ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 515.126.27+517.988.57

УСЛОВИЯ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ И ПРИМИТИВНОСТИ МОНОТОННЫХ СУБОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Вл. Д. Мазуров, А. И. Смирнов[1]

Представлены необходимые и достаточные условия локальной неразложимости монотонных субоднородных преобразований конуса $\mathbb{R}^q_+$. Основное внимание при этом уделяется понятию неразложимости отображения в нуле, которое является ослаблением классического понятия неразложимости отображения. Анализируются свойства неразложимых в нуле монотонных положительно однородных первой степени отображений и субоднородных отображений. Получены также условия примитивности таких отображений.

Ключевые слова: положительно однородное первой степени отображение, субоднородное отображение, неразложимое отображение, неразложимое в нуле отображение, примитивное отображение.

Vl. D. Mazurov, A. I. Smirnov. Conditions for the irreducibility and primitivity of monotone subhomogeneous mappings.

We present necessary and sufficient conditions for the local irreducibility of monotone subhomogeneous transformations of the cone $\mathbb{R}^q_+$. The main attention is paid to the notion of irreducibility of a mapping at zero, which is a weakening of the classical notion of irreducibility of a mapping. We analyze the properties of monotone first-degree positively homogeneous mappings irreducible at zero and of subhomogeneous mappings. Necessary and sufficient conditions are obtained for the primitivity of such mappings.

Keywords: first-degree positively homogeneous mapping, subhomogeneous mapping, irreducible mapping, irreducible at zero mapping, primitive mapping.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177

1. Введение. Мотивация и основные определения

Мы будем рассматривать дискретную динамическую систему вида

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

на конусе $\mathbb{R}^q_+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_q)\colon x_i \geqslant 0\ \forall i = 1, 2, \dots, q\}$. Система имеет тривиальное состояние равновесия, что означает наличие нулевой неподвижной точки порождающего ее отображения: $F(0) = 0$.

Для некоторых классов отображений асимптотические свойства итерационного процесса (1) достаточно хорошо изучены и во многом определяются спектральными свойствами отображения F. Так, в математической экономике имеется хорошо развитая спектральная теория для монотонных положительно однородных первой степени отображений, обобщающая основные утверждения спектральной теории для линейных отображений [1]. В работе [2] асимптотические свойства итерационного процесса (1) охарактеризованы для класса монотонных субоднородных отображений, содержащего как граничный случай класс положительно однородных первой степени отображений. При этом существенными в доказательствах многих ключевых утверждений нелинейной теории Перрона — Фробениуса оказываются свойства неразложимости и примитивности отображения F, являющиеся обобщениями соответствующих свойств неотрицательной матрицы.

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 16-07-00266).

Далее используются следующие обозначения:

$$x \leqq y, \text{ если } y - x \in \mathbb{R}^q_+; \quad x \leq y, \text{ если } x \leqq y; \quad x \neq y \text{ и } x < y, \text{ если } y - x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^q_+.$$

Для краткости будем записывать вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ и отображение $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x))$ в виде $x = (x_i)$ и $F(x) = (f_i(x))$ соответственно.

Будем использовать стандартные определения монотонности и положительной однородности отображений. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *монотонно возрастающим*, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+ \colon x \leqq y \Rightarrow F(x) \leqq F(y).$$

Монотонно возрастающее отображение будем также называть для краткости просто *монотонным* или *возрастающим*.

Отображение $H \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *положительно однородным степени* m, если

$$H(\alpha x) = \alpha^m H(x) \quad \forall \alpha \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^q_+.$$

Основным требованием к отображению, генерирующему динамическую систему (1), в данной работе является свойство субоднородности.

Определение 1. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *субоднородным*, если выполнено условие

$$F(\alpha x) \geqq \alpha F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^q_+, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{2}$$

Заметим, что отображения, удовлетворяющие аналогичному свойству (иногда со строгим неравенством) в банаховых пространствах, рассматривались в целом ряде работ (см., например, обзор в недавней монографии [3]). В настоящее время за отображениями, действующими в банаховых пространствах с частичным порядком (порождаемым некоторым конусом) и удовлетворяющими условию (2), в основном закрепилось название “субоднородные отображения” (см. монографии [3–5]). Этот же термин используется в исследованиях по популяционной биологии (см. монографию [6]). Мы также будем здесь придерживаться этого термина.

