ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

НЕАБЕЛЕВЫ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ КОТОРОЙ ХОЛЛОВЫ[1]

Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Получено описание неабелевых композиционных факторов конечной группы, каждая максимальная подгруппа нечетного индекса которой холлова.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, холлова подгруппа, композиционный фактор, нечетный индекс.

N. V. Maslova, D. O. Revin. Nonabelian composition factors of a finite group whose maximal subgroups of odd indices are Hall subgroups.

We obtain a description of nonabelian composition factors of a finite nonsolvable group in which any maximal subgroup of odd index is a Hall subgroup.

Keywords: finite group, maximal subgroup, Hall subgroup, composition factor, odd index.

MSC: 20D20, 20D30, 20D60

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-178-187

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин “группа” в значении “конечная группа”.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей, а для группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Наибольшее π-число, делящее натуральное число n, будем обозначать через n_π. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $|H| = |G|_\pi$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел.

В. С. Монахов в [11] начал изучение групп G со следующим свойством:

($*$) для фиксированного множества π простых чисел все максимальные подгруппы в G, индексы которых являются π-числами, холловы.

Основной результат [11] полностью описывает π-разрешимые группы (т. е. группы, обладающие (суб)нормальными рядами, каждый фактор которых либо абелев, либо π'-группа) со свойством ($*$): это, в точности, группы, в которых главные π-факторы изоморфны силовским подгруппам.

Строение произвольных групп со свойством ($*$) более сложно и зависит от множества π. К настоящему моменту полностью исследован [10] вопрос о строении таких групп в ситуации, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, т. е. групп, в которых все максимальные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-6118.2016.1), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Первый автор является победителем конкурса молодых математиков фонда Дмитрия Зимина “Династия” 2013 г.

подгруппы холловы. Данная ситуация была особо выделена В.С. Монаховым, который в 2010 г. записал под номером 17.92 в “Коуровскую тетрадь” [5] следующий

Вопрос 1. Каковы неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы холловы?

Ответ на данный вопрос был найден первым автором в [9]. С использованием этого результата в [10] авторами было получено полное описание групп с холловыми максимальными подгруппами. Поэтому как усиление вопроса 1 и как важный этап описания групп со свойством $(*)$ естественно рассмотреть

Вопрос 2. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Каковы неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы, у которой холловыми будут все максимальные подгруппы с индексами, являющимися π-числами?

Ответ на вопрос 1 удалось получить, во многом, за счет рассмотрения ”больших” подгрупп четного порядка и четного индекса в простых группах и с использованием предложения 1 (см. ниже), доказанного в [9] для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел. В данной работе мы ответим на вопрос 2 в случае, когда π совпадает со множеством всех нечетных простых чисел. Основным результатом является

Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Неабелевы композиционные факторы конечной группы, в которой все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы, изоморфны группам из следующего списка*:

(1) $PSL_2(2^l)$, *где* $l \geq 2$;

(2) $PSL_2(p^l)$, *где* p — *нечетное простое число и*
либо $l = 2^w \geq 2$,
либо $l = 1$ *и* $p \equiv \pm 1 \pmod 8$,
либо $l = 1$ *и* $p \equiv \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 29 \pmod{72}$;

(3) $PSL_3(2^{2l-1})$, *где* $l \geq 1$;

(4) $PSL_5(2^l)$, *где* l *не делится на* 4;

(5) $PSL_n(p)$, *где* n — *простое число Ферма,* p — *нечетное простое число,* $(n, p-1) = 1$ *и если* $p \equiv 1 \pmod 4$, *то* $p > n$ *и для любого простого числа* $r \leq n$
либо r *делит* $p - 1$,
либо $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1} - 1)_r = r$ *и* $r - 1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$;

(6) $PSp_4(2^l)$, *где* $l \geq 2$;

(7) $Sz(2^{2l+1})$, *где* $l \geq 1$;

(8) A_n, *где* $n = 6$ *или* n — *простое число Ферма*;

(9) J_1, M_{23}.

(ii) *Для каждой простой группы* S *из приведенного в п.* (i) *списка найдется группа* G, *в которой все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы и цоколь которой изоморфен* S.

