

УДК 517.977.5, 519.86

НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ О МОДЕЛИ РЭМЗИ¹**А. А. Красовский, П. Д. Лебедев, А. М. Тарасьев**

Уравнение Рэмзи, моделирующее динамику капитала, в случае производственной функции Кобба — Дугласа сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой Бернулли. Это уравнение используется в задаче оптимального роста с логарифмическими предпочтениями. В работе решается соответствующая задача оптимального управления с бесконечным горизонтом времени. Рассматривается векторное поле гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина с учетом ограничений на управление. Доказано существование двух альтернативных установившихся состояний в зависимости от ограничений. Этот результат дополняет анализ модели в рамках теории оптимального управления.

Ключевые слова: математическое моделирование, задача оптимального роста, принцип максимума Понтрягина, установившиеся состояния.

A. A. Krasovskii, P. D. Lebedev, A. M. Tarasyev. Some facts about the Ramsey model.

In modeling the dynamics of capital, the Ramsey equation coupled with the Cobb—Douglas production function is reduced to a linear differential equation by means of the Bernoulli substitution. This equation is used in the optimal growth problem with logarithmic preferences. The study deals with solving the corresponding infinite horizon optimal control problem. We consider a vector field of the Hamiltonian system in the Pontryagin maximum principle, taking into account control constraints. We prove the existence of two alternative steady states, depending on the constraints. This result enriches our understanding of the model analysis in the optimal control framework.

Keywords: mathematical modeling, optimal growth problem, Pontryagin maximum principle, steady states.

MSC: 91B62, 49J15, 37C10**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-3-160-168**Введение**

В работе рассматривается модель неоклассического роста, опирающаяся на уравнение Рэмзи² [1], и поэтому также известная как модель Рэмзи [2]. Формализованная в модели задача оптимального роста стимулирует современные исследования, посвященные новым формулировкам принципа максимума Понтрягина [3] для класса задач с бесконечным горизонтом [4]. В стандартной постановке задачи, восходящей к модели Солоу [5], нелинейное уравнение Рэмзи сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой Бернулли [6]. Работа посвящена решению задачи при ограничениях на управление. Дается характеристика векторного поля гамильтоновой системы для допустимых режимов управления. Она выявляет установившиеся состояния, в которых выполняются необходимые условия оптимальности, и определяет поведение сопряженной переменной в принципе максимума Понтрягина. Основным результатом связан со случаем жестких ограничений на управление, который выявляет дополнительное установившееся состояние. Оно отличается от установившегося состояния, стандартно рассматриваемого в литературе. Обоснование этого случая, который дополняет анализ модели в рамках теории оптимального управления, является целью данной публикации.

¹Постановка задачи и методы решения в части конструкций динамической оптимизации предложены А. М. Тарасьевым при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 14-18-00574). Анализ векторного поля гамильтоновой системы в рамках принципа максимума Понтрягина выполнен А. А. Красовским. Разработка программного комплекса и численное моделирование проведены П. Д. Лебедевым при поддержке РФФИ (проект 16-31-00356-мол_а).

²Передача фамилии на русский язык выполнена с опорой на правила транскрипции и фактическое произношение. В источниках иногда встречаются искаженные написания, например, Рамсей.

1. Задача оптимального роста

Рассматривается задача оптимального роста с функцией Кобба — Дугласа, технологическим изменением и логарифмическими предпочтениями [2]. Производство Y в каждый момент времени $t \geq 0$ зависит от производственных факторов. Эта зависимость задана формулой

$$Y(t) = Y[A(t), K(t), L(t)] = A(t)F[K(t), L(t)] = A(t)K^\alpha(t)L^{1-\alpha}(t), \quad \alpha \in (0, 1),$$

