

УДК 519.161

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ ВЕРШИННОГО ПОКРЫТИЯ В КЛАССЕ ПЛАНАРНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ<sup>1</sup>

К. С. Кобылкин

В работе исследуется вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе простых планарных графов (планарных триангуляций), допускающих плоское представление, имеющее только треугольные грани. Показывается NP-трудность задачи в сильном смысле в классе 4-связных планарных триангуляций со степенями всех вершин порядка  $O(\log n)$ , где  $n$  — число вершин, а также в классе плоских 4-связных триангуляций Делоне, основанных на треугольном расстоянии Минковского. Смежность пары вершин в такой триангуляции имеет место тогда и только тогда, когда для некоторых  $p \in \mathbb{R}^2$  и  $\lambda > 0$  найдется равносторонний треугольник  $\nabla(p, \lambda)$ , не содержащий внутри себя вершин триангуляции и имеющий границу, которая включает эту пару вершин и только ее, где  $\nabla(p, \lambda) = p + \lambda \nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = p + \lambda a, a \in \nabla\}$ ,  $\nabla$  — равносторонний треугольник с единичными сторонами, имеющий 0 в качестве барицентра, при этом одна из вершин  $\nabla$  лежит на отрицательной  $y$ -оси.

Ключевые слова: вычислительная сложность, триангуляция Делоне, TD-триангуляция Делоне.

K. S. Kobylkin. Computational complexity of the vertex cover problem in the class of planar triangulations.

We study the computational complexity of the vertex cover problem in the class of planar graphs (planar triangulations) admitting a planar representation whose faces are triangles. It is shown that the problem is strongly NP-hard in the class of 4-connected planar triangulations in which the degrees of all vertices are of order  $O(\log n)$ , where  $n$  is the number of vertices, and in the class of planar 4-connected Delaunay triangulations based on the Minkowski triangular distance. A pair of vertices in such a triangulation is adjacent if and only if there is an equilateral triangle  $\nabla(p, \lambda)$  with  $p \in \mathbb{R}^2$  and  $\lambda > 0$  whose interior does not contain triangulation vertices and whose boundary contains this pair of vertices and only it, where  $\nabla(p, \lambda) = p + \lambda \nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = p + \lambda a, a \in \nabla\}$ ; here,  $\nabla$  is the equilateral triangle with unit sides such that its barycenter is the origin and one of the vertices belongs to the negative  $y$ -axis.

Keywords: computational complexity, Delaunay triangulation, Delaunay TD-triangulation.

MSC: 68Q25, 05C10, 05C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-153-159

### 1. Введение

Вычислительная сложность классических задач о вершинном покрытии и максимальном независимом множестве в заданном графе является объектом интенсивных исследований [2; 5; 15] ввиду приложений этих задач в компьютерном зрении, анализе сетей, кодировании, картографии и других областях. Доказательства результатов об NP-трудности и полиномиальной разрешимости этих двух взаимосвязанных задач для различных классов графов активно используют аппарат теории паросочетаний, древесных декомпозиций, декомпозиций на основе кликовых сепараторов, а также другие интересные техники из теории графов. В данной работе задача о вершинном покрытии графа исследуется в ее классической постановке:

**З а д а ч а** VERTEX COVER (VC). Для заданного графа  $G = (V, E)$  требуется найти такое подмножество  $V' \subseteq V$  наименьшей мощности, что  $V' \cap e \neq \emptyset$  для всякого  $e = \{u, v\} \in E$ , где  $V$  и  $E$  обозначают множества вершин и ребер  $G$  соответственно.

Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия нами изучается в специальном классе простых (т. е. без петель и кратных ребер) планарных графов, которые в литературе

<sup>1</sup>Исследования поддержаны грантом Российского научного фонда, проект 14-11-00109.