2. Используемые обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [2;4;13;17]. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{V}(\pi)$ класс всех групп, где все максимальные подгруппы, индексы которых являются π-числами, холловы, а через $\mathfrak{A}(\pi)$ — класс всех неабелевых простых групп, изоморфных композиционным факторам групп из класса $\mathfrak{V}(\pi)$.

Основными инструментами исследования в настоящей работе будут классификация конечных простых групп и следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* π — *некоторое множество простых чисел и* S — *простая неабелева группа, обладающая подгруппой* X *такой, что*

(1) *класс сопряженности* $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ *является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *индекс* $|S : X|$ *является* π*-числом*;

(3) *любая подгруппа* Z *такая, что* $X \leq Z < S$, *не холлова в* S.

Тогда $S \notin \mathfrak{A}(\pi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы используем ту же схему, что и в доказательстве [9, предложение 1].

Заметим, что класс групп $\mathfrak{V}(\pi)$ замкнут относительно взятия факторгрупп. Допустим, что заключение предложения не верно. Среди групп из класса $\mathfrak{V}(\pi)$, обладающих композиционным фактором, изоморфным S, выберем группу G наименьшего порядка. Так же, как и в доказательстве [9, предложение 1], замечаем, что если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $L = L_1 \times \cdots \times L_m$, где $L_i \cong S$, и группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\{L_1, \dots, L_m\}$, причем $m = |G : N_G(L_1)|$. Не уменьшая общности, считаем, что $L_1 = S$. Зафиксируем некоторую полную систему $\{g_1, \dots, g_m\}$ представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(L_1)$. Тогда подгруппы $L_1^{g_1}, L_1^{g_2}, \dots, L_1^{g_m}$ попарно различны, и, не уменьшая общности, мы будем считать, что $L_i = L_1^{g_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Для подгруппы $X \leq S$, удовлетворяющей условиям (1)–(3), положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$. Как и в доказательстве [9, предложение 1], заключаем, что класс сопряженности Y^L инвариантен относительно сопряжений элементами из G, откуда ввиду аргумента Фраттини $G = LN_G(Y)$.

С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизмах легко показать, что

$$|G : N_G(Y)| = |L : L \cap N_G(Y)| = |S : N_S(X)|^m,$$

откуда следует, что индекс $|G : N_G(Y)|$ является π-числом. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(Y)$. Тогда индекс $|G : M|$ также является π-числом и, следовательно, M — холлова подгруппа в G. Кроме того, $G = LN_G(Y) = LM$, следовательно, $L \nleq M$. В частности, найдется подгруппа L_i, $1 \leq i \leq m$, такая, что $L_i \nleq M$. Как и в доказательстве [9, предложение 1], замечаем, что $X_i \leq Y \leq M$, откуда $X_i \leq L_i \cap M = Z_i < L_i$, т. е. Z_i — собственная подгруппа в L_i, содержащая X_i. Ввиду субнормальности подгруппы L_i в G и холловости M в G заключаем, что Z_i — холлова подгруппа группы L_i ввиду [16, лемма 1]. Значит, в S есть холлова собственная подгруппа Z, содержащая X, что противоречит выбору S и X. Предложение доказано.

Зафиксируем некоторые обозначения, связанные с классическими группами. Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетных n и q и $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = \mathbb{F}_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = \mathbb{F}_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется *знаком* этой группы и соответствующего ей векторного пространства V и обозначается через $\mathrm{sign}(V)$. Для каждого невырожденного подпространства U четной размерности m из V определяется также знак $\upsilon = \mathrm{sign}(U)$ [17, гл. 2]. Положим

$$D(U) = D_m^\upsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } \upsilon = + \text{ и } (q-1)m/4 \text{ четно или } \upsilon = - \text{ и } (q-1)m/4 \text{ нечетно,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Важную роль в рассуждениях будет играть функция ψ, введенная в [6]. Напомним ее определение. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i, с конечным числом ненулевых компонент. Введем на $\mathcal{M}$ естественный частичный порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначаем функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность

$(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Лемма 1. *Пусть $G = PGL_2(q)$, где $q = p^f \geq 5$ и p — нечетное простое число. Тогда максимальные подгруппы группы G, которые не содержат $Soc(G)$, представлены в следующем списке*:

(1) $(C_p)^f \rtimes C_{q-1}$;

(2) $D_{2(q-1)}$, *где* $q \neq 5$;

(3) $D_{2(q+1)}$;

(4) S_4, *где* $q = p \equiv \pm 3 \pmod 8$;

(5) $PGL_2(q_0)$, *где* $q = q_0^r$ *и* r — *нечетное простое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует, например, из [14, табл. 8.7]. См. также [15, теорема 3.5].

