ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫ С ПАРАМЕТРАМИ (85,14,3,2) ИЛИ (325,54,3,10)[1]

М. М. Исакова, А. А. Махнев, А. А. Токбаева

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением, не большим t, для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$. В случае $t = 4$ ранее была получена редукция к графам, в которых окрестности вершин имеют параметры (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), (325,54,3,10). В данной работе доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ или $(325, 54, 3, 10)$, имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ или $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$. Кроме того, найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, локально $\mathcal{X}$-граф, автоморфизм графа.

M. M. Isakova, A. A. Makhnev, A. A. Tokbaeva. On graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters (85,14,3,2) or (325,54,3,10).

J. Koolen posed the problem of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue at most t for a given positive integer t. This problem was solved earlier for $t = 3$. In the case $t = 4$, a reduction to graphs in which neighborhoods of vertices have parameters (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), or (325,54,3,10) was obtained. In the present paper, we prove that a distance regular graph in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters $(85, 14, 3, 2)$ or $(325, 54, 3, 10)$ has intersection array $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ or $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$. In addition, we find possible automorphisms of a graph with intersection array $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Keywords: strongly regular graph, locally $\mathcal{X}$-graph, automorphism of a graph.

MSC: 05C25, 20F29
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-137-143

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением $\leqslant t$ для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$ [1]. В работе [2] начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением r, $3 < r \leqslant 4$. В этой работе получена редукция к локально исключительным графам. В [3] найдены параметры исключительных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

графов с собственным значением 4 и получена редукция дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными графами с неглавным собственным значением 4, к случаям, когда эти окрестности имеют параметры (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), (325,54,3,10).

В данной работе получены

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(85, 14, 3, 2)$ *или* $(325, 54, 3, 10)$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ *или* $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *пересекает по* s *вершинам* t *антиподальных классов. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17, 43\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 43$, $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 430$, *либо* $p = 2, 3$, $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ *и* $\alpha_2(g) = 430 - 10l$;

(2) $t = 1$, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170w$ *и* $\alpha_2(g) = 170(3 - w)$;

(3) $p = 7$ *и* $t = 2$;

(4) $p = 5$ *и* Ω *является* t*-кликой,* $t \in \{1, 6, 11\}$;

(5) $p = 3$, $s = 6$ *и* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$ *или* $s = 3$, $t = 8, 11, \ldots, 26$ *и в случае* $t = 8$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$;

(6) $p = 2$, $s = 6$ *и* $t \leqslant 14$ *или* $s = 4$ *и* $t \leqslant 21$, *или* $s = 2$ *и* $t \leqslant 42$.

Следствие. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ *не является вершинно симметричным.*

1. Графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ или $(325, 54, 3, 10)$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 [3, лемма 1.2]. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $4, \theta_2$, u, w *— вершины из* Γ *с* $d(u, w) = 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leqslant \mu \leqslant (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$;

(2) *если* X, Y *— такие подмножества из* $[u]$, *что между* X *и* Y *нет ребер, то* $|X| \cdot |Y| \leqslant (v' - |X|)(v' - |Y|)(4 - \theta_2)^2/(2k' - 4 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $|X| = |Y|$, *то* $|X| \leqslant v'(4 - \theta_2)/(2k' - 2\theta_2)$.

Для сильно регулярного графа с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ имеем

$$|X| \cdot |Y| \leqslant (85 - |X|)(85 - |Y|)7^2/27^2.$$

Для сильно регулярного графа с параметрами (325,54,3,10) имеем

$$|X| \cdot |Y| \leqslant (325 - |X|)(325 - |Y|)3^2/23^2.$$

Лемма 1.2 [3, лемма 1.4]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \geqslant 3$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $4, -m$. *Если* $\theta_0 = k > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ *— собственные значения графа* Γ, *то* $\theta_1 \leqslant b_1/(m - 1) - 1$ *и* $\theta_d \geqslant -b_1/5 - 1$.

Лемма 1.3. *Если* Γ *— связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(325, 54, 3, 10)$*, то* $d(\Gamma) = 3$*,* $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ *и* $b_2 \leqslant 9, 14, 17, 19, 17, 15, 9$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — сильно регулярный граф с неглавными собственными значениями $n - m, -m$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(325, 54, 3, 10)$. Тогда $m - 1$ делит 270 и $n - m = 270/(m - 1) - 1$, поэтому тройка $(m, n - m, \mu)$ совпадает с (10,29,35), (11,26,59), (19,14,59), (28,9,73), (31,8,77), (55,4,105); противоречие с тем, что μ не делит $325 \cdot 270$.

Пусть $d(\Gamma) > 2$. Тогда утверждение следует из доказательства утверждения (5) леммы 5.3 из [3].