принято называть *планарными триангуляциями*. Этот класс состоит из планарных графов, допускающих такую укладку на плоскости без пересечений ребер, что всякая *грань* этой укладки, определяемая набором ребер, ограничивающим некоторую открытую (в  $\mathbb{R}^2$ ) область без ребер и вершин, является в общем случае криволинейным треугольником за исключением быть может грани, отвечающей неограниченной области в  $\mathbb{R}^2$ , называемой далее *внешней* гранью. Сложность задачи вершинного покрытия нами также изучается в специальных классах геометрических триангуляций, точнее, в классах евклидовых и обобщенных триангуляций Делоне. Пусть  $t > 0$ . Взвешенный граф с множеством вершин, лежащим в  $\mathbb{R}^2$ , веса ребер которого совпадают с евклидовыми расстояниями между их концевыми точками, а длина кратчайшего пути в графе между любой парой вершин отличается не более, чем в  $t$  раз от евклидова расстояния между этой парой вершин, называется *геометрическим  $t$ -спаннером* [17]. Геометрические  $t$ -спаннеры возникают в приложениях в качестве графовых моделей уличных сетей. Так, задача вершинного покрытия может быть сформулирована следующим образом: расставить на перекрестках улиц минимальное число видеокамер таким образом, чтобы всякий участок любой улицы, заключенный между соседними перекрестками, попадал бы в область действия хотя бы одной из камер. Выяснение сложностного статуса задачи VC в классах триангуляций Делоне и рассматриваемых в работе обобщенных триангуляций Делоне представляет интерес, поскольку эти триангуляции являются  $t$ -спаннерами при  $t = (4\pi\sqrt{3})/9$  и  $t = 2$  соответственно.

Более формально, задача VC будет нами рассматриваться в классе связных *плоских* графов вида  $G = (V, E, F)$ : под *плоским* графом понимается простой планарный граф вместе с некоторой своей укладкой на плоскости без пересечений ребер, где  $V \subset \mathbb{R}^2$ , ребра из  $E$  суть прямолинейные отрезки, при этом  $F$  состоит из граней  $G$ . Точнее, будет предполагаться, что  $G$  является либо простой планарной (плоской) триангуляцией, либо триангуляцией Делоне или ее обобщением. Определим два типа триангуляций Делоне, рассматриваемых в работе. Пусть задано множество  $S$  из  $n$  точек в общем положении на плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Назовем плоский граф  $G = (V, E, F)$  *триангуляцией Делоне*, если  $V = S$  и  $e = \{u, v\} \in E$  тогда и только тогда, когда найдется такой круг  $d(u, v)$ , что  $u, v \in \text{bd } d(u, v)^2$  и  $\text{int } d(u, v) \cap S = \emptyset^3$ .

Положим  $\nabla(p, \lambda) = p + \lambda\nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = p + \lambda a, a \in \nabla\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\nabla$  — ориентированный равносторонний треугольник с единичными сторонами, имеющий 0 в качестве барицентра, при этом одна из вершин  $\nabla$  лежит на отрицательной  $y$ -оси. Предположим, что точки множества  $S$  находятся в общем положении и прямая, проходящая через всякую пару точек в  $S$ , не образует с горизонталью угол  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . Плоский граф  $G = (V, E, F)$ , в котором  $V = S$ , называется *TD-триангуляцией Делоне*, если  $e = \{u, v\} \in E$  тогда и только тогда, когда существуют такие  $p \in \mathbb{R}^2$  и  $\lambda > 0$ , что  $u, v \in \text{bd } \nabla(p, \lambda)$  и  $\text{int } \nabla(p, \lambda) \cap S = \emptyset$ .

Если рассмотреть более общую ситуацию, когда  $G$  — произвольный планарный (или плоский) граф, вычислительная сложность задачи VC оказывается хорошо изученной. NP-трудность задачи VC известна в классе 2-связных 3-регулярных планарных графов [16], а также в классе 3-регулярных планарных гамильтоновых графов [12]. Наиболее близким к рассматриваемым в работе результатам является результат работы [7] об NP-трудности задачи VC в классе графов, полученных после конечного числа стелляций 3-связных 3-регулярных планарных графов, где отдельная стелляция состоит из серии элементарных стелляций (примененных к реберно непересекающимся граням), которые, в свою очередь, представляют собой добавление вершины внутрь грани с последующим ее соединением ребрами с вершинами этой грани. Графы, получаемые в [7] в результате стелляций, вообще говоря, не являются планарными триангуляциями.

Насколько нам известно, единственным классом триангуляций Делоне, для которого задача VC полиномиально разрешима, является (с учетом результата работы [9]) класс триангуляций Делоне, изоморфных произвольным 2-связным внешнепланарным триангуляциями.

