *функционально открытым*) множеством, если $X \setminus A$ — нуль-множество.

Ко-нуль (функционально открытое) семейство $\mathbb{U}$ пространства X называют *λ-f-покрытием*, если X не элемент семейства $\mathbb{U}$ и для каждого $A \in \lambda$ существует $U \in \mathbb{U}$ такое, что $A \subseteq U$.

Заметим, что λ-f-покрытие множества $\bigcup\lambda$ может не быть покрытием множества X.

Через $\Lambda(\lambda)$ будем обозначать множество всех λ-f-покрытий относительно семейства λ.

Так как $C_\lambda(X)$ (при $\lambda \in \Psi$) — однородное топологическое пространство, то основные локальные свойства мы можем рассматривать для простоты в точке $\mathbf{0}$ (функции тождественно равной значению 0 на всем множестве X) и символ Ω_0 означает множество $\{A \subset C_\lambda(X)\colon \mathbf{0} \in \overline{A}\setminus A\}$.

2. Свойство тесноты

Определение. Пусть X — топологическое пространство, λ — семейство подмножеств пространства X. Определим кардинальнозначную функцию $l_\lambda(X) = \min\{|\mathcal{V}|$: для каждого $\mathcal{U} \in \Lambda(\lambda)$ существует $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ такое, что $\mathcal{V} \in \Lambda(\lambda)\}$.

Теорема 2.1. *Для любого пространства X, $\lambda \in \Psi$ выполняется $t(C_\lambda(X)) = l_\lambda(X)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Пусть $t(C_\lambda(X)) = \kappa$ и $\mathcal{U} \in \Lambda(\lambda)$.

Для каждой пары элементов K из λ and $U \in \mathcal{U}$, $K \subseteq U$ пусть $f_{K,U}$ будет непрерывная функция из X в $[0,1]$ такая, что $f_{K,U}(K) \subseteq \{0\}$ и $f_{K,U}(X\setminus U) \subseteq \{1\}$. Пусть $A = \{f_{K,U}\colon K \in \lambda, K \subseteq U \in \mathcal{U}\}$. Тогда $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества A. Так как $t(C_\lambda(X)) = \kappa$ существует множество $B = \{f_{K_\alpha,U_\alpha}\colon \alpha<\kappa\}$ такое, что $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества B. Мы докажем, что $\{U_\alpha\colon \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $F \in \lambda$. Так как $\mathbf{0} \in \overline{B}$, то отсюда следует, что существует $\alpha < \kappa$ такое, что $[F,(-1,1)]$ содержит функцию f_{K_α,U_α}. Тогда $F \subseteq U_\alpha$, так как иначе для некоторого $x \in F$ и $x \notin U_\alpha$ выполняется $f_{K_\alpha,U_\alpha}(x) = 1$, что противоречит $f_{K_\alpha,U_\alpha} \in [F,(-1,1)]$.

($\Leftarrow$). Пусть $l_\lambda(X) = \kappa$ и A будет подмножество $C(X)\setminus\{\mathbf{0}\}$ такое, что $\mathbf{0} \in \overline{A}$.

Если $\{X\} \in \lambda$, т.е. X — псевдокомпакт, то τ_λ топология на множестве $C(X)$ совпадает с C-компактно-открытой топологией и, следовательно, $C_\lambda(X)$ — метризуемое пространство (см. [8, теорема 2.2]), а значит, $C_\lambda(X)$ есть пространство с первой аксиомой счетности. Отсюда следует, что мы можем найти последовательность $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ из A, сходящуюся равномерно к $\mathbf{0}$.

Пусть $\{X\} \notin \lambda$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $K \in \lambda$ окрестность $[K,(-1/n,1/n)]$ точки $\mathbf{0}$ пересекает A, так существует непрерывная функция $f_{K,n} \in A$ такая, что $|f_{K,n}(x)| < 1/n$ для всех

$x \in K$. Так как $f_{K,n}$ непрерывная функция, то существует ко-нуль множество $U_{K,n}$ такое, что $f_{K,n}(U_{K,n}) \subseteq (-1/n, 1/n)$.