где F — производственная функция Кобба — Дугласа, $A > 0$ — экзогенный фактор технологического развития [5], $L > 0$ — рабочая сила (труд), $K > 0$ — капитал. Постоянная α обозначает эластичность капитала. Динамика капитала описывается уравнением Рэмзи

$$\dot{K} = sY(A, K, L) - \mu K, \quad K(t_0) = K^0 > 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\mu > 0$ — постоянный коэффициент амортизации капитала, $s(t)$ — доля текущего производства, которая сберегается и инвестируется в рост капитала и удовлетворяет ограничениям $s \in [0, g]$, $0 < g < 1$, где g — заданная граница инвестиций. Предполагается, что инвестиционный процесс, подчиненный динамике (1.1), начинается в момент времени t_0 со стартового капитала K^0 . В работе следуем стандартному предположению об экспоненциальном росте рабочей силы:

$$\dot{L} = nL, \quad L(t_0) = L^0,$$

с постоянным темпом $n \geq 0$ и начальным уровнем трудовых ресурсов $L^0 > 0$.

1.1. Замена Бернулли в уравнении Рэмзи

Замена Бернулли

$$x = \frac{1}{A} \left(\frac{K}{L} \right)^{1-\alpha}$$

преобразует уравнение (1.1) к линейному виду

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где $u(t) = s(t)$ — управление; коэффициенты a и b вычисляются по формулам

$$a(t) = -(1-\alpha)\lambda - \frac{\dot{A}}{A}, \quad b = (1-\alpha) > 0, \quad \lambda = \mu + n. \quad (1.2)$$

В модели экономического роста полезность является функцией от потребления, C , которое вычисляется по формуле

$$C(t) = (1 - s(t))Y(t).$$

Будем рассматривать логарифмическую полезность

$$U(C(t)) = \beta(t) + \gamma \ln x(t) + \ln(1 - s(t)), \quad \beta(t) = \frac{\ln A(t)}{(1-\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}. \quad (1.3)$$

В задаче динамической оптимизации инвестиций требуется максимизировать дисконтированный индекс потребления на бесконечном горизонте времени:

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} U(C(t))e^{-\delta t} dt,$$

где $\delta > 0$ — коэффициент дисконтирования.

1.2. Задача оптимального управления

Рассмотрим случай, когда экзогенная динамика технологического роста задана согласно модели Солоу линейным уравнением

$$\dot{A} = rA, \quad A(t_0) = A^0.$$

Здесь $r \geq 0$ — постоянный темп роста, $A^0 > 0$ — начальный уровень технологии. В этом случае коэффициент a (1.2) является постоянным:

$$a(t) = a = -(1 - \alpha)\lambda - r < 0.$$

Экзогенный рост $A(t)$, входящий в параметр $\beta(t)$ (в формуле (1.3)) не участвует в оптимизации.

З а д а ч а 1. Управляемый объект x начинает движение из начального положения $x(t_0) = x_0$. Его состояние описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где $a < 0$, $b > 0$ и $0 < g < 1$ — заданные постоянные. Требуется среди допустимых управлений $u \in [0, g]$ найти оптимальное управления u^0 , которое максимизирует функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{+\infty} (\gamma \ln x(t) + \ln(1 - u(t))) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max,$$

где $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ — заданные числа.

2. Анализ векторного поля гамильтоновой системы

Под векторным полем будем понимать векторное поле скоростей переменной x и сопряженной переменной ψ . После стандартных замен [7] гамильтониан в принципе максимума представляется в следующем виде:

$$H(x, \psi, u, t) = \gamma \ln x + \ln(1 - u) + \psi(ax + bu).$$

Максимум гамильтониана по u , определяемый уравнением

$$\frac{-1}{1 - u} + \psi b = 0,$$

доставляется управлением

$$u^0 = 1 - \frac{1}{b\psi}. \quad (2.1)$$

В силу вогнутости гамильтониана по переменной u определим максимизирующее управление с учетом ограничений $u \in [0, g]$ и формулы (2.1):

$$u^0(x, \psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_1, \\ 1 - \frac{1}{b\psi}, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_2, \\ g, & \text{если } (x, \psi) \in \mathcal{D}_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь области \mathcal{D}_i , $i = 1, 2, 3$, определены следующим образом:

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, \psi) : 0 < \psi \leq 1/b, x > 0\}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, \psi) : 1/b \leq \psi \leq \frac{1}{b(1-g)}, x > 0\}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(x, \psi) : \psi \geq \frac{1}{b(1-g)}, x > 0\}. \quad (2.5)$$

Как видим, замена Бернулли значительно упрощает вид линий переключения — они стали прямыми, параллельными оси x (ср. [8]). Следующая динамика сопряженной переменной принципа максимума

$$\dot{\psi} = \delta\psi - \frac{\partial H}{\partial x} = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} \quad (2.6)$$

— справедлива для всех областей $\mathcal{D}_i, i = 1, 2, 3$. Знак скорости сопряженной переменной ψ (2.6) определяется кривой

$$\Psi(x) = \frac{\gamma}{(\delta - a)x}. \quad (2.7)$$

С учетом $a < 0, \gamma > 0, \delta > 0$ функция $\Psi(x)$ монотонно убывает с ростом x . Выполняются условия

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &< 0 && \text{при } \psi(x) < \Psi(x), \\ \dot{\psi} &= 0 && \text{при } \psi(x) = \Psi(x), \\ \dot{\psi} &> 0 && \text{при } \psi(x) > \Psi(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ниже будем рассматривать гамильтонову систему

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + bu^0, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} \end{cases} \quad (2.9)$$

для различных режимов управления u^0 (2.2). При этом будем интересоваться направлением скоростей переменной x в каждой из областей (2.3)–(2.5).

Существенным фактором нашего анализа является то, что оптимальная траектория (x^0, ψ^0) должна удовлетворять следующему условию трансверсальности на бесконечности [7]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^0(t)\psi^0(t)e^{-\delta t} = 0. \quad (2.10)$$

Гамильтонова система в области нулевого управления \mathcal{D}_1 . В области \mathcal{D}_1 (2.3) гамильтонова система (2.9) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (2.11)$$

В области \mathcal{D}_1

$$\dot{x} < 0. \quad (2.12)$$

Гамильтонова система в области установившегося состояния \mathcal{D}_2 . Гамильтонова система (2.9) в области \mathcal{D}_2 (2.4) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + b - \frac{1}{\psi}, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Определив функцию

$$X(\psi) = \frac{1 - b\psi}{a\psi}, \quad \psi \in \mathcal{D}_2, \quad (2.14)$$

получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 && \text{при } x(\psi) < X(\psi), \\ \dot{x} &= 0 && \text{при } x(\psi) = X(\psi), \\ \dot{x} &< 0 && \text{при } x(\psi) > X(\psi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Гамильтонова система в области интенсивного управления \mathcal{D}_3 . В области \mathcal{D}_3 (2.5) гамильтонова система (2.9) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + bg, \\ \dot{\psi} &= (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Таким образом, в области \mathcal{D}_3 имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &> 0 && \text{при } 0 \leq x \leq -gb/a, \\ \dot{x} &= 0 && \text{при } x = -gb/a, \\ \dot{x} &< 0 && \text{при } x \geq -gb/a. \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Установившиеся состояния в зависимости от ограничений на управление

Условия (2.8), (2.12), (2.15), (2.17) характеризуют векторное поле гамильтоновой системы с учетом всех режимов управления.

О п р е д е л е н и е. Установившееся состояние гамильтоновой системы (2.9) есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} ax + bu^0(x, \psi) = 0, \\ (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где режимы управления $u^0(x, \psi)$ определены соотношением (2.2).

Исходя из нашего анализа, видим, что уравнения, входящие в систему (3.1), выполняются на линиях Ψ (2.7), X (2.14) в области \mathcal{D}_2 (2.3), а также в области \mathcal{D}_3 (2.5) на следующей линии (см. (2.17)):

$$Z = \{(x, \psi) \in \mathcal{D}_3: x = -ga/b\}. \quad (3.2)$$

Теорема. Существует два альтернативных установившихся состояния гамильтоновой системы (2.9), обусловленные ограничениями $u \in [0, g]$ в задаче 1.