<sup>2</sup>bd  $T$  обозначает множество граничных точек множества  $T$ .

<sup>3</sup>int  $T$  состоит из внутренних точек множества  $T$ .

Сложностной статус задачи VC в широком классе триангуляций Делоне и их обобщений остается неясным, несмотря на серию работ [3; 10; 18], изучающих теоретико-графовые свойства таких триангуляций. Нами, в частности, дается ответ на вопрос о сложности задачи VC в классе TD-триангуляций Делоне.

В данной работе показывается NP-трудность задачи VC в сильном смысле в классе 4-связных планарных триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань (подкласс максимальных планарных графов) и степень всех вершин, не превосходящую  $\log n + 9$ , где  $n$  — число вершин триангуляции. В отличие от перечисленных выше сложностных результатов, в нашем случае рассматриваемый класс состоит из планарных графов, имеющих максимальное число ребер, примерно вдвое большее, чем у 3-регулярных планарных графов. В [10] показано, что 4-связные планарные триангуляции с треугольной внешней гранью изоморфны (в обычном графовом смысле) триангуляциям Делоне, при этом, однако, данное в [10] построение изоморфной триангуляции Делоне неконструктивно. Тем не менее нам удается получить результат об NP-трудности задачи VC в сильном смысле в классе 4-связных TD-триангуляций Делоне, применяя известный факт о том, что всякая простая планарная триангуляция с треугольной внешней гранью допускает [6] укладку на плоскости в виде TD-триангуляции Делоне за полиномиальное время.

## 2. NP-трудность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций

В этом и следующем разделах будет установлена NP-трудность задачи VC в классе высокосвязных простых планарных и геометрических триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань. Для доказательства NP-трудности в классе планарных триангуляций нам понадобится результат [16] об NP-полноте задачи о максимальном независимом множестве граней в классе (возможно, содержащих кратные ребра) плоских триангуляций с треугольной внешней гранью. Здесь под плоской триангуляцией понимается плоская укладка планарной триангуляции (в общем случае включающей кратные ребра) без пересечений ребер, которые, в свою очередь, могут быть отрезками или кусочно-линейными ломаными. Подробнее, рассмотрим следующую задачу.

**З а д а ч а** MAXIMUM FACIAL INDEPENDENT SET (FACIAL MIS). Для заданной плоской (возможно, содержащей кратные ребра) триангуляции  $G = (V, E, F)$ , имеющей треугольник в качестве внешней грани, найти максимальное по мощности подмножество граней  $F' \subset F$  с условием, что всякая пара граней в  $F'$  не имеет общего ребра.

Задача FACIAL MIS получается из классической задачи о максимальном независимом множестве в простом 2-связном 3-регулярном плоском графе  $G_0 = (V_0, E_0, F_0)$ , если к вершинам, ребрам и граням  $G_0$  применить классическое преобразование геометрической двойственности [8]: вершинам из  $V_0$  соответствуют грани двойственного графа  $G$ , а граням из  $F_0$ , наоборот, отвечают вершины  $G$ ; ребрам из  $E_0$  при этом соответствуют ребра  $G$ .

Из доказательства [16, теорема 4.1] вытекает следующий результат.

**Теорема 1** (Мохар, 2001). *Задача FACIAL MIS (в форме проверки свойства) NP-полна в сильном смысле в некотором подклассе (возможно, содержащих кратные ребра) планарных триангуляций  $\mathcal{T}_0$ , имеющих треугольную внешнюю грань.*

Заметим, что для всякого графа  $G_0 \in \mathcal{T}_0$  можно с полиномиальными затратами времени и памяти построить изоморфный ему плоский граф (см. доказательство теоремы 4.1 в [16]).

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат работы.

**Теорема 2.** *Задача VC является NP-трудной в сильном смысле в классе простых 4-связных (гамильтоновых)<sup>4</sup> планарных триангуляций с треугольной внешней гранью, имею-*

<sup>4</sup>Гамильтоновость 4-связных планарных графов дана в [8, теорема 10.1.3].