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(325, 54, 3, 10)$*. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u — вершина графа Γ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Если $\mu = 90$, то $k_2 = 325 \cdot 3$ и $b_2 \leqslant 9$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 78$. Тогда $k_2 = 25 \cdot 45$, b_2 делится на 13 и $b_2 \leqslant 15$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu = 75$. Тогда $k_2 = 65 \cdot 18$, b_2 делится на 5 и $b_2 \leqslant 17$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 65$. Тогда $k_2 = 25 \cdot 54$, b_2 делится на 13 и $b_2 \leqslant 19$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu = 54$. Тогда $k_2 = 325 \cdot 5$ и $b_2 \leqslant 17$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Пусть $\mu = 50$. Тогда $k_2 = 65 \cdot 27$, b_2 делится на 5 и $b_2 \leqslant 14$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 45$. Тогда $k_2 = 325 \cdot 6$ и $b_2 \leqslant 9$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть до конца раздела Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d > 2$, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами $(85, 14, 3, 2)$. Пусть $\theta_0 = k > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ.

Лемма 1.5. *Имеем* $d > 2$*,* $\theta_1 \leqslant 34$*,* $\theta_2 \geqslant -15$ *и либо* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$*, либо* $\mu \in \{7, 10\}$ *и* $d > 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d = 2$ и $\theta_1 = n - m, \theta_2 = -m$. Тогда $m - 1$ делит $b_1 = 70$, $n - m = b_1/(m - 1) - 1$ и $\mu = 85 - m(n - m)$, поэтому тройка $(m, n - m, \mu)$ — одна из следующих (5,13,20), (7,9,22), (10,6,25) или (14,4,29). Так как μ делит $85 \cdot 70$, то $\mu = 25$ и кратность 6 равна $9 \cdot 85 \cdot 95/(16 \cdot 25)$, противоречие.

Пусть $d > 2$. Так как $b_1 = 70$, то $\theta_1 \leqslant 34$ и $\theta_d \geqslant -15$.

Из доказательства утверждения (1) леммы 6.1 из [3] следует, что либо $\mu \in \{5, 7, 10\}$ и b_2 не больше 40, 36, 25 соответственно, либо Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Покажем, что $\mu \neq 5$. Если $\mu = 5$, то каждый μ-подграф в Γявляется пятиугольником. Пусть u — вершина графа Γ, $\Delta = [u]$. Тогда каждый μ-подграф в Δ является 2-кокликой, поэтому окрестность любой вершины в Δ есть объединение изолированных клик. Далее, для $w \in \Delta$ подграф $\Delta(w)$ является регулярным графом степени 3 на 14 вершинах, поэтому $\Delta(w)$ — объединение изолированных 4-клик; противоречие с тем, что 14 не делится на 4.

Пусть $d = 3$. Тогда либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 51$. Если $\mu = 10$, то $k_2 = 85 \cdot 7$, a_2 четно, поэтому b_2 и c_3 нечетны, $b_2 \leqslant 25$. Отсюда либо $c_3 \in \{51, 85\}$, либо $c_3 = 55, 77$, $b_2 = 11$, либо $c_3 = 63$, $b_2 = 9$, либо $c_3 = 65$, $b_2 = 13$, либо $c_3 = 75$, $b_2 = 15$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $\mu = 7$, то $k_2 = 85 \cdot 10$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма 1.6. *Параметр μ не равен* 10.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 10$. Тогда $k_2 = 85 \cdot 7$, $c_3 \geqslant 15$, a_2 четно, поэтому b_2 и c_3 нечетны, b_3 четно и $b_2 \leqslant 25$. Далее, $c_3 - b_3 \geqslant 10 - 25 + 16$, поэтому $d \leqslant 5$ и $b_3 \leqslant c_3 - 1$. Компьютерные вычисления дают неравенство $d \neq 5$.

Значит, $d = 4$. Имеем $\theta_1 > 34$ или $c_3 \geqslant 38$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма 1.7. *Параметр μ не равен* 7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 7$. Тогда $k_2 = 85 \cdot 10$, $c_3 \geqslant 11$ и $b_2 \leqslant 36$. Далее, $c_4 - b_4 \geqslant 7 - 36 + 2 \cdot 16$ и $d \leqslant 7$.

Компьютерные вычисления в случае $d \geqslant 5$ дают массив пересечений $\{85, 70, 36, 7, 1; 1, 7, 36, 70, 85\}$; противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет нецелую кратность.

Значит, $d = 4$. Если b_2 не делится на 7, то при $b_2 = 36, b_3 = 7, c_3 = 28, c_4 = 85$ имеем $\theta_1 > 34$ или $\theta_2 < -15$, противоречие. Аналогичное противоречие получается и при $7 < b_2 \leqslant 34$.