Свойство (2), определяющее субоднородность, равносильно каждому из следующих условий:

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+ \quad \forall \beta \in (1, +\infty) \quad F(\beta x) \leqq \beta F(x),$$
$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow (\alpha_1)^{-1} F(\alpha_1 x) \geqq (\alpha_2)^{-1} F(\alpha_2 x). \tag{3}$$

Последнее свойство означает, что при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^q_+$ отображение $\alpha^{-1} F(\alpha x)$ является убывающим по $\alpha \in \mathbb{R}_+$, и, следовательно, могут быть определены положительно однородные первой степени отображения

$$F_0(x) = \lim_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} F(\alpha x), \quad F_\infty(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^{-1} F(\alpha x), \tag{4}$$

являющиеся соответственно мажорантой и минорантой отображения F на $\mathbb{R}^q_+$. В работе [2] в терминах доминирующих собственных значений этих отображений получены необходимые и достаточные условия существования положительной неподвижной точки монотонного субоднородного отображения.

Для положительно однородного первой степени отображения H доказана [1] разрешимость задачи о собственных значениях и подтверждено существование наибольшего среди всех его собственных значений — числа $\lambda(H)$, которому соответствует неотрицательный собственный вектор. Это число называется *доминирующим собственным значением* отображения H, поскольку многие его свойства аналогичны свойствам доминирующего собственного значения неотрицательной квадратной матрицы. Более сильные спектральные свойства положительно однородных первой степени отображений получены в предположении их неразложимости.

Неотрицательная матрица $A = [a_{i,j}]$ порядка $q > 1$ называется *разложимой*, если

$$\exists I \subseteq \overline{1,q}, \quad \varnothing \neq I \neq \overline{1,q}\colon a_{i,j} = 0 \quad \forall i \notin I,\ j \in I. \tag{5}$$

В противном случае матрица называется *неразложимой*.

Для разложимой матрицы A координаты $(Ax)_i$ вектора Ax с номерами $i \in J$, где $J = \overline{1,q}\setminus I$, зависят только от координат x_i вектора x с теми же номерами. Действительно, имеем

$$(Ax)_i = \sum_{j\in I} a_{i,j}x_j + \sum_{j\in J} a_{i,j}x_j = \sum_{j\in J} a_{i,j}x_j \quad \forall i \in J.$$

Это означает, что итерационный процесс (1) с линейным оператором шага, определяемым разложимой матрицей, содержит изолированную подсистему — проекцию вектора x исходной системы в подпространство с координатами из множества $i \in J$. Это обстоятельство дает основания рассматривать линейные процессы (1) только с неразложимыми матрицами.

Определим следующие группы координат векторов $x, y \in \mathbb{R}^q_+$:

$$I^+(x,y) = \{j \in \overline{1,q}\colon x_j > y_j\}, \quad I^0(x,y) = \{j \in \overline{1,q}\colon x_j = y_j\},$$
$$I^+(x) = \{i \in \overline{1,q}\colon x_i > 0\}, \qquad I^0(x) = \{i \in \overline{1,q}\colon x_i = 0\}.$$

В нелинейной теории Перрона — Фробениуса используется следующее обобщение понятия неразложимости матрицы [1].

Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым*, если

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing, \quad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x), F(y)). \tag{6}$$

Отображение F называется *неразложимым*, если оно не является разложимым, т. е. если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y)\setminus I^0(F(x), F(y)) \neq \varnothing.$$

Далее будет дано также определение неразложимости в точке (введенное в работе [7]). Будем называть разложимое в смысле (6) отображение *глобально разложимым* (на $\mathbb{R}^q_+$) и неразложимое в смысле (6) отображение — *глобально неразложимым* (на $\mathbb{R}^q_+$).

Поскольку далее отображение F всюду предполагается монотонно возрастающим, то условие $i \notin I^0(F(x), F(y))$ означает $f_i(x) > f_i(y)$, и определение глобальной неразложимости отображения можно уточнить следующим образом:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \varnothing. \tag{7}$$

Линейное отображение, определяемое неразложимой матрицей, естественно является глобально неразложимым в смысле этого определения. Действительно, если матрица A разложима и I — множество из определения (5) разложимости матрицы, то, обозначая $J = \overline{1,q}\setminus I \neq \varnothing$, из равенств $x_i = y_i$ $\forall i \in J$ получаем:

$$(Ax)_i = \sum_{j\in I} a_{i,j}x_j + \sum_{j\in J} a_{i,j}x_j = \sum_{j\in J} a_{i,j}x_j = \sum_{j\in J} a_{i,j}y_j = (Ay)_i \quad \forall i \in J.$$

Таким образом, если координаты векторов x, y с номерами из множества $J = \overline{1,q}\setminus I$ совпадают, то и образы Ax, Ay этих векторов имеют координаты, совпадающие на тех же местах: $(Ax)_j = (Ay)_j$ $\forall j \in J$.