Пусть $\mathcal{U}_n = \{U_{K,n} \colon K \in \lambda\}$. Так как для любого $K \in \lambda$, $K \neq X$ мы можем полагать, что $U_{K,n}$ не совпадает со всем X. Ясно, что $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Каждое $\mathcal{U}_n$ имеет λ-f-покрытие $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ такое, что $|\ \mathcal{V}_n\ | \leq \kappa$. Определим множество $B = \{f_{K,n} \colon n \in \mathbb{N}, U_{K,n} \in \mathcal{V}_n\}$. Очевидно, что $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$ и $\mathbf{0} \in \overline{B}$. □

Следствие 2.1. *Пространство $C_\lambda(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда X — λ-линделёфовое пространство.*

Заметим, что если λ — семейство всех конечных подмножеств пространства X, то свойство $l_\lambda(X) = \aleph_0$ эквивалентно следующему: любая конечная степень X^n пространства X является линделёфовым пространством.

Следствие 2.2 (Архангельский — Пыткеев). *Пространство $C_p(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда X^n — линделёфовое пространство для любого $n \in \mathbb{N}$.*

3. Свойства веерной и сильной веерной тесноты

Теорема 3.1. *Для любого пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $vet_1(C_\lambda(X)) = \kappa$;

(2) $C_\lambda(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$;

(3) $X \in S_1^\kappa(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Доказательство. Отметим, что утверждения (1), (2) эквивалентны по определению.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ будет трансфинитная последовательность λ-f-покрытий. Для каждой пары $K \in \lambda$ и ко-ноль множества $U \supseteq K$ пространства X пусть $f_{K,U}$ будет любое непрерывное отображение из X в $[0,1]$ такое, что $f_{K,U}(K) \subseteq \{0\}$ и $f_{K,U}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Для каждого $\alpha < \kappa$ пусть $A_\alpha = \{f_{K,U} \colon K \in \lambda, K \subseteq U \in \mathcal{U}_\alpha\}$. Тогда для каждого $K \in \lambda$ существует $f_{K,U} \in A_\alpha$. Заметим, что $\mathbf{0} \in \overline{A_\alpha}$ для каждого $\alpha < \kappa$. Поскольку $C_\lambda(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$, существует трансфинитная последовательность $\{f_{K_\alpha, U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$ такая, что для каждого α $K_\alpha \in \lambda$, $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ и $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$.

Мы докажем, что $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $F \in \lambda$. Так как $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} : \alpha < \kappa\}$, то отсюда следует, что существует α такое, что $[F, (-1,1)]$ содержит функцию f_{K_α,U_α}. Тогда $F \subseteq U_\alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — трансфинитная последовательность подмножеств пространства $C(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, что $\mathbf{0} \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$.

Если $\{X\} \in \lambda$, то X — псевдокомпактное пространство и λ-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости, т. е. $C_\lambda(X)$ — метризуемое пространство, а значит, $C_\lambda(X)$ обладает первой аксиомой счетности. Таким образом, можно найти последовательность $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, $a_i \in A_{\alpha_i}$, сходящуюся равномерно к $\mathbf{0}$.

Пусть $\{X\} \notin \lambda$. Для биекции $i : \omega \times \kappa \mapsto \kappa$ положим $A_{n,\alpha} := A_{i(n,\alpha)}$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \kappa$ и каждого $K \in \lambda$ окрестность $[K, (-1/n, 1/n)]$ точки $\mathbf{0}$ пересекает $A_{n,\alpha}$, а значит, существует непрерывная функция $f_{K,n,\alpha} \in A_{n,\alpha}$ такая, что $|f_{K,n,\alpha}(x)| < 1/n$ для каждого $x \in K$.

Так как $f_{K,n,\alpha}$ — непрерывная функция, существует ко-нуль множество $U_{K,n,\alpha}$ такое, что $f_{K,n,\alpha}(U_{K,n,\alpha}) \subseteq (-1/n, 1/n)$. Пусть $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{U_{K,n,\alpha} : K \in \lambda\}$.

Для любого подмножества $K \in \lambda$, $K \neq X$, поэтому можно полагать, что все множества вида $U_{K,n,\alpha}$ не совпадают с X.

Заметим, что $\mathcal{U}_{n,\alpha} \in \Lambda(\lambda)$ для каждого $\alpha < \kappa$ и $n \in \mathbb{N}$. Для каждой трансфинитной последовательности $\{\mathcal{U}_{n,\alpha}\colon \alpha < \kappa\}$ с учетом условия $X \in S_1^{\kappa}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$ существуют последовательности $\{U_{K_{n,\alpha}}\colon \alpha < \kappa\}$, где каждое $K_{n,\alpha} \in \lambda$ такие, что $\{U_{K_{n,\alpha}}\colon \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$.