1. Если

$$0 < g \leq \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad (3.3)$$

то существует единственное установившееся состояние в области \mathcal{D}_3 (2.5):

$$x_S^* = -g\frac{b}{a}, \quad \psi_S^* = \frac{-\gamma a}{gb(\delta - a)}. \quad (3.4)$$

2. Если

$$\frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma} \leq g < 1, \quad (3.5)$$

то существует единственное установившееся состояние в области \mathcal{D}_2 (2.4):

$$x^* = \frac{b\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad \psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)}. \quad (3.6)$$

Каждое из этих установившихся состояний является точкой покоя седлового типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условиям задачи 1: $a < 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $g \in (0, 1)$. Заметим, что выполняются неравенства

$$0 < \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma} < 1.$$

Найдем установившиеся состояния гамильтоновой системы (2.9), удовлетворяющее определению. Приравняв правые части (2.13) к нулю, получаем установившееся состояние (3.6) в области \mathcal{D}_2 , геометрически соответствующее единственно возможному пересечению линий X (2.14) и Ψ (2.7). Определение области \mathcal{D}_2 (2.4) включает в себя параметр g . Для того чтобы установившееся состояние (x^*, ψ^*) существовало в области \mathcal{D}_2 , должны выполняться условия

$$\frac{1}{b} \leq \psi^* \leq \frac{1}{b(1-g)}. \quad (3.7)$$

Неравенство слева выполняется автоматически:

$$\psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)} > \frac{\delta - a}{b(\delta - a)} = \frac{1}{b}.$$

Подставив в правое неравенство в (3.7) выражение для ψ^* (3.6), получаем неравенство относительно параметра g , которое есть в точности (3.5). При этом управление в установившемся состоянии (x^*, ψ^*) определяется выражением

$$u^* = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma},$$

которое удовлетворяет ограничениям $0 < u^* \leq g$ (см. (3.5)).

Исходя из анализа, приведенного выше, установившееся состояние (3.4) задаем возможным пересечением линий Z (3.2) и Ψ (2.7) в области \mathcal{D}_3 (2.5). Для того чтобы пересечение (x_S^*, ψ_S^*) существовало, должно выполняться следующее условие:

$$\psi_S^* \geq \frac{1}{b(1-g)}. \quad (3.8)$$

Подставив в (3.8) выражение (3.4), приходим к неравенству (3.3). В точке (x_S^*, ψ_S^*) управление является граничным $u_S^* = g$ (2.2).

В случае равенства в (3.5), (3.3)

$$g = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma},$$

установившиеся состояния совпадают: $x^* = x_S^*$, $\psi^* = \psi_S^*$.

Напомним, что установившегося состояния гамильтоновой системы (2.9) в области \mathcal{D}_1 (2.3) не существует (2.11), (2.12). Итак, мы доказали единственность каждого из двух альтернативных установившихся состояний.

Матрица Якоби гамильтоновой системы (2.13), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (3.6), определяется выражением

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}(x^*, \psi^*) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\psi^{*2}} \\ \frac{\gamma}{x^{*2}} & (\delta - a) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа вычисляются по формуле

$$\xi_{0,\Pi} = 0.5 \left(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a) + \frac{(\delta - a)^2}{\gamma^2}} \right).$$

С учетом $a < 0$ и $\delta > 0$ получаем

$$\xi_0 < 0, \quad \xi_\Pi > 0.$$

Собственные числа — действительные и противоположных знаков, что свидетельствует о седловом типе установившегося состояния (x^*, ψ^*) . Устойчивым является направление собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу ξ_0 (см. [9]).

Матрица Якоби гамильтоновой системы (2.16), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (3.4), задается выражением

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_3}(x_S^*, \psi_S^*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{\gamma a^2}{g^2 b^2} & (\delta - a) \end{pmatrix}.$$

Решение характеристического уравнения определяется формулой

$$\sigma_{0, \Pi} = 0.5(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a)}).$$

Здесь собственные числа — также действительные и противоположных знаков:

$$\sigma_0 < 0, \quad \sigma_{\Pi} > 0,$$

что указывает на седловой характер установившегося состояния (x_S^*, ψ_S^*) .

