ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.5

НАДГРУППЫ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЯМИ[1]

Я. Н. Нужин

Описаны подгруппы группы лиева типа над полем, содержащие ее максимальную унипотентную подгруппу. Полученные результаты похожи на описание параболических подгрупп групп с (B,N)-парой, данное Ж.Титсом.

Ключевые слова: Группа лиева типа над полем, унипотентная подгруппа, параболическая подгруппа.

Ya. N. Nuzhin. Overgroups of unipotent subgroups of groups of Lie type over fields.

We describe the subgroups of a group of Lie type over a field containing its maximal unipotent subgroup. The results are similar to the description of parabolic subgroups of groups with (B,N)-pair given by J. Tits.

Keywords: group of Lie type over a field, unipotent subgroup, parabolic subgroup.

MSC: 20G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-188-191

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π. Далее $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ ранга l над полем F. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами $X_r = \{x_r(t) \mid t \in F\}$, $r \in \Phi$, где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент из $\Phi(F)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(F)$: унипотентная подгруппа $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \rangle$, мономиальная подгруппа $N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in F^* \rangle$, диагональная подгруппа $H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in F^* \rangle$ и борелевская подгруппа $B = UH$. Здесь $\langle M \rangle$— подгруппа, порожденная подмножеством M некоторой группы, F^* — мультипликативная группа поля F и $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$. Положим также $n_r = n_r(1)$, $I = \{1, 2, \ldots, l\}$.

Аналоги подгрупп X_r, U, N, H, B и множеств Φ, Φ^+, Π, I для групп Шевалле $\Phi(F)$ (нормального типа) существуют и для скрученных групп Шевалле ${}^n\Phi(F)$. Совокупность всех групп $\Phi(F)$ и ${}^n\Phi(F)$ обычно называют группами лиева типа. Далее $G(F)$ — группа лиева типа над полем F, где $G \in \{\Phi,\ {}^n\Phi\}$, n — порядок скручивающего автоморфизма.

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряженные с ними подгруппы называются параболическими подгруппами группы $G(F)$. В силу известного результата Ж. Титса [1] параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами $P_J = \langle B, n_{r_j} \mid j \in J \rangle$, $J \subseteq I$. В данной работе этот результат обобщается, а именно описываются надгруппы унипотентной подгруппы U. Для любого $J \subseteq I$ положим $Q_J = \langle U, n_{r_j} \mid j \in J \rangle$ и через Φ_J обозначим подсистему корней с базой $\{r_i \mid i \in J\}$. Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть M — подгруппа группы лиева типа $G(F)$ над полем F, содержащая ее унипотентную подгруппу U. Тогда для некоторого подмножества $J \subseteq I$ и подходящей подгруппы H_M из H, нормализуемой всеми элементами n_{r_j}, $j \in J$, подгруппа M совпадает с произведением $Q_J H_M$, причем $Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J \rangle$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Конечно, для групп лиева типа ранга 1 теорема легко следует из разложения Брюа $G(F) = UNU$. Также только с использованием этого разложения аналогичный результат получен в [2] для групп Шевалле ранга 2. В общем случае доказательство теоремы существенно опирается на один тонкий результат о группах с (B, N)-парой из [1] (см. доказательство леммы 2). Для группы Шевалле типа A_l утверждение теоремы следует из результатов статьи Д. А. Супруненко [3], в которой описаны надгруппы унитреугольной подгруппы общей линейной группы над произвольным телом. Отметим также, что в работе Г. Зейца [4] доказывается принадлежащая Ж. Титсу лемма (1.6), из которой следует такое утверждение: если поле F конечно и $U \leq M < G(F)$, то M содержится в параболической максимальной подгруппе из $G(F)$.