Лемма 2. *Пусть $q > 1$ и n — натуральные числа, r — нечетное простое число такое, что $(q, r) = 1$. Пусть $e = e(q, r)$ — наименьшее натуральное число такое, что $q^e \equiv 1 \pmod r$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) $(n!)_r = r^\alpha$, *где* $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty} [n/r^i]$;

(2) $\prod\limits_{i=1}^{n} (q^i - 1)_r = (q^e - 1)_r^{[n/e]} ([n/e]!)_r$;

(3) $\prod\limits_{i=1}^{n} (q^i - 1)_r = (n!)_r$ *тогда и только тогда, когда* $e = r - 1$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$ *и* $[n/r] = [n/(r-1)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (1) и (2) хорошо известны (см, например, [21, лемма 2; 20, лемма 2.6]). Докажем (3). Заметим сначала, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$[[x]/m] = [x/m]. \tag{2.1}$$

Действительно, так как $[x] \leq x$, левая часть равенства (2.1) не превосходит его правой части. Допустим, что левая часть строго меньше. Тогда $[x]/m < [x/m]$, откуда получаем $[x] < m[x/m]$ и $x < m[x/m] \leq m \cdot (x/m) = x$; противоречие.

Пусть $A = \prod\limits_{i=1}^{n} (q^i - 1)_r$. Тогда по утв. (2) и согласно малой теореме Ферма

$$A = (q^e - 1)_r^{[n/e]} ([n/e]!)_r \geq r^{[n/e]} ([n/e]!)_r \geq r^{[n/(r-1)]} ([n/(r-1)]!)_r \geq r^{[n/r]} ([n/r]!)_r = r^\beta, \tag{2.2}$$

где с учетом (1) и равенства (2.1) для $x = n/r$ и $m = r^i$

$$\beta = [n/r] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[[n/r]/r^i\right] = [n/r] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[n/r^{i+1}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[n/r^i\right] = \log_r (n!)_r.$$

Поэтому $A \geq (n!)_r$, причем неравенство строгое тогда и только тогда, когда строгим является хотя бы одно из неравенств в цепочке (2.2) или, эквивалентно, тогда и только тогда, когда строгим является хотя бы одно из неравенств $r - 1 \geq e$, $(q^e - 1)_r \geq r$ или $[n/(r-1)] \geq [n/r]$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Используя классификацию конечных простых групп, для каждой известной простой группы S мы либо с помощью предложения 1 покажем, что $S \notin \mathfrak{A}(2')$, либо построим группу $G \in \mathfrak{V}(2')$ такую, что $S = Soc(G)$.

1. Пусть S изоморфна одной из 26 спорадических групп или группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Ввиду [13] если $S \in \{J_1, M_{23}\}$, то все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы в S. Если $S \notin \{J_1, M_{23}\}$, то в S есть максимальная подгруппа нечетного индекса X, не являющаяся холловой, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2. Пусть $S \cong A_n$ при $n \geq 5$. Ввиду [13] группа $A_6 \cong PSL_2(9)$, принадлежащая списку из утв. (i) теоремы, содержит максимальную подгруппу, изоморфную S_4 и не являющуюся холловой. Однако все максимальные подгруппы нечетных индексов группы $\mathrm{Aut}(A_6)$ изоморфны ее силовским 2-подгруппам, следовательно холловы. Для группы $A_6 \cong PSL_2(9)$, тем самым, имеет место утв. (ii). Далее будем считать, что $n \neq 6$ и, следовательно, $\mathrm{Aut}(A_n) = S_n$. Поскольку $A_8 \cong PSL_4(2)$, положим $n \neq 8$, а группу A_8 рассмотрим в п. 3.3.3.