Усилением свойства неразложимости матрицы является ее примитивность. Неотрицательная матрица $A = [a_{i,j}]$, $i, j \in \overline{1,q}$, $q > 1$ называется *примитивной*, если при некотором $k = 1, 2, \ldots$ матрица A^k положительна (т. е. все ее элементы положительны). В противном случае матрица называется *импримитивной*.

В работе [1] дано следующее обобщение понятия примитивности матрицы. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *примитивным* в точке $y \in \mathbb{R}^q_+$, если

$$\forall x\colon x \geq y \Rightarrow \exists k\colon F^k(x) > F^k(y).$$

Примитивное в точке $y = 0$ отображение будем для краткости называть также *примитивным в нуле* (или *в нулевой точке*).

В нелинейной теории Перрона — Фробениуса свойство примитивности отображения в точке (или на некотором подмножестве исходного конуса) является существенным в ряде ключевых утверждений. С другой стороны, также активно используемое классическое свойство неразложимости отображения (7) имеет, как уже отмечалось выше, глобальный характер. Как показано в работе [7], для доказательства некоторых утверждений о свойствах положительно однородных и субоднородных отображений достаточно локального варианта свойства неразложимости. Приведем соответствующие определения.

Определение 2. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в точке* $y \in \mathbb{R}^q_+$, если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing, \quad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x),F(y)).$$

Отображение, разложимое в каждой точке множества $M \subseteq \mathbb{R}^q_+$, называется *разложимым на множестве* M.

Соответственно отображение F называется *неразложимым в точке* y, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x),F(y)) \neq \varnothing.$$

Отображение, неразложимое в каждой точке множества $M \subseteq \mathbb{R}^q_+$, называется *неразложимым на множестве* M.

Определение 3. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в точке* $y = 0$ (*разложимым в нуле*, *в нулевой точке*), если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \varnothing, \quad I^0(x) \subseteq I^0(F(x)).$$

Соответственно отображение F называется *неразложимым в точке* $y = 0$ (*в нуле, в нулевой точке*), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x) \cap I^+(F(x)) \neq \varnothing.$$

Глобальная неразложимость отображения по определению влечет за собой неразложимость в любой точке $\mathbb{R}^q_+$, и в частности неразложимость в нуле. Для линейных отображений понятие неразложимости в нуле, как показано в работе [7], совпадает с понятием глобальной неразложимости (совпадающим, в свою очередь, с понятием неразложимости матрицы линейного отображения).

2. Некоторые свойства неразложимых и примитивных монотонных субоднородных отображений

Рассмотрим сначала некоторые вопросы, связанные с существованием нулей субоднородных отображений. В работе [2] доказано следующее полезное утверждение.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ является субоднородной и возрастающей на $\mathbb{R}^q_+$. Если $f(\bar{x}) = 0$ для некоторого $\bar{x} \geq 0$, то $f(x) = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^q_+\colon I^0(x) \supseteq I^0(\bar{x})\}$. В частности, если $f(\bar{x}) = 0$ при некотором $\bar{x} > 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^q_+$.*

Замечание. Естественно предполагать в дальнейшем отсутствие полностью нулевых компонент отображения F: $\forall i \in \overline{1,q}\ \exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon f_i(x) > 0$. В этом случае образ положительного вектора для субоднородного возрастающего отображения положителен:

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x > 0 \Rightarrow F(x) > 0. \qquad (8)$$

Действительно, предполагая противное, получаем существование номера $i_0 \in \overline{1,q}$ и вектора $\bar{x} > 0$, удовлетворяющих условию $f_{i_0}(\bar{x}) = 0$, что приводит в силу предыдущей леммы к равенству $f_{i_0}(x) \equiv 0$. Свойство (8) означает для субоднородного возрастающего отображения справедливость включения $F(\operatorname{int}\mathbb{R}^q_+) \subseteq \operatorname{int}\mathbb{R}^q_+$.