Если $b_2 = 7$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 48$. Отсюда $c_3 \in \{50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $b_2 = 14$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 43$. Отсюда $c_3 \in \{50, 70\}$. Если $b_2 = 21$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 38$. Отсюда $c_3 \in \{42, 50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $b_2 = 28$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 33$. Отсюда $c_3 \in \{35, 40, 50, 70\}$. Если $b_2 = 35$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 28$. Отсюда $c_3 \in \{35, 50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ и спектром $85^1, \sqrt{85}^{215}, -1^{85}, -\sqrt{85}^{215}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что Γ содержит 86 антиподальных классов, в каждом из которых 6 вершин.

Лемма 2.1. *Пусть χ_1 — характер проекции мономиального представления ψ группы G в $\mathbf{C}^{516}$ на подпространство размерности* 215*, отвечающее собственному значению $\sqrt{85}$, χ_2 — характер проекции на подпространство размерности* 85*. Тогда*

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/12 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{85}/85,$$

$$\chi_2(g) = \frac{\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{6} - 1 = -\frac{\alpha_1(g) + \alpha_2(g)}{6} + 85.$$

Далее, $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа и если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 85$ делится на p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Модифицируя вычисления из [4], получим

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 215 & 43\sqrt{85}/17 & -43\sqrt{85}/85 & -43 \\ 85 & -1 & -1 & 85 \\ 215 & -43\sqrt{85}/17 & 43\sqrt{85}/85 & -43 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)\sqrt{85}/17 - \alpha_2(g)\sqrt{85}/85 - \alpha_3(g))/12$ и $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/12 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85})$.

Далее, $\chi_2(g) = (85\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 85\alpha_3(g))/516$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 516$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/6 - 1 = 85 - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/6$.

По [4, лемма 2] с $d = 85$ имеем $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа.

Последнее утверждение леммы следует из [5, лемма 2].

Лемма 2.2. *Если Ω является пустым графом, то либо $p = 43$, $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 430$, либо $p = 2, 3$, $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_2(g) = 430 - 10l$.*

Доказательство. Так как $516 = 12 \cdot 43$, то $p = 2, 3$ или 43.

Если $p = 43$, то $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85})$. Так как $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа, то $\chi_1(g) = 0$, поэтому $5\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 430$.

Если $p = 2, 3$, то $5\alpha_1(g) = \alpha_2(g)$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_1(g) = 86 - \alpha_3(g)/6$. Лемма доказана.

До конца раздела предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 5$, то g поточечно фиксирует содержащий a антиподальный класс, поэтому $\alpha_3(g) = 0$. Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $s = 6$, t нечетно и $p > 5$, то $t = 1$, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170w$ и $\alpha_2(g) = 170(3 - w)$;*

(2) *если $t > 1$, то $p \leqslant 7$ и либо*

(*i*) *$p = 7$ и $t = 2$, либо*

(*ii*) *$p = 5$ и Ω является t-кликой, $t \in \{1, 6, 11\}$, либо*

(*iii*) *$p = 3$, $s = 6$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$ или $s = 3$, $t = 8, 11, \ldots, 26$ и в случае $t = 8$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, либо*

(*iv*) *$p = 2$, $s = 6$ и $t \leqslant 14$ или $s = 4$ и $t \leqslant 21$, или $s = 2$ и $t \leqslant 42$.*

Доказательство. Пусть A_i — множество вершин из Γ, сдвигаемых g на расстояние i.

Если $s = 6$ и t нечетно, то $86 - t$ делится на p, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 516 - 6t$ и $\chi_1(g) = 5t/2 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85}) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа. Поэтому $5\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 6(\alpha_1(g) + t - 86)$ делится на $85 \cdot 6$ и $\alpha_1(g) + t - 1$ делится на 85. Далее, вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leqslant 13$.

В случае $t = 1$ имеем $p = 5, 17$, в случае $t = 5$ имеем $p = 3$, в случае $t = 9$ имеем $p = 7, 11$, в случае $t = 11$ имеем $p = 3, 5$, и в случае $t = 13$ имеем $p = 73$. В последнм случае Ω — регулярный граф степени 12; противоречие с тем, что $\lambda_\Omega = 14$. Если $t = 1$, $p = 17$, то $\chi_1(g) = 5/2 + (\alpha_1(g) - 85)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) = 170w$.