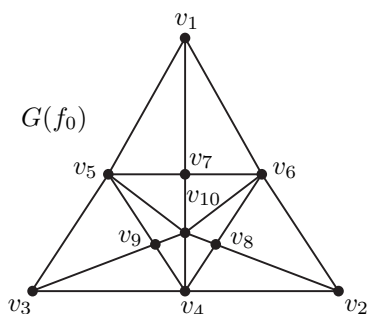


Рис. 1. Граф  $G(f_0)$ , соответствующий грани  $f_0$  графа  $G_0$ .

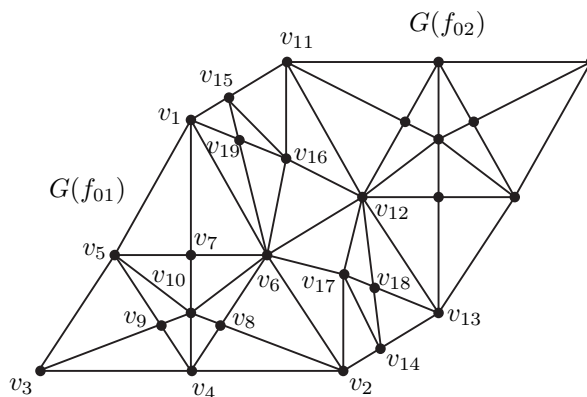


Рис. 2. Графы  $G(f_{01})$  и  $G(f_{02})$  вместе с соответствующим графом-коннектором  $G(e_0)$ .

ших степень всех вершин, не превосходящую  $\log n + 9$ , где  $n$  — число вершин в триангуляции.

**Доказательство.** Задача VC принадлежит к классу  $NP$  в рассматриваемом классе планарных триангуляций [1, теорема 3.3].

Покажем  $NP$ -полноту в сильном смысле задачи VC в заявленном классе 4-связных планарных триангуляций с ограниченной  $\log n + 9$  степенью вершин. Обозначим через  $\mathcal{T}$  класс всех простых плоских (3-связных) триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань. Доказательство проведем редукцией к задаче VC задачи FACIAL MIS, являющейся  $NP$ -полной в сильном смысле по теореме 1.

Для всякого плоского графа  $G_0 = (V_0, E_0, F_0) \in \mathcal{T}_0$  построим плоский граф  $G = (V, E, F) \in \mathcal{T}$  следующим образом. Заменим всякую грань  $f_0 = v_1(f_0)v_2(f_0)v_3(f_0) \in F_0 \setminus \{f_{0,\infty}\}$  графом  $G(f_0)$ , показанным на рис. 1 (обозначение грани  $f_0$  в обозначениях вершин графа  $G(f_0)$  будет в дальнейшем опускаться), где  $f_{0,\infty}$  — внешняя грань  $G_0$ . Легко убедиться в том, что минимальное вершинное покрытие графа  $G(f_0)$  не содержит вершину  $v_{10}$  и совпадает с  $U_{f_0} = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ . Это непосредственно следует из того факта, что всякий треугольник из тройки треугольников  $\Delta v_1v_5v_7$ ,  $\Delta v_2v_6v_8$  и  $\Delta v_3v_4v_9$  (см. рис. 1) требует для покрытия его ребер по крайней мере пару вершин. Рассматривая всевозможные случаи, мы приходим к тому, что  $|V'_{f_0}| \geq 7$  для любого вершинного покрытия  $V'_{f_0}$  графа  $G(f_0)$  в случае, когда  $v_{10} \in V'_{f_0}$ . Также нетрудно убедиться в том, что  $W_{f_0} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_{10}\}$  — вершинное покрытие  $G(f_0)$ .