2. Предварительные результаты

Все обозначения и определения, указанные во введении, используются и далее. Через $N^{\pm}$ обозначим подгруппу, порожденную мономиальными элементами n_r, $r \in \Phi$, а через $H^{\pm}$ — подгруппу, порожденную диагональными элементами $h_r(-1) = n_r^2$, $r \in \Phi$. Ясно, что $N = HN^{\pm} = N^{\pm}H$. Следующие равенства обычно называются разложениями Брюа:

$$\Phi(F) = BNB = UNU = UHN^{\pm}U = UN^{\pm}HU.$$

Таким образом, любой элемент $g \in \Phi(F)$ представляется в виде

$$g = u_1 nhu_2, \quad \text{где} \quad u_1, u_2 \in U, \quad n \in N^{\pm}, \quad h \in H.$$

Фактор-группы N/H и $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфны группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_{r_i}, $i \in I$. Положим

$$w_{r_i} = w_i.$$

Для любого подмножества $J \subseteq I$ через Φ_J обозначим подсистему корней с базой $\{r_i \mid i \in J\}$, а через W_J — подгруппу группы Вейля W, порожденную элементами w_i, $i \in J$. Ясно, что W_J — группа Вейля системы корней Φ_J.

Лемма 1 [5, теорема 2.5.6(i)]. *Пусть $J, K \subseteq I$. Тогда $\langle W_J, W_K \rangle = W_{J \cup K}$.*

Далее $l(w)$ — длина элемента $w \in W$, т. е. длина минимального представления w через порождающие элементы w_i, $i \in I$.

Лемма 2. *Пусть $w \in W$ является образом элемента $n \in N$ при естественном гомоморфизме N на W, $l(w) = k$,*

$$w = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k} \quad \textit{для} \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in I,$$

$$n = n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k}, \quad \textit{где } n_{i_j} \textit{ — прообраз в } N \textit{ элемента } w_{i_j}.$$

Тогда $h_{i_1} n_{i_1}, h_{i_2} n_{i_2}, \dots, h_{i_k} n_{i_k} \in \langle U, n \rangle$ для некоторых $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \in H$.

Доказательство. Каждый элемент n_{i_j} равен hn_r для подходящего фундаментального корня $r \in \Pi$ и некоторого диагонального элемента $h \in H$.

В [1] доказано, что $n_{i_j} \in \langle UH, n \rangle$ (см. также [5, с. 112] или [6, лемма 4.4.1]). Поэтому $n_{i_j} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, где α_i есть либо n, либо n^{-1}, либо $u_i h_i$ для некоторых $u_i \in U$, $h_i \in H$. Так как H нормализует U, а N нормализует H, то $n_{i_j} = h_{i_j}^{-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$, где β_i есть либо n, либо n^{-1}, либо v_i для некоторых $v_i \in U$ и подходящего $h_{i_j} \in H$. Поэтому $h_{i_j} n_{i_j} \in \langle U, n \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть Π — база системы корней Φ. Тогда группа Шевалле $\Phi(F)$ над полем F порождается корневыми подгруппами X_r, $r \in \Pi \cup -\Pi$.*

Доказательство. Пусть $L = \langle X_r \mid r \in \Pi \cup -\Pi \rangle$. Тогда подгруппа $\langle n_r \mid r \in \Pi \rangle$ лежит в L и совпадает с $N^{\pm}$, так как фактор-группа $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфна группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_r, $r \in \Pi$. Группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, по правилу

$$n_w X_r n_w^{-1} = X_{w(r)},$$

где n_w — прообраз элемента w группы Вейля W при гомоморфизме $N^{\pm}$ на W. Таким образом, L содержит все корневые подгруппы X_r и, следовательно, совпадает со всей группой Шевалле $\Phi(F)$. Лемма доказана.

Следующая лемма уточняет строение подгруппы Q_J из формулировки основной теоремы.

Лемма 4. *Пусть $J \subseteq I$, $Q_J = \langle U, n_{r_j} \mid j \in J \rangle$, $U_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_J \rangle$, $L_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J \rangle$. Тогда:* 1) *$Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J \rangle$ и, в частности, подгруппа Q_J инвариантна относительно любой диагональной подгруппы из $\Phi(F)$;* 2) *U_J — нормальная подгруппа в Q_J;* 3) *$Q_J = U_J L_J$ и $U_J \cap L_J = 1$.*

Доказательство. 1) Так как $n_{r_j} = x_{r_j}(1)x_{-r_j}(-1)x_{r_j}(1)$ лежит в $\langle X_{r_j}, X_{-r_j} \rangle$, то $Q \subseteq \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J \rangle$. Обратное включение следует из равенства $n_r X_r n_r^{-1} = X_{-r}$ и леммы 3.