З а м е ч а н и е 1. Случай 2 с ограничениями (3.5) стандартно рассматривается в литературе. Например, в [7], где $g = 1 - \varepsilon$, авторы предполагают малость параметра $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [7, с. 138]). В результате этого предположения они получают единственное установившееся состояние гамильтоновой системы (см. [7, с. 143]). Тем не менее случай достаточно большого ε , т. е. (3.3), рассмотренный здесь, также представляет интерес и дополняет анализ модели.

4. Пример

Из приведенного выше анализа следует, что существует две качественные картины, изображающие векторное поле гамильтоновой системы. Они связаны с ограничениями на управление g (3.5), (3.3).

Случай стандартных ограничений на управление. На рис. 1 изображен случай векторного поля с установившимся состоянием в области \mathcal{D}_2 (2.4). Он соответствует ситуации, когда ограничения на управления достаточно велики (3.5). Такой случай является стандартным.

Из рис. 1 видно, что условие трансверсальности на бесконечности (2.10) выполняется только в точке покоя (x^*, ψ^*) (3.6). Таким образом, для начального положения $x(t_0)$ требуется найти такое значение $\psi(t_0)$, чтобы решение гамильтоновой системы, стартующее из этой точки, сходилось к установившемуся состоянию на бесконечности.

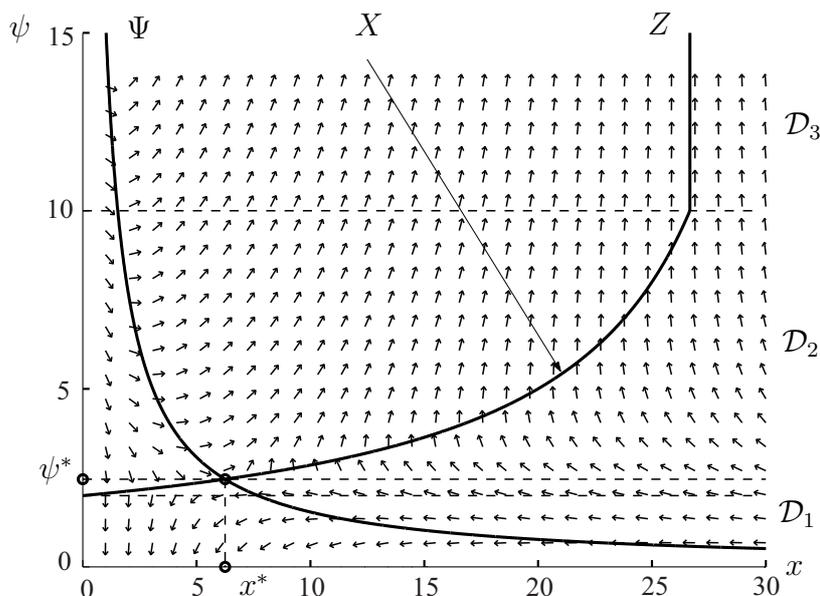


Рис. 1. Векторное поле гамильтоновой системы (2.9) в случае стандартных ограничений на управление (3.5). Обозначения жирных линий: Z (3.2), X (2.14), Ψ (2.7). Стрелки указывают направление вектора $(\dot{x}, \dot{\psi})$ в точке (x, ψ) . Установившееся состояние $(x^*, \psi^*) = (6.25, 2.46)$ (3.6) принадлежит области \mathcal{D}_2 (2.4). Векторное поле построено для следующих параметров: $a = -0.015$, $b = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.05$, $g = 0.8$.