Разместим внутри грани  $f_0$  графа  $G(f_0)$  таким образом, чтобы стороны, вообще говоря, криволинейного треугольника  $v_1v_2v_3$  были бы параллельны сторонам грани  $f_0$  (например, масштабированием на заданный рациональный множитель). Соединим графы  $G(f_{01})$  и  $G(f_{02})$ , отвечающие граням  $f_{01}$  и  $f_{02}$  из  $F_0 \setminus \{f_{0,\infty}\}$ , включаящим общее ребро  $e_0 \in E_0$ , используя граф-коннектор  $G(e_0)$ , как показано на рис. 2. Граф  $G(e_0)$  содержит пару общих ребер с каждым из двух графов  $G(f_{01})$  и  $G(f_{02})$ . Граф  $G(f_{0,\infty})$ , которому отвечает внешняя грань  $f_{0,\infty}$  триангуляции, изоморфен графу  $G(f_0)$  для любого  $f_0 \in F_0 \setminus \{f_{0,\infty}\}$ . Этот граф показан на рис. 3 вместе с соответствующими графами-коннекторами  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (графы  $G_i$  изображены схематично без некоторых ребер и вершин). Ребра графов  $G(f_0)$ ,  $f_0 \in F_0$  и  $G(e_0)$ ,  $e_0 \in E_0$  изображаются таким образом, чтобы ребра графов  $G(e_{01})$  и  $G(e_{02})$  пересекались бы лишь в их общих вершинах (если таковые существуют) для любых  $e_{01}$  и  $e_{02}$  из  $E_0$ .

Для любого  $v_0 \in V_0$  множество  $E_0(v_0) = \{e_0 \in E_0 : v_0 \in e_0\}$  определяет множество  $\mathcal{Q}(v_0) = \{G(e_0) : e_0 \in E_0(v_0)\}$  мощности  $\deg(v_0)$ , состоящее из графов-коннекторов, где  $\deg(v_0) = |E_0(v_0)|$ . Вершина  $v_0$  лежит внутри некоторого, вообще говоря, криволинейного простого  $2\deg(v_0)$ -угольника  $M(v_0)$ , ограниченного ребрами коннекторов из  $\mathcal{Q}(v_0)$  (см. рис. 4).

Пусть  $U(v_0) = \{u_1, \dots, u_{2\deg(v_0)}\}$  — упорядоченная по часовой стрелке последовательность вершин  $M(v_0)$ , где  $u_1$  совпадает с одной из вершин  $v_{14}$  или  $v_{15}$  одного из графов-коннекторов

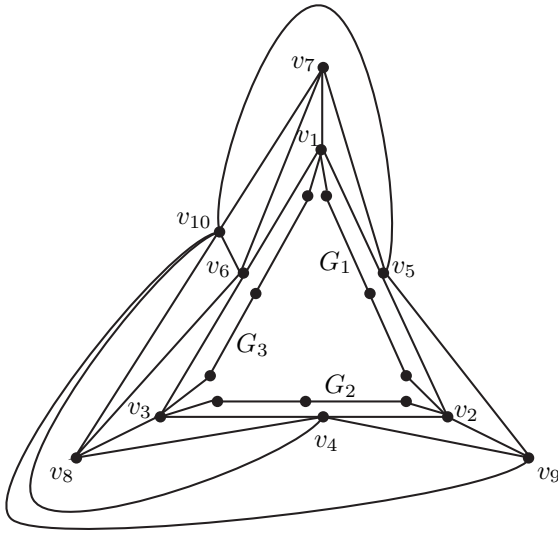


Рис. 3. Граф  $G(f_{0,\infty})$ , построенный для внешней грани графа  $G_0$ .

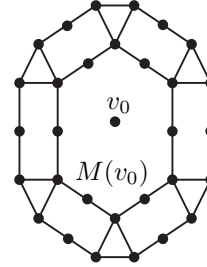


Рис. 4. Графы  $G(f_0)$  и графы-коннекторы  $G(e_0)$ , ограничивающие многоугольник  $M(v_0)$ .