2.1. Пусть $n = 2^w + 1$ и X — максимальная подгруппа нечетного индекса в S. Тогда ввиду основного результата [7] имеем $X \cong (S_m \times S_{n-m}) \cap A_n$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$. Отсюда $m \in \{1, n-1\}$ и $|S : X| = n$. Рассуждая, как в [9, предложение 3], показываем, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Теперь заметим, что если n — простое число, то n не делит порядок X, и, следовательно, X — холлова подгруппа в S. Если n не является простым числом, то подгруппа X не холлова, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2.2. Предположим, что n не является ни числом вида $2^w + 1$, ни степенью числа 2. Пусть m — наибольшее число такое, что $\psi(n) \geq \psi(m)$ и $m < n/2$, если $n \neq 7$; и пусть $m = 5$, если $n = 7$. Тогда $1 < m \neq n/2$. Рассмотрим подгруппу $X = K \cap S$, где $S_n > K \cong S_m \times S_{n-m}$. Рассуждая, как в [9, предложение 3], показываем, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [7] подгруппа X является максимальной подгруппой нечетного индекса в S. Легко понять, что подгруппа X неразрешима и ввиду [21] не является холловой подгруппой в S. Поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2.3. Пусть $n = 2^w > 8$. Рассмотрим в S подгруппу $X = K \cap S$, где $S_n > K \cong S_{n/2} \wr S_2$. Заметим, что $X = N_S(X_1)$, где $X_1 \cong (S_{n/2} \times S_{n/2}) \cap A_n$, и класс сопряженности подгруппы X_1 в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Отсюда класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Легко понять, что при $n > 8$ подгруппа X неразрешима и ввиду [21] не является холловой подгруппой в S. Ввиду основного результата [7] подгруппа X является максимальной подгруппой нечетного индекса в S. Поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения.

3. Пусть $S \cong PSL_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2,2), (2,3)$.

3.1. Рассмотрим случай $n = 2$.

3.1.1. Пусть $p = 2$. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (1) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Ввиду [18] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — параболическая максимальная подгруппа в S. Ввиду [14, табл. 8.1] имеем $H \cong C_p^l \leftthreetimes C_{q-1}$; легко понять, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

3.1.2. Пусть p нечетно и $l > 1$ — степень двойки. Случай $PSL_2(9) \cong A_6$ рассмотрен в п. 2. Группа S принадлежит списку из утв. (i) теоремы. Покажем, что в качестве G в утв. (ii) можно взять группу $PGL_2(q)$. Заметим, что $q \equiv 1 \pmod 4$. Поэтому ввиду леммы 1 если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в группе $G = PGL_2(q)$, то $H \cong D_{2(q-1)}$. Очевидно, что H — холлова подгруппа в S.

3.1.3. Пусть p нечетно, $l > 1$ не является степенью двойки и r — нечетный простой делитель числа l. Рассмотрим подгруппу $X = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S. Ввиду [14, табл. 8.1] подгруппа X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [18] индекс

$|S:X|$ нечетен. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.1.4. Пусть $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $l = 1$. Рассмотрим подгруппу $X = N_S(P)$, где P — силовская 2-подгруппа группы S. Ввиду [3, следствие] имеем $X \cong A_4$. Заметим, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и индекс $|S:X|$ нечетен. Рассмотрим все возможные остатки числа p по модулю 72. Простота p влечет, что эти остатки не кратны 3.

Если $p \equiv 5, 11, 13, 29, 43, 59, 61, 67 \pmod{72}$, т. е. S — группа из п. (2) утв. (i) теоремы, то рассмотрим группу $G = PGL_2(p)$. Если H — максимальная подгруппа в G, то лемма 1 влечет, что H изоморфна одной из следующих групп: $PSL_2(p)$, $C_p \leftthreetimes C_{p-1}$, $D_{2(p-1)}$ (если $p \neq 5$), $D_{2(p+1)}$ или S_4. Легко понять, что если индекс $|G:H|$ нечетен, то H — холлова подгруппа в G ввиду ограничений на p.

Если $p \equiv 19, 35, 37, 53 \pmod{72}$, то порядок X и индекс $|S:X|$ делятся на 3. Кроме того, ввиду [14, табл. 8.7] либо X — максимальная подгруппа в S, либо $X < Y \cong A_5 < S$ и снова порядок Y и индекс $|S:Y|$ делятся на 3. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.1.5. Пусть $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и $l = 1$, и поэтому S — группа из п. (2) утв. (i) теоремы. По лемме 1 если H — максимальная подгруппа группы $G = PGL_2(p)$, то H изоморфна одной из следующих групп: $PSL_2(p)$, $C_p \leftthreetimes C_{p-1}$, $D_{2(p-1)}$ или $D_{2(p+1)}$. Легко понять, что если индекс $|G:H|$ нечетен, то H — холлова подгруппа в G.