Определим $B = \{f_{K_{n,\alpha}} : n \in \mathbb{N}, U_{K,n,\alpha} \in \{U_{K_{n,\alpha}} : \alpha < \kappa\}\}$. Очевидно, что $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$, и $\mathbf{0} \in \overline{B}$. Отсюда следует, что $C_\lambda(X) \in S_1^{\kappa}(\Omega_0, \Omega_0)$. $\square$

Следствие 3.1. *Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

1. $C_\lambda(X)$ *имеет счетную сильную веерную тесноту.*
2. $X \in S_1(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Аналогично предыдущей теореме можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $vet(C_\lambda(X)) = \kappa$.
2. $C_\lambda(X) \in S_{fin}^{\kappa}(\Omega_0, \Omega_0)$.
3. $X \in S_{fin}^{\kappa}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Следствие 3.2. *Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

1. $C_\lambda(X)$ *имеет счетную веерную тесноту.*
2. $X \in S_{fin}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Отметим, что в работе [7] был получен критерий веерной тесноты пространства $C_\lambda(X)$ в случаи, когда семейство λ — сеть из компактных подмножеств пространства X.

Критерий счетной веерной тесноты пространства $C_p(X)$ был получен А. В. Архангельским в работе [1].

Следствие 3.3 (Архангельский). *Пространство $C_p(X)$ имеет счетную веерную тесноту тогда и только тогда, когда X^n — пространство Гуревича для любого $n \in \mathbb{N}$.*

4. Свойство T-тесноты

Для характеризации T-тесноты пространства $C_\lambda(X)$ мы определим свойство $T_\lambda(\tau)$, которое будет естественным обобщением $T(X)$.

О п р е д е л е н и е. Пространство X обладает свойством $T_\lambda(\tau)$ ($X \in T_\lambda(\tau)$), если для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ семейств ко-нуль подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$, существует $\beta < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $T(C_\lambda(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in T_\lambda(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $T(C_\lambda(X)) \leq \tau$. Тогда если $\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств пространства $C_\lambda(X)$ и κ — регулярный кардинал, больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — замкнутое подмножество в $C_\lambda(X)$. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая последовательность семейств ко-нуль подмножеств пространства X такая, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$. Обозначим $\mathcal{U}_{\alpha,K} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha\colon K \subset \mathcal{U}\}$ для каждого

$\alpha < \kappa$ и $K \in \lambda$. Для каждого $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$ пусть $f_{K,\mathcal{U}}$ будет непрерывная функция из X в $[0,1]$ такая, что $f_{K,\mathcal{U}}(K) = \{0\}$ и $f_{K,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = \{1\}$. Рассмотрим множество $A_\alpha = \{f_{K,\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}\}$, $\alpha < \kappa$.

По условию (1) мы получаем, что множество $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$ — замкнутое подмножество пространства $C_\lambda(X)$.

Пусть $\langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle := \{g \in C(X) \colon |g(x)| < \varepsilon,\ x \in K\}$, где $K \in \lambda$, $\varepsilon > 0$ — стандартная базисная окрестность точки $\mathbf{0}$ в топологии равномерной сходимости на элементах семейства λ. (Заметим, что в нашем случаи, множественно-открытая топология и топология равномерной сходимости на элементах семейства λ совпадают).

Тогда существуют $\alpha < \kappa$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha$, где $K \subset \mathcal{U}$.

Тогда $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$, следовательно, по построению существует $f \in A_\alpha \cap \langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle$. Следовательно, окрестность точки $\mathbf{0}$ пересекает некоторое A_α, $\alpha < \kappa$, т. е. $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Отсюда следует, что существует $\beta < \kappa$ и $\mathbf{0} \in \overline{A_\beta}$.

Мы докажем, что семейство $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

Пусть $F \in \lambda$. Тогда окрестность $\langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$ точки $\mathbf{0}$ пересекает A_β; пусть $f_{F,\mathcal{U}} \in A_\beta \cap \langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$. Тогда $f_{F,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = 1$ и, таким образом, $F \subset \mathcal{U} \in \mathcal{U}_\beta$. Тогда $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ семейств ко-нуль подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$, существует $\beta < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$. Пусть κ — регулярный кардинал, больший чем τ и, $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых подмножеств пространства $C_\lambda(X)$. Предположим, что $g \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Так как $C_\lambda(X)$ — однородное пространство, мы можем предпологать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \kappa$ $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{f^{-1}(W_n) \colon f \in A_\alpha\}$, где $W_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, и $\mathcal{U}_n = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_{n,\alpha}$, $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть $F \in \lambda$, и рассмотрим окрестность $[F, W_n]$ точки $\mathbf{0}$. В силу того что $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$, существует $\alpha < \kappa$ и $f \in A_\alpha \cap [F, W_n]$. Тогда $F \subset f^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_{n,\alpha}$.