из  $\mathcal{Q}(v_0)$ . Триангулируем  $M(v_0)$  следующим образом, обозначая полученный граф через  $G(v_0)$ : добавляем набор ребер  $\{u_1, u_3\}, \{u_3, u_5\}, \dots$ , затем набор ребер  $\{u_1, u_5\}, \{u_5, u_9\}, \dots$ , продолжая процесс до тех пор, пока  $M(v_0)$  не будет полностью триангулирован. Положим  $G := \bigcup_{f_0 \in F_0} G(f_0) \cup \bigcup_{v_0 \in V_0} G(v_0) \cup \bigcup_{e_0 \in E_0} G(e_0)$ . По построению графа  $G$  имеем, что  $|V| = 10|F_0| + 6|E_0|$ . Для любых  $f_0 \in F_0$  и  $e_0 \in E_0$  степень всякой вершины  $G(f_0)$  и любой отличной от  $v_{14}$  и  $v_{15}$  вершины  $G(e_0)$  ограничена сверху 9. В процессе триангуляции  $M(v_0)$  мощность добавляемого на каждом шаге набора ребер уменьшается по крайней мере вдвое, следовательно, степень вершин  $v_{14}$  и  $v_{15}$  ограничена сверху  $\log n + 5$ . Поскольку число графов-коннекторов равно  $|E_0|$ , то сложность построения графа  $G$  по графу  $G_0$  имеет порядок  $O(|F_0| + |E_0| \log |E_0|)$ . При этом общее число вершин, ребер и граней графа  $G$  имеет порядок  $O(|F_0| + |E_0|)$ . Кроме того, длина представления вершин графа  $G$  отличается в константное число раз от длины представления вершин графа  $G_0$ . Поскольку  $G$  — простой граф, являющийся плоской триангуляцией с треугольной внешней гранью (мы “разбили” все кратные ребра в  $G_0$ ), то  $G$  — 3-связен. Граф  $G$  не содержит ребер, соединяющих вершины графа  $G(f_0) \setminus G(e_0)$  с вершинами графа  $G(e_0) \setminus G(f_0)$ ; то же самое справедливо для графов  $G(f_0)$  и  $G(v_0)$ , а также для графов  $G(e_0)$  и  $G(v_0)$ . Для графов  $G(f_0)$ ,  $f_0 \in F_0$  и  $G(e_0)$ ,  $e_0 \in E_0$  легко убедиться в том, что любой их цикл длины 3 совпадает с некоторой их гранью. Треугольники, которые возникают в процессе триангуляции многоугольника  $M(v_0)$ , являются гранями по построению. Следовательно, всякий цикл длины 3 в графе  $G$  является его гранью. По [20, лемма 2.3] получаем, что  $G$  — 4-связен.

Покажем, что всякое независимое множество граней  $F'_0 \subset F_0$ , если  $|F'_0| \geq k$ , может быть преобразовано в вершинное покрытие  $V'$  графа  $G$ , где  $|V'| \leq 7|F_0| - k + 4|E_0|$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Положим  $V'_{f_0} := U_{f_0}$  для любого  $f_0 \in F'_0$ ; для всякого  $f_0 \in F_0 \setminus F'_0$  положим  $V'_{f_0} := W_{f_0}$ . Чтобы получить вершинное покрытие  $V'_{e_0}$  графа  $G(e_0)$ , соединяющего  $G(f_{01})$  и  $G(f_{02})$  для некоторых  $f_{01}, f_{02} \in F_0$ , выберем вершины  $v_{14}$  и  $v_{15}$ , а также по одной вершине в каждой паре  $\{v_{16}, v_{19}\}$  и  $\{v_{17}, v_{18}\}$ . Мы выбираем вершины в каждой такой паре в зависимости от выполнения включений  $f_{01} \in F'_0$  и  $f_{02} \in F'_0$ ; точнее, если  $f_{01} \in F'_0$  и  $f_{02} \notin F'_0$ , мы выбираем вершины  $v_{17}$  и  $v_{19}$ ; в случае, когда  $f_{01}, f_{02} \notin F'_0$ , выбор вершин в каждой из этих пар произволен. Очевидно,  $V' = \bigcup_{f_0 \in F_0} V'_{f_0} \cup \bigcup_{e_0 \in E_0} V'_{e_0}$  покрывает ребра графа  $G$  и  $|V'| \leq 7|F_0| - k + 4|E_0|$ .

Обратно, пусть  $V'$  — вершинное покрытие графа  $G$  минимальной мощности и  $|V'| \leq 7|F_0| - k + 4|E_0|$ . Положим  $V'_{f_0} = V' \cap V(f_0)$  для всякого  $f_0 \in F_0$ , где  $V(f_0)$  — множество вершин графа  $G(f_0)$ . По крайней мере пара вершин нужна для покрытия ребер, принадле-