3.2. Пусть q нечетно и $n \geq 3$.

3.2.1. Пусть либо n не является ни степенью числа 2, ни простым числом Ферма, либо n — простое число Ферма вида $2^w + 1$, делящее $q - 1$. Пусть m — наибольшее число такое, что $\psi(n) \geq \psi(m)$ и $m < n/2$, если $n \neq 7$, и пусть $m = 2$, если $n = 7$. Тогда $1 < m < n/2$ или n — простое число Ферма и $m = 1$. Рассмотрим стабилизатор X в S разложения $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму подпространств V_1 и V_2, где $\dim V_1 = m$ и $\dim V_2 = n - m$. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.1.4] класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [8, предложение 1] подгруппа X является подгруппой нечетного индекса в S. Поскольку числа 2, 3 и p делят порядок X, из [12, теорема 1.2] следует, что любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не является холловой в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.2.2. Пусть n — простое число Ферма вида $2^w + 1$, не делящее $q - 1$. Из [8] заключаем, что любая подгруппа нечетного индекса в S является либо стабилизатором подпространства размерности 1 или $n - 1$, либо стабилизатором разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 1, либо совпадает с $N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S. Если S допускает полевой автоморфизм σ нечетного простого порядка, то $X = N_S(C_S(\sigma))$ — не холлова максимальная подгруппа, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Поэтому считаем, что $q = p^l$, где $l = 2^u$.

Ввиду того что n не делит $q - 1$, стабилизатор в S подпространства размерности 1 или $n - 1$ является холловой подгруппой в S [12, теорема 1.2].

Рассмотрим в качестве X стабилизатор разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 1. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3; 14, табл. 8.3, 8.18] подгруппа X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Подгруппа X имеет нечетный индекс в S в том и только в том случае, когда $q-1$ делится на 4 (см. [8]). Согласно [20, лемма 4.3] (см. также [1, теорема 8.2]) и с учетом [12, теорема 1.2] подгруппа X холлова в S тогда и только тогда, когда p не делит $|X|$ (эквивалентно, $p > n$), $q \equiv 1 \pmod{12}$ при $n > 3$, и для любого нечетного простого делителя r порядка группы S_n либо r делит $q - 1$, либо $|S_n|_r = |S|_r$. Заметим, что последнее равенство должно, в частности, выполняться при $r = n$, поскольку мы считаем, что n не делит $q - 1$. Допустим, что $u \geq 1$. Тогда в соответствии с малой теоремой Ферма числа $q^{n-1} - 1$ и

$$q^{(n-1)/2} - 1 = p^{2^u \cdot 2^{w-1}} - 1 = p^{2^{u-1} \cdot 2^w} - 1 = (p^{2^{u-1}})^{n-1} - 1$$

делятся на n и $|S|_n \geq n^2 > n = |S_n|_n$; противоречие. Следовательно, $q = p$ — простое число. Далее, по лемме 2(3) равенство $|S_n|_r = |S|_r$ для простого нечетного числа r эквивалентно условию $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1}-1)_r = r$ и $r-1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$. Наконец, остается заметить, что если для $r = 3$ выполнено условие $[n/3] = [n/r] = [n/(r-1)] = [n/2]$, то $n \le 3$. Поэтому при $n > 3$ не выполнено условие $[n/r] = [n/(r-1)]$ при $r = 3$, и холловость подгруппы X эквивалентна тому, что $q \equiv 1 \pmod 4$ и для любого простого числа $r \le n$ либо r делит $q-1$, либо $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1}-1)_r = r$ и $r-1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$.