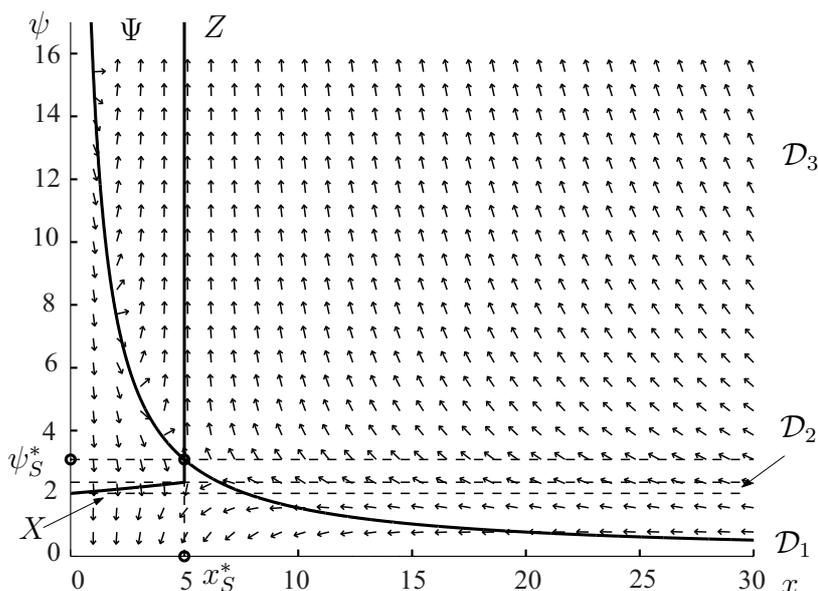


Рис. 2. Векторное поле гамильтоновой системы в случае жестких ограничений (3.3). Обозначения линий: Z (3.2), X (2.14), Ψ (2.7). Установившееся состояние $(x_S^*, \psi_S^*) = (5, 3.077)$ принадлежит области \mathcal{D}_3 (2.5). Векторное поле построено для следующих параметров: $a = -0.015$, $b = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.05$, $g = 0.15$.

Случай жестких ограничений на управление. На рис. 2 построено векторное поле для случая установившегося состояния в области \mathcal{D}_3 (2.5). Назовем ситуацию, когда ограничения на управление малы, случаем жестких ограничений на инвестиции. В этом случае оптимальная траектория должна сходиться в точку покоя (x_S^*, ψ_S^*) .

Если $x(t_0) \leq x_S^*$, то оптимальная траектория всегда принадлежит области \mathcal{D}_3 . Это, в свою очередь, означает, что оптимальное управление является постоянным: $u^0(t) = g$. В этом случае решение $x^0(t)$ можно записать, применив формулу Коши для решения линейного дифференциального уравнения (2.16):

$$x^0(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t bge^{a(t-\tau)} d\tau = \left(x(t_0) + \frac{bg}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{bg}{a}.$$

В силу $a < 0$ и (3.4) имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^0(t) = -\frac{bg}{a} = x_S^*.$$

З а м е ч а н и е 2. Случай, когда траектория полностью принадлежит области \mathcal{D}_3 и решение задается постоянным управлением, отсылает нас к истокам теории экономического роста. Именно постоянное заданное экзогенно управление рассматривал Роберт Солоу в своей модели, использующей уравнение Рэмзи (см., например, [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ramsey F. P.** A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. Vol. 38, no. 152. P. 543–559.
2. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 393 с.

4. **Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 2 (404). С. 3–64.
5. **Solow R. M.** Technical change and the aggregate production function // Rev. Econ. Stat. 1957. Vol. 39, no. 3. P. 312–320.
6. **Smith W. T.** A closed form solution to the Ramsey model // Contrib. Macroecon. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 1–27.
7. **Асеев С. М., Кряжимский А. В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. № 257. С. 3–271.
8. **Красовский А. А., Тарасьев А. М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. № 262. С. 127–145.
9. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Красовский Андрей Андреевич

Поступила 09.04.2016

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия

e-mail: krasov@iiasa.ac.at

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

Тарасьев Александр Михайлович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Институт экономики УрО РАН

e-mail: tam@imm.uran.ru