При анализе свойств субоднородных отображений и асимптотических свойств, порождаемых ими итерационных процессов, удобно использовать частный случай проективной метрики Гильберта — метрику Биркгофа — Томпсона. Если задан замкнутый конус K в банаховом пространстве X, то метрика Томпсона определяется как

$$d_T(x,y) = \log\max\{\alpha(x,y), \alpha(y,x)\} \tag{9}$$

для сравнимых элементов $x,\ y$ при $y \neq 0$, $d_T(0,0) = 0$ и $d_T(x,y) = +\infty$ в противном случае, где $\alpha(x,y) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \colon x \leqq \alpha y\}$.

Легко убедиться, что $d_T(x,y)$ является метрикой на каждой компоненте сравнимых векторов конуса K. Метрика Томпсона широко используется в исследованиях по линейному и нелинейному анализу (см., например, обзор в статье [8]).

В ряде отечественных исследований (см. обзор в работе [9]) метрика $d_T(x,y)$ называется также метрикой Биркгофа, поэтому будем называть ее в дальнейшем *метрикой Биркгофа — Томпсона*. Следуя В. И. Опойцеву [10], на $\operatorname{int}\mathbb{R}^q_+$ будем ее использовать в виде

$$\rho_0(x,y) = \min\{\alpha > 0 \colon e^{-\alpha}x \leqq y \leqq e^{\alpha}x\}. \tag{10}$$

Равенство расстояний в метрике Биркгофа — Томпсона (9) и в метрике (10) доказано, например, в работе [11].

Метрика ρ_0 эквивалентна [10] евклидовой метрике, т. е. из сходимости последовательности в метрике Биркгофа — Томпсона вытекает ее сходимость в евклидовой метрике, и обратно. Класс субоднородных отображений определен таким образом, что именно метрика Биркгофа — Томпсона является наиболее подходящей для анализа свойств определяемых ими итерационных процессов. В частности, известно [3], что субоднородное возрастающее отображение является нерасширяющим в метрике Биркгофа — Томпсона на внутренности конуса в банаховом пространстве и, следовательно, непрерывным; для конуса $\mathbb{R}^q_+$ это доказано в работе [2]. Здесь же показано, что субоднородное возрастающее отображение имеет непрерывное расширение на весь конус $\mathbb{R}^q_+$. Это позволяет считать субоднородное возрастающее отображение непрерывным на всем $\mathbb{R}^q_+$.

В процессе математического моделирования необходимость приближения построенных моделей к реальности обуславливает переход от линейных моделей к нелинейным, связанный в нашем случае с переходом от линейных отображений к нелинейным. Первым шагом на этом пути может являться использование так называемых *сепарабельных* нелинейных отображений, аддитивных по координатам.

Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *сепарабельным*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+ \quad F(x) = \sum_{j=1}^{q} F_j(x_j),\ F_j(x_j) = f_{i,j}(x_j). \tag{11}$$

Заметим, что равенство $F(0) = 0$ в силу неотрицательности функций $f_{i,j}(x_j)$ приводит к равенствам $f_{i,j}(0) = 0\ \forall i,j \in \overline{1,q}$. Отсюда, используя определение (3) субоднородности для вектора $x(j),\ j \in \overline{1,q}$, имеющего ненулевую координату только на j-м месте, получаем, что субоднородность сепарабельного отображения $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ равносильна субоднородности всех функций $f_{i,j}(x_j)$, $i,j \in \overline{1,q}$.

Сепарабельное отображение $F(x) = f_i(x)$ имеет компоненты $f_i(x) = \sum_{j=1}^q f_{i,j}(x_j),\ i \in \overline{1,q}$. Если $F(0) = 0$, то

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j\in I^0(x)}^{q} f_{i,j}(0) + \sum_{j\in I^+(x)} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j\in I^+(x)} f_{i,j}(x_j).$$

Таким образом, если $x \geq 0$ и $I^0(x) \neq \varnothing$, то равенство (11) можно уточнить:

$$F(x) = \sum_{j \in I^+(x)} F_j(x_j), \quad f_i(x) = \sum_{j \in I^+(x)} f_{i,j}(x_j), \quad i \in \overline{1,q}. \tag{12}$$

Сепарабельному отображению F можно поставить в соответствие матрицу

$$A_F = [a^F_{i,j}], \quad a^F_{i,j} = f_{i,j}(1), \quad i,j \in \overline{1,q}. \tag{13}$$

Уточним смысл понятия неразложимости для монотонного субоднородного сепарабельного отображения.