Таким образом, либо S — группа из п. (5) в утв. (i) теоремы, либо в S есть $\mathrm{Aut}(S)$ — инвариантный класс сопряженности максимальных нехолловых подгрупп нечетного индекса и $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.2.3. Пусть $n = 2^w \ge 4$. Пусть X — стабилизатор в S разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 2. Из доказательства [6, теорема 7] следует, что индекс $|S : X|$ нечетен. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.2.9; 14, табл. 8.4, 8.44] класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и X является максимальной подгруппой в S, если $(n, q) \ne (4, 3)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \le Y < S$, не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.3. Пусть $p = 2$ и $n \ge 3$.

3.3.1. Пусть $n = 3$ и l четно. Тогда $(q-1, n) = 3$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 2$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.3.2. Пусть $n = 3$ и l нечетно, т. е. S — группа из п. (3) утв. (i) теоремы. Тогда $(q-1, 3) = 1$. Ввиду [18; 4, § 2] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — стабилизатор в S подпространства размерности 1 или 2 пространства V. Ввиду [12, теорема 12.2] имеем, что H — холлова подгруппа в S и выполнено утв. (ii).

3.3.3. Пусть $n = 4$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 3$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X удовлетворяет условиям предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.3.4. Пусть $n = 5$. Если l делится на 4, то $(q-1, n) = 5$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 4$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22; 4, § 2]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Собственные надгруппы подгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду [12, теорема 11.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1. Пусть l не делится на 4 и, следовательно, S — группа из п. (4) утв. (i) теоремы. Тогда $(q-1, 5) = 1$. Ввиду [18; 2, § 2] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — стабилизатор в S подпространства размерности m пространства V, где $1 \le m \le 4$. Ввиду [12, теоремы 11.2, 12.2] имеем, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

3.3.5. Пусть $n \ge 6$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_2 = n-2$. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

4. Пусть $S \cong PSU_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \ge 3$ и $(n, q) \ne (3, 2)$.

4.1. Пусть $p = 2$. Пусть X — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 1 из V. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 6], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

4.2. Пусть p нечетно и n не является степенью числа 2. Тогда существует натуральное число m такое, что $1 \le m \le n-1$ и $\psi(n) \ge \psi(m)$. Пусть X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности m из V. Ввиду [6, теорема 3] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.B, предложение 4.1.4; 14, табл. 8.5, 8.20, 8.26, 8.37, 8.56, 8.62, 8.72, 8.78] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

4.3. Пусть p нечетно и $n \geq 4$ является степенью числа 2. Пусть X — стабилизатор в S ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму $n/2$ изометричных подпространств V_i размерности 2. Ввиду [6, теорема 8] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.B, предложение 4.2.; 14, табл. 8.10, 8.46] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

5. Пусть $S \cong PSp_{2n}(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2)$.

5.1. Пусть $(n, p) = (2, 2)$. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (6) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Рассмотрим группу G такую, что $S \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$ и $G/S \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Out}(S))$. Ввиду [18] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G, то $X = S \cap H$ является параболической подгруппой в S. Ввиду [4, § 2; 14, табл. 8.14] подгруппа X является нормализатором в G подгруппы Бореля из S. Легко понять, что $H = N_G(X)$, $G = SH$ и $|G : H| = |S : X|$. Из [1, теорема 8.4] следует, что подгруппа X холлова в S, кроме того, индекс $|G : S|$ является степенью числа 2. Значит, H — холлова подгруппа в G.

5.2. Пусть $p = 2$ и $n > 2$. Пусть X — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 2 из V. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 7], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

5.3. Пусть p нечетно. Пусть X — стабилизатор в S ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму n изометричных подпространств V_i размерности 2. Ввиду [6, теорема 9] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.C, предложение 4.2.10; 14, табл. 8.12, 8.28, 8.48, 8.64, 8.80] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

6. Пусть $S \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geq 3$ и q нечетно. Пусть X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности $2n$ из V такого, что $D(U) = 1$. Ввиду [6, теорема 5] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.D, предложение 4.1.6; 14, табл. 8.39, 8.58, 8.74] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. По [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

7. Пусть $S \cong P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 4$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$.

7.1. Пусть q четно. Выберем подгруппу X так же, как и в доказательствах [9, предложения 9, 10]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

7.2. Пусть q нечетно и $D(V) = -1$. Рассмотрим подгруппу X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности 2 из V такого, что $D(U) = -1$. Ввиду [6, теорема 6] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.(E,F), предложение 4.1.6] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и числа 2, 3 и p делят $|X|$. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$ не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

7.3. Пусть q нечетно и $D(V) = 1$. Тогда либо $\varepsilon = +$ и $n(q-1)/4$ четно, либо $\varepsilon = -$ и $n(q-1)/4$ нечетно.