Таким образом, $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти $\alpha_n < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_{n,\alpha_n} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $\gamma = \sup \alpha_n$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \Lambda(\lambda)$. Мы докажем, что $\mathbf{0} \in A_\gamma$. Пусть $[F, W]$ — окрестность $\mathbf{0}$, и выберем $n \in \mathbb{N}$ при $W_n \subset W$. Поскольку $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \Lambda(\lambda)$, существует $f \in A_\gamma$ такое, что $F \subset f^{-1}(W_n)$. Тогда $f \in A_\gamma \cap [F, W]$. Таким образом, $\mathbf{0} \in \overline{A_\gamma} = A_\gamma$. Мы получили, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ — замкнутое подмножество в пространстве $C_\lambda(X)$. □

5. Свойство множественной тесноты

Для характеризации множественной тесноты пространства $C_\lambda(X)$ мы определим свойство $t_s(\tau, \lambda)$, которое будет естественным обобщением свойства $t_s(\tau)$ в C_p-теории [9].

Пусть $\mathcal{U}$ будет семейство ко-нуль множеств пространства X и $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) = \{Z(U) \colon U \in \mathcal{U}\}$ — семейство нуль-множеств пространства X, индексируемое $\mathcal{U}$. Пару $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будем называть $t_s(\lambda)$-*парой*, если $Z(U) \subset U \neq X$ для каждого $U \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \in \Lambda(\lambda)$.

Пространство X обладает свойством $t_s(\tau, \lambda)$ $(X \in t_s(\tau, \lambda))$, если для каждой $t_s(\lambda)$-пары $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ $(\alpha < \tau)$ такое, что любое $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \Lambda(\lambda)$, при этом $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$.

Теорема 5.1. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $t_s(C_\lambda(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in t_s(\tau, \lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $t_s(C_\lambda(X)) \leq \tau$. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будет $t_s(\lambda)$-пара в пространстве X. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ выберем $f \in C(X)$ такую, что $f_U \restriction$

$Z(U) \equiv 0$ и $f_U \restriction (X \setminus U) \equiv 1$. Пусть $A = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, что $\mathbf{0} \in \overline{A} \setminus A$. В силу того что $t_s(C_\lambda(X)) \le \tau$, существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ $(\alpha < \tau)$ такое, что

1) $\mathbf{0} \notin \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$ для любого $\alpha < \tau$,

2) $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha\}}$.

Если для некоторого $\alpha < \tau$ $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \in \Lambda(\lambda)$, то $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$. Получаем, что по условию 1) $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \Lambda(\lambda)$ для любого $\alpha < \tau$. Более того, мы можем заметить, что $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$. Действительно, пусть $F \in \lambda$. По условию 2) для окрестности $[F, (-1, 1)]$ точки $\mathbf{0}$ существует $U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha$ такое, что $f_U \in [F, (-1, 1)]$. Получаем, что $F \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $X \in t_s(\tau, \lambda)$. Пусть $A \subset C_\lambda(X)$ и $g \in \overline{A} \setminus A$. Так как пространство $C_\lambda(X)$ однородно, мы можем предполагать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $f \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть $U(n, f) = f^{-1}(W_n)$ и $Z(n, f) = f^{-1}(I_{n+1})$, где $W_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $I_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$. Полагаем $\mathcal{U}_n = \{U(n, f) \colon f \in A\}$ и $\mathcal{Z}_n = \{Z(n, f) \colon f \in A\}$.