Теорема 1. *Сепарабельное субоднородное возрастающее отображение* $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$, $F(0) = 0$, *неразложимо в нуле тогда и только тогда, когда неразложима матрица* A_F.

Доказательство. *Необходимость.* Докажем, что из разложимости матрицы A_F вытекает разложимость в нуле отображения F.

Действительно, если матрица A_F разложима, то согласно определению (5) из (13) получаем: $a^F_{ij} = f_{i,j}(1) = 0 \ \forall i \notin I, \ j \in I$, где $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $J = \overline{1,q}/I$. Тогда из леммы следует $f_{i,j}(x_j) \equiv 0 \ \forall i \in J, \ j \in I$. Возьмем вектор $x \in \mathbb{R}^q_+$, для которого $I^0(x) = J$, тогда

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j \in J} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j \in J} f_{i,j}(0) = 0,$$

т. е. $f_i(x) = 0 \ \forall i \in J$.

Таким образом, для данного вектора x мы получили $I^0(x) \subseteq I^0(F(x))$. Это означает, что отображение F разложимо в нуле.

Достаточность. Покажем, что из разложимости в нулевой точке отображения F следует разложимость матрицы A_F.

Пусть отображение F разложимо в нуле. Это означает, что для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^q_+$ справедливы равенства $f_i(x) = 0 \ \forall i \in I^0$, причем $I^0 = I^0(x) \neq \varnothing$, $I^+ = I^+(x) \neq \varnothing$. Отсюда согласно (12) для всех $i \in I^0$ получаем $f_i(x) = \sum_{j \in I^+} f_{i,j}(x_j) = 0$, и в силу неотрицательности слагаемых в последней сумме имеем $f_{i,j}(x_j) = 0 \ \forall i \in I^0, \ j \in I^+$. Из условия $x_j > 0 \ \forall j \in I^+$ согласно лемме следует $f_{i,j} x_j \equiv 0 \ \forall i \in I^0, \ j \in I^+$. Используя определение (13) элемента $a^F_{i,j} = f_{i,j}(1)$, получаем равенства $a^F_{i,j} = 0 \ \forall i \notin I^+, \ j \in I^+$, и согласно определению (5) матрица A_F разложима, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

В общем случае неразложимость матрицы A_F еще не гарантирует глобальной неразложимости отображения F. Тем не менее в частном случае сепарабельного отображения F неразложимости матрицы A_F достаточно для выполнения многих свойств, справедливость которых в общем случае гарантируется глобальной неразложимостью отображения F. В частности, оказывается, что глобальная неразложимость сепарабельных отображений, ненулевые функции-слагаемые которых в аддитивных представлениях их компонент являются строго возрастающими, определяется локальной неразложимостью только в нулевой точке.

Теорема 2. *Пусть отображение* $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ *является сепарабельным, субоднородным и возрастающим* ($F(0) = 0$). *Пусть выполнено условие*

$$\forall i,j\colon f_{i,j}(x_i) \not\equiv 0 \Rightarrow f_{i,j}(x_j) \ \textit{строго возрастает}. \tag{14}$$

Тогда глобальная неразложимость отображения F *равносильна его неразложимости в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что из глобальной разложимости отображения F следует разложимость в нуле.

Если отображение F глобально разложимо, то для некоторой пары векторов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^q_+$, $\bar{x} \geq \bar{y}$, справедливы равенства $f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{y})\ \forall i \in I^0$, где $I^0 = I^0(\bar{x}, \bar{y}) \neq \varnothing$, $I^+ = I^+(\bar{x}, \bar{y}) \neq \varnothing$. Отсюда для $i \in I^0$ получаем равенство

$$0 = f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(\bar{x}_j) - \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(\bar{y}_j) = \sum_{j \in I^+} (f_{i,j}(\bar{x}_j) - f_{i,j}(\bar{y}_j)).$$

Поскольку каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно, то выполняются равенства $f_{i,j}(\bar{x}_j) = f_{i,j}(\bar{y}_j)\ \forall i \in I^0,\ j \in I^+$. Тогда из (14) следует, что $f_{i,j}(x_j) \equiv 0\ \forall i \in I^0,\ j \in I^+$, поэтому при всех $i \in I^0$ имеем $f_i(x) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(x_j)\ \forall x \in \mathbb{R}^q_+$. Отсюда для вектора $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ получаем

$$f_i(\bar{z}) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(0) = 0 \quad \forall i \in I^0.$$

Но $I^0(\bar{z}) = I^0$, т. е. мы получили $I^0(\bar{z}) \subseteq I^0(F(\bar{z}))$, и, следовательно, отображение F разложимо в нуле.