Пункты 2) и 3) являются аналогами разложения Леви для параболических подгрупп и следуют из этого разложения (см., например, [5, теорема 8.5.2]). Лемма доказана.

Замечание 1. Аналоги лемм 2–4 справедливы и для скрученных групп Шевалле. Различия возникают только для типов ${}^2A_{2l}$ и ${}^2F_4$ и лишь с представлением аналогов мономиальных элементов $n_{r_j} = x_{r_j}(1)x_{-r_j}(-1)x_{r_j}(1)$ через унипотентные элементы.

Замечание 2. В доказательстве леммы 2 используются только один результат о группах с (B, N)-парой, нормальность U в B и нормальность H в N. Поэтому лемма 2 справедлива для любой группы с расщепимой (B, N)-парой, т. е. когда $B = (B \cap N)U$, где U — нормальная нильпотентная подгруппа из B.

3. Доказательство теоремы

Выкладки проведем только для групп Шевалле нормального типа, для скрученных групп доказательство подобно.

Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ над полем F, содержащая унипотентную подгруппу U. Возьмем произвольный элемент g из M. В силу канонического разложения имеем $g = unv$, где $u, v \in U$, $n \in N$. Поэтому $n \in M$. Пусть n — прообраз элемента w группы Вейля W, причем $l(w) = k$ и

$$w = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}, \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in I.$$

Тогда для некоторого $h_g \in H$ получаем

$$n = h_g n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k}, \ \text{ где } \ n_m = n_{r_m} = x_{r_m}(1)x_{-r_m}(-1)x_{r_m}(1).$$

Отсюда $h_{i_1}n_{i_1}, h_{i_2}n_{i_2}, \dots, h_{i_k}n_{i_k} \in M$ для некоторых $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \in H$ по лемме 2. Так как $hn_r X_r n_r^{-1} h^{-1} = X_{-r}$, то все $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k}$ лежат в M и, следовательно, $h_g \in M$. Таким образом, все сомножители элемента n лежат в группе M. Пусть

$$J_g = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}.$$

Тогда $\langle U, g \rangle = \langle Q_{J_g},\ h_g \rangle$, где $Q_{J_g} = \langle U,\ n_{r_j} \mid j \in J_g \rangle$. Ясно, что $M = \langle Q_{J_g},\ h_g \mid g \in M \rangle$. Положим

$$J = \bigcup_{g \in M} J_g, \quad Q_J = \langle U,\ n_{r_j} \mid j \in J \rangle.$$

В силу лемм 1, 3 и 4 и естественного гомоморфизма N на H имеем

$$\langle Q_{J_g}, \mid g \in M\rangle = Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle.$$

Подгруппа Q_J инвариантна относительно любой диагональной подгруппы. Пусть

$$H_M = \langle h_g,\ n_{r_j} h_g n_{r_j}^{-1} \mid g \in M,\ j \in J\rangle.$$

Тогда $M = \langle Q_J,\ H_M\rangle = Q_J H_M$ и подгруппа H_M инвариантна относительно сопряжений всеми мономиальными элементами n_{r_j}, $j \in J$.

Теорема доказана.

Автор глубоко признателен А. С. Кондратьеву за полезные замечания, которые, несомненно, способствовали улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tits J.** Theoreme de Bruhat et sous groupes paraboliques // C.R. Acad. Sci. Paris. 1962. Vol. 254. P. 2910–2912.
2. **Нужин Я.Н., Осетрова Т.А.** О надгруппах унипотентной подгруппы группы Шевалле ранга 2 над полем // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 56–61.
3. **Супруненко Д.А.** Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n, D)$ // Докл. АН БССР. 1970. Т. 14, № 4. С. 305–308.
4. **Seitz G.** Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Annals Math. 1973. Vol. 97, no. 1. P. 27–56.
5. **Carter R. W.** Simple groups of Lie type. London etc.: John Wiley and Sons, 1972. 331 p.
6. **Кондратьев А. С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Поступила 22.01.2016