Если $t = 9$ и $p = 7$, то $\chi_1(g) = 45/2 + (\alpha_1(g) - 77)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) \geqslant 97 \cdot 7$. Если $t = 9$ и $p = 11$, то $\chi_1(g) = 45/2 + (\alpha_1(g) - 77)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) \geqslant 92 \cdot 11$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть далее для $p > 5$ число t четно. Если $p > 13$, то для вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leqslant 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 16, 1; 1, 14, t - 1\}$ и $t - 16 = 5 \cdot 14$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $86 - t$ делится на 13 и $t \in \{8, 34, \ldots, 60\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 1 по модулю 13. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 8$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 2 вершин из $a^\perp$ и по вершине из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 5, 1; 1, 1, 7\}$; противоречие с тем, что число $k\lambda = 7 \cdot 1$ нечетно.

Пусть $p = 11$. Тогда $86 - t$ делится на 11 и $t \in \{20, 42, 64\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 3 по модулю 11. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leqslant 14$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $86 - t$ делится на 7 и $t \in \{2, 16, \ldots, 84\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 0 по модулю 7. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2$.

Пусть $p = 5$. Тогда $86 - t$ делится на 5 и $t \in \{1, 6, 11, \dots, 85\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 4 по модулю 5. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 6, 11$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 5 вершин из $a^\perp$ и по 4 вершины из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, противоречие.

Если $s = 1$, то Ω является t-кликой, $t \in \{1, 6, 11\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $86 - t$ делится на 3 и $t \in \{2, 5, \dots, 84\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 2 по модулю 3. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 8, 14$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 3 вершин из $a^\perp$ и по 2 вершины из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$.

Пусть $s = 3$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $3t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86 - t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $t/2$ вершинами из A_3, поэтому $t \leqslant 28$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 3 вершин из $a^\perp$ и не менее 2 вершин из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому $8 \leqslant t$ и в случае $t = 8$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $86 - t$ делится на 2 и $t \in \{2, 4, \dots, 86\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 0 по модулю 2. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 4, \dots, 14$.

Пусть $s = 4$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $2t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86 - t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $t/3$ вершинами из A_3 и не менее чем с $2t/3$ вершинами из Ω, поэтому $t \leqslant 21$.

Пусть $s = 2$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $4t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86 - t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $2t/3$ вершинами из A_3, поэтому $t \leqslant 42$. Лемма и теорема 2 доказаны.

З а м е ч а н и е. Пусть окрестность некоторой вершины из Ω в графе Γ является сильно регулярным графом с параметрами (85,14,3,2). С учетом того, что Ω — регулярный граф степени $t - 1$ по [6, теорема 1] в случае $p = 5$ число $t - 1$ равно 0 или 5, в случае $p = 3$ число $t - 1$ равно 4 или 10, а в случае $p = 2$ число $t - 1$ равно 5, 7 или 9.

3. Граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ не является вершинно симметричным

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $\{2, 3, 43\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17, 43\}$ и ввиду теоремы 2 $|G|$ не делится на 49.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$, то Ω — пустой граф, $p = 2$ и либо $\alpha_3(g) = 516$, либо $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 430$ — в любом случае $|C_G(f)|$ не делится на* 4;

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $U_3(7)$ или $U_4(7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$. По теореме 2 $Fix(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 86$, $\alpha_3(f) = 0$ и $\alpha_2(f) = 430$.

Ввиду теоремы 2 Ω — пустой граф, $p = 2, 3$, числа $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_2(g) = 430 - 10l$ делятся на $43p$, поэтому $p = 2$, либо $l = 43$, либо $l = 0$. Так как $\alpha_1(f) = 86$, то $|C_G(f)|$ не делится на 4.

Пусть K — максимальная подгруппа из G, фиксирующая каждый антиподальный класс. Ввиду утверждения 1 $|K|$ делит 2.

Пусть $Q = O_2(G) \neq K$. Тогда длины Q-орбит на множестве антиподальных классов равны 2 и $\Phi(Q) \leqslant K$.

Из действия $S(G)$ на множестве антиподальных классов следует, что $S(G) = O_2(G)$. Пусть $\bar{G} = G/S(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}$. По [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна группе $U_3(7)$ порядка $2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43$ или группе $U_4(7)$ порядка $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 43$. Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о следствия. По лемме 3.1 $|G|$ делится на 49; противоречие с тем, что ввиду теоремы 2 $|G|$ не делится на 49. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Vol. 464, № 4. P. 396–400.
2. **Махнев А.А.** Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2014. Т. 84, № 3. С. 84–85.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 4 // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 233–255.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{\mathbf{24}, \mathbf{21}, \mathbf{3}; \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{18}\}$ // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 4. С. 476–495.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
6. **Падучих Д.В.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (85,14,3,2) // Дискрет. математика. 2009. Т. 21, № 1. С. 78–104.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Исакова Мариана Малиловна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Кабардино-Балкарский университет
e-mail: isakova2206@mail.ru

Поступила 17.10.2015

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Токбаева Альбина Аниуаровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Кабардино-Балкарский университет
e-mail: tok2506@mail.ru