Теорема доказана.

Заметим, что всякое возрастающее ($F(0) = 0$) субоднородное примитивное в нуле отображение F является неразложимым в нуле. Анализ неразложимости отображения F в нуле, как показывает следующее утверждение, может быть сведен к соответствующему анализу отображения F_0, определенному в (4), особенно простому для сепарабельного отображения.

Теорема 3. *Если отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ является субоднородным и возрастающим и отображение F_0 конечно, то отображение F неразложимо в нуле тогда и только тогда, когда отображение F_0 неразложимо в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Неразложимость отображения F_0 в нуле следует из неразложимости в нуле отображения F в силу неравенства $F_0(x) \leqq F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^q_+$.

Достаточность. Пусть отображение $F_0(x) = (f_i^0(x))$ неразложимо в нуле.

Если отображение F разложимо в нуле, то $\varnothing \neq I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F(\bar{x}))$ для некоторого вектора $\bar{x} \geq 0$, т. е. имеет место равенство $f_i(\bar{x}) = 0\ \forall i \in I^0(\bar{x})$. Отсюда в силу монотонности функций $f_i(x)$ следует, что $f_i(\alpha\bar{x}) = 0\ \forall i \in I^0(\bar{x}),\ \alpha \in [0,1]$. Поэтому с учетом определения (4) получаем $f_i^0(\bar{x}) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} f_i(\alpha\bar{x}) = 0\ \forall i \in I^0(\bar{x})$, т. е. $I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F^0(\bar{x}))$, и отображение F_0 разложимо в нуле. Полученное противоречие доказывает неразложимость в нуле отображения F.

Теорема доказана.

В общем случае проверка примитивности отображения в нуле довольно затруднительна, но для сепарабельного отображения удается свести анализ примитивности в нуле к анализу (значительно более простому и конструктивному) примитивности некоторой матрицы. Заметим, что отображение F_0 для субоднородного отображения F может иметь несобственные компоненты. Этот случай в следующем утверждении исключается.

Теорема 4. *Верны следующие утверждения*:

1) *Если отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ является субоднородным и возрастающим, то отображение F примитивно в нуле тогда и только тогда, когда отображение F_0 примитивно в нуле.*

2) *Сепарабельное возрастающее субоднородное отображение F примитивно в нуле тогда и только тогда, когда примитивна матрица $A_F = [f_{i,j}(1)],\ i,j \in \overline{1,q}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если отображение F примитивно в нуле, то в силу неравенства $F_0 x) \leqq F(x)$ вытекает примитивность отображения F_0 в нуле.

Пусть теперь отображение F_0 примитивно в нуле и $x \geq 0$ — некоторый фиксированный вектор. В силу примитивности отображения F в нуле существует такое натуральное число k, что $a = (F_0)^k(x) > 0$. Отображение F^k также субоднородно, и для него справедливы [2] условие (3) и равенство $(F^k)_0 = (F_0)^k$. Поэтому для сколь угодно малого вектора $e \in (0, a)$ с координатами $e_i = \varepsilon > 0$, $i \in \overline{1, q}$, существует такое достаточно малое число α, что

$$\alpha^{-1} F^k(\alpha x) > (F^k)_0(x) - e = (F_0)^k(x) - e = a - e > 0.$$

Можно считать $\alpha \in (0, 1)$, и отсюда в силу монотонности отображения F^k получаем: $F^k(x) \geqq F^k(\alpha x) > \alpha(a - e) > 0$, т. е. отображение F также примитивно в нуле. Первая часть утверждения доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда отображение F сепарабельно. Обозначим $F^k(x) = (f_i^k(x))$. Зафиксируем $x \geq 0$, $i \in \overline{1, q}$ и покажем, что справедливо следующее утверждение:

$$f_i^k(x) > 0 \Leftrightarrow [(A_F)^k x]_i > 0, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{15}$$

Докажем это утверждение, используя математическую индукцию. Введем множества $I_\ell^+ = I^+(F^\ell(x))$, $I_\ell^0 = I^0(F^\ell(x))$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Используя лемму, получаем следующую цепочку неравенств:

$$f_i(x) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^0} f_{i,j}(x_j) + \sum_{j \in I_0^+} f_{i,j}(x_j) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^+} f_{i,j}(x_j) > 0$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I_0^+ \colon f_{i,j}(x_j) \neq 0 \Leftrightarrow \exists j \in I_0^+ \colon a_{i,j}^F > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^+} a_{i,j}^F x_j > 0 \Leftrightarrow [A_F x]_i > 0.$$

Это означает, что при $k = 1$ свойство (15) выполнено.