жащих либо одновременно графам  $G(f_{01})$  и  $G(e_0)$ , либо одновременно графам  $G(f_{02})$  и  $G(e_0)$ , где  $e_0$  — общее ребро граней  $f_{01}$  и  $f_{02}$ . По крайней мере 4 вершины необходимы для покрытия ребер треугольников на множествах вершин  $V_1(e_0) = \{v_{15}, v_{16}, v_{19}\}$  и  $V_2(e_0) = \{v_{14}, v_{17}, v_{18}\}$ . Если  $|V' \cap V_1(e_0)| = 2$  или  $|V' \cap V_2(e_0)| = 2$ , то  $|V'_{f_{02}}| \geq 7$  в случае, когда  $|V'_{f_{01}}| = 6$ . Ввиду минимальности множества  $V'$  случай, когда одновременно  $|V' \cap V_1(e_0)| = |V' \cap V_2(e_0)| = 3$  и  $|V'_{f_{01}}| = |V'_{f_{02}}| = 6$ , невозможен. Следовательно, множество граней  $F'_0 = \{f \in F_0 : |V'_f| = 6\}$  является независимым. Поскольку  $|V' \cap (V_1(e_0) \cup V_2(e_0))| \geq 4$ , то  $6|F'_0| + 7(|F_0| - |F'_0|) + 4|E_0| \leq |V'|$ , откуда  $|F'_0| \geq k$ .

Теорема 2 доказана.

Ниже будет показано, что некоторые классы планарных триангуляций, для которых задача VC полиномиально разрешима, содержат мало 4-связных графов. Последнее может отчасти объяснять высокую сложность задачи в классе высокосвязных триангуляций.

**Пример 1.** Простой планарный 2-связный граф называется *внешнепланарным*, если существует такой изоморфный ему плоский граф  $G$ , что все его вершины принадлежат простому циклу, ограничивающему внешнюю грань  $G$ . Задача VC полиномиально разрешима в классе внешнепланарных графов [4, лемма 78]. Легко непосредственно убедиться в том, что для числа вершин, большего 3, не существует 4-связных внешнепланарных триангуляций.

Рассмотрим произвольный простой граф и цикл в нем. Ребро графа назовем *хордой* данного цикла, если оно соединяет две непоследовательных вершины в этом цикле. Длина наидлиннейшего цикла без хорд в графе называется его *хордальностью*. Из [14, утверждение 2, теорема 8] и критерия планарности Вагнера следует, что задача VC является полиномиально разрешимой в классе планарных графов, имеющих ограниченную хордальность.

**Пример 2.** Простой граф, имеющий хордальность 3, называется *хордальным* графом. Задача VC полиномиально разрешима в классе хордальных графов [13, разд. 3]. С учетом [19, теорема 1; 20, лемма 2.1] хордальный граф становится триангуляцией с треугольной внешней гранью в случае, когда он планарен и 3-связен. Если хордальный граф  $G$  планарен, 4-связен и содержит более 6 вершин, в нем найдется [11, следствие теоремы 1] клика из 4 вершин, удаление которой делает  $G$  несвязным. Это, в свою очередь, противоречит 4-связности  $G$  [20, лемма 2.3]. Покажем, что  $G$  не может быть 4-связным при числе вершин, равном 5 или 6. Степень всякой вершины  $G$  не меньше, чем 4 в случае, когда  $G$  содержит по крайней мере 5 вершин. Ввиду своей планарности  $G$  содержит 6 вершин. Кроме того, в  $G$  отсутствуют циклы длины 3, не являющиеся гранями. Поэтому всякая вершина, не принадлежащая внешней грани  $G$ , обязана быть соединена ровно с двумя вершинами этой грани. Это определяет единственный граф, который не является хордальным.

### 3. NP-трудность в классе евклидовых и TD-триангуляций Делоне

Для доказательства NP-трудности задачи VC в классе TD-триангуляций Делоне нам понадобится один вспомогательный результат.

**Лемма** [6, следствие 2]. *Для всякой простой планарной триангуляции на  $n$  вершинах, все грани которой суть треугольники, можно за полиномиальное по  $n$  время построить изоморфную ей TD-триангуляцию Делоне.*

Применяя теорему 2 и сформулированную лемму, получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** *Задача VC NP-трудна в сильном смысле в классе 4-связных (гаммильтоновых) TD-триангуляций Делоне, имеющих степень всех вершин, ограниченную  $\log n + 9$ .*

Несмотря на то, что всякая 4-связная простая планарная триангуляция с треугольной внешней гранью изоморфна (в графовом смысле) некоторой триангуляции Делоне [10, теорема 3.6], до сих пор остается открытым вопрос о сложности построения изоморфной триангуляции Делоне по заданной 4-связной простой планарной триангуляции. Тем не менее мы

надеемся, что полиномиальный по сложности алгоритм построения такой укладки удастся получить для планарных триангуляций, описанных в доказательстве теоремы 2.