Если множество $\{n \in \mathbb{N} \colon X \in \mathcal{U}_n\}$ бесконечно, то мы сможем найти последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, которая равномерно сходится к $\mathbf{0}$, так без уменьшения общности мы можем считать, что $X \notin \mathcal{U}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $\mathcal{Z}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Так как $\mathbf{0} \in \overline{A}$, существует $f \in [F, W_{n+1}] \cap A$. Тогда $f(F) \subset W_{n+1} \subset I_{n+1}$, получаем, что $F \subset f^{-1}(I_{n+1}) = Z(n, f)$. Таким образом, $(\mathcal{U}_n, \mathcal{Z}(\mathcal{U}_n))$ — $t_s(\lambda)$-пара для каждого $n \in \mathbb{N}$. По условию $t_s(\tau, \lambda)$ мы получаем семейство $\{A_{n,\alpha} \colon n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}$ подмножеств множества A такое, что

(а) $\{Z(n, f) \colon f \in A_{n,\alpha}\} \notin \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$;

(б) $\{U(n, f) \colon f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \Lambda(\lambda)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Из условия (а) следует, что $\mathbf{0} \notin \overline{A_{n,\alpha}}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ такое, что $F \not\subseteq Z(n, f)$ для любого $f \in A_{n,\alpha}$, и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Тогда очевидно, что $[F, W_{n+1}] \cap A_{n,\alpha} = \varnothing$. По условию (б) $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup\{A_{n,\alpha} \colon n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ и W — окрестность 0 в $\mathbb{R}$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $W_n \subset W$. Так как $\{U(n, f) \colon f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \Lambda(\lambda)$, существует $f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}$ такое, что $F \subset U(n, f)$. Отсюда следует, что $f \in [F, W] \cap (\bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha})$. Таким образом, $t_s(C_\lambda(X)) \le \tau$.

6. Примеры

Во введении мы заметили, что между рассмотренными видами тесноты существуют следующие соотношения:

$$t_s(X) \le T(X) \le t(X) \le vet(X) \le vet_1(X).$$

Покажем, что существуют примеры пространств X, для которых отношения могут быть строгими.

П р и м е р 1. Пусть $D(\tau^+) = \{x_\alpha \colon \alpha < \tau^+\}$ — дискретное пространство мощности τ^+. Пусть C — александровская компактификация $D(\tau^+)$. Пространство C вкладывается в $\mathbb{R}^{\tau^+}$, пусть E — плотное подмножество $\mathbb{R}^{\tau^+}$ такое, что $E \cap C = \varnothing$ и $|E| = \tau$. Определим пространство $Y_\tau = E \cup D(\tau^+)$. Для пространства Y_τ выполняется $t_s(C_p(Y_\tau)) \le \tau < T(C_p(Y_\tau))$ (см. в [9, Remark 3.4]).

П р и м е р 2. Для любого кардинала τ через X_τ обозначим пространство $R^*(\tau^+)$, построенное в [6, Theorem 2.1]. В [9, Example 2.6] было показано, что $T(C_p(X_\tau)) \le \omega$, но $t(C_p(X_\tau)) > \tau$.

П р и м е р 3. Пусть $\mathbb{P}$ — множество иррациональных чисел. Тогда по теореме II.2.12 в [1] и теореме Архангельского — Пыткеева (следствие 2.2) справедливо $t(C_p(\mathbb{P})) = \aleph_0 < vet(C_p(\mathbb{P}))$.

П р и м е р 4. Заметим, что $C_p(X)$ сепарабельно и имеет счетную сильную веерную тесноту тогда и только тогда, когда X не более чем счетно (см. [4, Proposition 61 и Theorem 57]).

Пусть $X = [a, b]$ — невырожденный отрезок числовой прямой. В силу компактности X $vet(C_p(X)) = \omega$, но в силу несчетности X получаем, что $vet_1(C_p(X)) > \omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
2. **Осипов А.В.** Свойства C-компактно-открытой топологии на пространстве функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 258–277.
3. **Arhangel'skii A.V., Isler R., Tironi G.** On pseudo radial spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 1986. No. 27. P. 137–154.
4. **Bella A., Bonanzinga M., Matveev M.** Variations of selective separability // Topology Appl. 2009. Vol. 156, no. 7. P. 1241–1252.
5. **Juh*á*sz I.** Variationts on tightness // Studia Sci. Math. Hangar. 1989. Vol. 24, no. 2-3. P. 179–186.
6. **Hodel R.E., Vaughan J.E.** A note on $[a, b]$-compactness // Gen. Topology Appl. 1974. No. 4. P. 179–189.
7. **Lin S.** Tightness of function spaces // Appl. Gen. Topol. 2006. Vol. 7, no. 1. P. 103–107.
8. **Osipov A.V.** Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies // Topology Appl. 2012. Vol. 159, no. 3. P. 800–805.
9. **Sakai M.** Variations on tightness in function spaces //Topology Appl. 2000. Vol. 101, no. 1. P. 273–280.

Осипов Александр Владимирович

Поступила 04.03.2016

д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: OAB@list.ru