Предположив, что свойство (15) справедливо для $k = \ell$, докажем его для $k = \ell + 1$. Принимая в силу предположения индукции $I_\ell^+ = \{j \in \overline{1, q} \colon [\ (A_F)^\ell x]_j > 0\}$, получаем

$$f_i^{\ell+1}(x) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(f_j^\ell(x)) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_\ell^+} f_{i,j}\ (f_j^\ell(x)) > 0 \Leftrightarrow \exists j \in I_\ell^+ \colon f_{i,j}(x_j) \not\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I_\ell^+ \colon a_{i,j}^F > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_\ell^+} a_{i,j}^F [(A_F)^\ell x]_j > 0 \Leftrightarrow [(A_F)^{\ell+1} x]_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}^F [(A_F)^\ell x]_j > 0,$$

что и требовалось.

Таким образом, свойство (15) доказано. Поэтому из примитивности матрицы A_F, означающей положительность матрицы $(A_F)^k$ при некотором $k = 1, 2, \dots$ следует примитивность отображения F в нуле.

Обратно, если отображение F примитивно в нуле, то для вектора a_i, имеющего единственный ненулевой элемент — единицу на i-м месте, при некотором k_i выполнено неравенство $F^{k_i}(a_i) > 0$, $i \in \overline{1, q}$. Но тогда в силу (15) матрица $(A_F)^k$, где $k = \max\{k_i \colon i \in \overline{1, q}\}$, положительна.

Теорема доказана.

Поскольку положительно однородное первой степени отображение в принятой здесь терминологии является субоднородным, то все результаты, полученные для субоднородных отображений, справедливы и для положительно однородных первой степени отображений.

3. Заключение

В работе анализируется ослабление классического понятия неразложимости — понятие неразложимости в нуле, в случае линейного отображения совпадающее с классическим. Показано совпадение этих свойств также для некоторых классов нелинейных отображений. Изучены некоторые свойства неразложимых в нуле субоднородных отображений. Анализ наличия свойства неразложимости и примитивности в нуле субоднородного отображения сведен к соответствующему анализу для некоторого положительно однородного отображения, а в случае сепарабельности исходного отображения — к существенно более простому и конструктивному анализу наличия этих свойств у некоторой матрицы. Результаты данной статьи применимы к анализу свойств итераций субоднородных монотонных отображений при более слабых предположениях типа неразложимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 518 с.
2. **Смирнов А. И.** Квазивогнутые отображения в некоторых моделях эволюционирующих систем: дис. … канд. физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1983. 136 с.
3. **Lemmens B., Nussbaum R. D.** Nonlinear Perron — Frobenius theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. Vol. 189. 323 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 189).
4. **Krause U.** Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications. Berlin etc.: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 363 p.
5. **Pallaschke D., Rolewicz S.** Foundation of mathematical optimization. Convex analysis without linearity. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. 582 p. (Math. Appl.; vol. 388.)
6. **Zhao X.-Q.** Dynamical systems in population biology. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 276 p.
7. **Смирнов А. И.** О некоторых ослаблениях понятия неразложимости // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 3. С. 26–30.
8. **Lemmens B., Roelands M.** Unique geodesics for Thompson's metric // Ann. Institut Fourier. 2015. Vol. 65, no. 1. P. 315–348.
9. **Смирнов А.И.** Субоднородные отображения в теории монотонных динамических систем // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 1. С. 68–80.
10. **Опойцев В. И.** Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. 245 с.
11. **Cobzas S., Rus M.-D.** Normal cones and Thompson metric // Topics in Mathematical Analysis and Applications / eds. T. M. Rassias, L. Tóth. 2014. P. 209–258. (Springer Optim. Appl.; vol. 94.)

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: mazurov@imm.uran.ru

Поступила 17.05.2016

Смирнов Александр Иванович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: smirnov@imm.uran.ru