В работе доказано, что задача вершинного покрытия графа является NP-трудной в сильном смысле в классе простых 4-связных планарных триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань, а также в классе 4-связных TD-триангуляций Делоне. Гипотеза об NP-трудности задачи в классе обычных триангуляций Делоне в свете полученных результатов выглядит весьма правдоподобной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. Alekseev V.E., Malyshev D.S. Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time // *J. Appl. Ind. Math.* 2009. Vol. 3, no. 1. P. 1–4.
3. Biniarz A., Maheshwari A., Smid M. Higher-order triangular-distance Delaunay graphs: graph-theoretical properties // *Comput. Geometry.* 2015. Vol. 48, no. 9. P. 646–660.
4. Bodlaender H. L. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth // *Theoret. Comput. Sci.* 1998. Vol. 209, no. 1-2. P. 1–45.
5. Brause C., Le N. C., Schiermeyer I. The maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // *Discrete Math.* 2015. Vol. 338, no 10. C. 1766–1778.
6. Connections between  $\theta$ -graphs, Delaunay triangulations and orthogonal surfaces / N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Ilcinkas // *Graph Theoretic Concepts in Computer Science: Proc. Workshop.* Berlin: Springer, 2010. P. 266–278. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 6410.)
7. Das G., Goodrich M. T. On the complexity of optimization problems for 3-dimensional convex polyhedra and decision trees // *Comput. Geometry.* 1997. Vol. 8, no. 3. P. 123–137.
8. Diestel R. Graph theory. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 451 p.
9. Dillencourt M. B. Realizability of Delaunay triangulations // *Inform. Process. Lett.* 1990. Vol. 33, no. 6. P. 283–287.
10. Dillencourt M. B., Smith W. D. Graph-theoretical conditions for inscribability and Delaunay realizability // *Discrete Math.* 1996. Vol. 161, no. 1-3. P. 63–77.
11. Dirac G. A. On rigid circuit graphs // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1961. Vol. 25, no. 1. P. 71–76.
12. Fleischner H., Sabidussi G., Sarvanov I. Maximum independent sets in 3- and 4-regular Hamiltonian graphs // *Discrete Math.* 2010. Vol. 310, no. 20. P. 2742–2749.
13. Gavril F. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph // *SIAM J. Comput.* 1972. Vol. 1, no. 2. P. 180–187.
14. Kaminski M., Lozin V. V., Milanic M. Recent developments on graphs of bounded clique-width // *Discrete Appl. Math.* 2009. Vol. 157, no. 12. P. 2747–2761.
15. Malyshev D.S. Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable // *J. Appl. Ind. Math.* 2013. Vol. 7, no. 4. P. 537–548.
16. Mohar B. Face covers and the genus problem for apex graphs // *J. Combin. Theory. Ser. B.* 2001. Vol. 82, no. 1. P. 102–117.
17. Narasimhan G., Smid M. Geometric spanner networks. Cambridge; N Y; Melbourne: Cambridge Univ. Press, 2007. 500 p.
18. Proximity graphs:  $E$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$ ,  $\chi$  and  $\omega$  / P. Bose, V. Dujmovic, F. Hurtado, J. Iacono, S. Langerman, H. Meijer, V. Sacristan, M. Saumell, D. Wood // *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 2012. Vol. 22, no. 5. P. 439–470.
19. Rote G. Strictly convex drawings of planar graphs // *Proc. of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (electronic).* N. Y.: ACM, 2005. P. 728–734.
20. Triangulating with high connectivity / T. K. Dey, M. B. Dillencourt, S. K. Ghosh, J. M. Cahill // *Comput. Geometry.* 1997. Vol. 8, no. 1. P. 39–56.

Кобылкин Константин Сергеевич

Поступила 02.04.2016

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: kobylikins@gmail.com