Если $n \equiv 2 \pmod 4$, то рассмотрим стабилизатор X двумерного подпространства U такого, что $D(U) = 1$ (знак подбирается). Класс сопряженности X^S этой подгруппы $\mathrm{Aut}(S)$-инвариантен [17, табл. 3.5.(E,F), предложение 4.1.6], ее порядок делится на 2, 3 и p, а индекс нечетен [6, теорема 11]. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не холлова в S.

Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\varepsilon = +$. Рассмотрим в качестве X стабилизатор ортогонального разложения пространства V в сумму изометричных подпространств V_i размерности 4 и знака $+$. Заметим, что $D(V_i) = 1$. Это максимальная в S подгруппа, класс сопряженности X^S которой $\mathrm{Aut}(S)$-инвариантен [17, табл. 3.5.E, предложение 4.2.11; 14, табл. 8.50], ее порядок делится на 2, 3 и p, а индекс нечетен [6, теорема 11]. По [12, теорема 1.2] X не является холловой.

Таким образом, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

8. Пусть $S \in \{E_8(q), E_7(q), F_4(q), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3), {}^2F_4(2^{2n+1}), G_2(2^w), {}^2G_2(3^{2n+1})\}$.

8.1. Пусть q четно. Рассмотрим в S параболическую подгруппу X, как указано в [9, предложения 11, 13, 14]. Класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [2, III]). Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \le Y < S$, не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

8.2. Пусть q нечетно. Ввиду [18] в S найдется подгруппа X, индекс которой нечетен, а порядок делится на числа 2, 3 и p, откуда по [12, теорема 1.2] имеем, что подгруппа X не холлова в S. Из замечания после основной теоремы в [18] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

9. Пусть $S \cong E_6(q)$.

9.1. Пусть q четно. Рассмотрим в S параболическую максимальную подгруппу X, как указано в [9, предложение 12]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 12], показываем, что подгруппа X удовлетворяет условиям предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

9.2. Пусть q нечетно. Рассмотрим подгруппу $X \cong N_S(2 \cdot P\Omega_8^+(q))$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [19, табл. 10.2] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из [12, теорема 1.2] следует, что в S нет холловых подгрупп, порядки которых делятся одновременно на 2, 3 и p. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

10. Пусть $S = G_2(q)$, где q нечетно. Рассмотрим в S подгруппу $X \cong 2^{\cdot}(PSL_2(q) \times PSL_2(q))$, являющуюся централизатором инволюции в S. Ввиду [14, табл. 8.41, 8.42] X является максимальной подгруппой, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. По [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

11. Пусть $S = {}^2B_2(q)$, где $q = 2^l$ и $l > 1$ нечетно. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (7) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Пусть H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S. Тогда ввиду [18] H — подгруппа Бореля группы S, имеющая порядок $q(q-1)$ и индекс q^2+1. Легко понять, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Бутурлакину и А.С. Кондратьеву за полезные консультации, а также и анонимному рецензенту за замечания, позволившие улучшить первоначальный текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
2. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
3. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
4. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
6. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

7. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
8. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208.
9. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
10. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
11. **Монахов В.С.** Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
12. **Ревин Д.О.** Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 160–208.
13. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
15. **Giudici M.** Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2,q)$ [e-resource]. 2007. 11 c. URL: http://arxiv.org/pdf/math.GR/0703685.pdf.
16. **Hall P.** Theorems like Sylow's // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1956. Vol. 6, no. 22, P. 286–304.
17. **Kleidman P., Liebeck M.,** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
18. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc (2). 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
19. **Oshima T.** A classification of subsystems of a root system [e-resource]. 2007. 47 p. URL: http://arxiv.org/pdf/math/0611904v4.pdf.
20. **Revin D.O., Vdovin E.P.** On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. Vol. 324. P. 3614–3652.
21. **Thompson J.G.** Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. Vol. 1. P. 271–279.

Маслова Наталья Владимировна
Поступила 17.05.2016
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
профессор
Новосибирский государственный университет
e-mail: revin@math.nsc.ru