ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.518.86

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕЧЕТНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ОГРАНИЧЕНИИ[1]

Д. О. Зыков

В данной статье исследуются наибольшие и наименьшие значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов, при условии, что полиномы ограничены сверху на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией $\varphi(x) = x$. Исследование наибольших и наименьших значений первого и второго коэффициентов были осуществлены автором ранее.

Ключевые слова: тригонометрический полином, одностороннее ограничение.

Keywords: trigonometric polynomials, one-sided constraints.

D. O. Zykov. Sharp estimates for coefficients of odd trigonometric polynomials under a one-sided constraint.

We study the largest and the smallest values of coefficients of odd trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the interval $[0, 2\pi]$. A similar problem for the first and second coefficients was studied by the author earlier.

Keywords: trigonometric polynomial, one-sided constraint.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-130-136

1. Введение

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_n$ нечетных тригонометрических полиномов

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

с вещественными коэффициентами порядка $n \geq 1$, удовлетворяющих ограничению

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{1.1}$$

Нас интересует, в каких границах могут меняться коэффициенты таких полиномов, а точнее, нас интересуют при $1 \leq k \leq n$ величины

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(f_n) \colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(f_n) \colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}. \tag{1.2}$$

Экстремальные задачи для алгебраических и тригонометрических полиномов — обширный раздел теории функций. Такие задачи изучаются с середины XVIII в. К настоящему времени большое число исследований посвящено, в частности, экстремальным задачам для полиномов с ограничениями на их значения, см., к примеру, монографии [1, разд. VI; 2, гл. IV, V] и

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5344.2006.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

приведенную там библиографию. Важную роль в теории функций и ее приложениях играет результат Л. Фейера [3] о максимальном значении первого коэффициента неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением; такую задачу для старших коэффициентов решили позже Е. Егервари и О. Сасс [4]. Различные применения имеют задачи для тригонометрических полиномов с ограничениями на их значения и коэффициенты. В частности, такие задачи возникают при исследовании нулей ζ-функции Римана и остаточного члена в асимптотической формуле для распределения простых чисел (см. работы [5–7] и библиографию в них). Близкие экстремальные задачи для полиномов обсуждаются в [8; 9]. В работах автора [10] и [11] решены задачи (1.2) для первого и второго коэффициентов.

Условие (1.1) можно переписать в более удобной для дальнейшего использования форме. В неравенстве (1.1) на отрезке $[\pi, 2\pi]$ заменим x на $2\pi - x,\ x \in [0, \pi]$. В результате получим ограничение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \geq x - 2\pi, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Таким образом, неравенство (1.1) эквивалентно двум неравенствам

$$x - 2\pi \leq f_n(x) \leq x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{1.3}$$

2. Основной результат

В ходе исследования задач (1.2) автором была доказана следующая теорема.

Теорема. *Для величин* (1.2) *справедливы следующие утверждения.*

1. *При любых* $1 \leq k \leq n$ *для величины* $A_k^+(n)$ *выполняется неравенство*

$$A_k^+(n) \leq \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.1}$$

2. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} A_k^+(n) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.2}$$

3. *При любых* $1 \leq k \leq n$ *для величины* $A_k^-(n)$ *выполняется неравенство*

$$A_k^-(n) \geq \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.3}$$

4. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} A_k^-(n) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с обоснования первого утверждения. Пусть f_n — нечетный тригонометрический полином порядка $n \geq 1$, удовлетворяющий условиям (1.3). Исходя из этих условий, оценим сверху коэффициенты полинома. Разделим отрезок $[0, \pi]$ на k равных частей, в результате получим набор отрезков $I_m = [(m-1)\pi/k, m\pi/k],\ 1 \leq m \leq k$. Для удобства обозначим все нечетные значения m (не превосходящие k) как m_o, а четные — как m_e. Теперь для коэффициента $a_k = a_k(f_n)$ с номером $k,\ 1 \leq k \leq n$, полинома f_n имеем

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_{I_m} f_n(x)\sin kx\,dx$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\Big(\sum_{m_o}\int\limits_{I_{m_o}} x\sin kx\,dx + \sum_{m_e}\int\limits_{I_{m_e}}(x-2\pi)\sin kx\,dx\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} x\sin kx\,dx - \sum_{m_e}\int\limits_{I_{m_e}} 2\pi\sin kx\,dx\Big)$$

$$= 2\Big(\frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\Big[\frac{k}{2}\Big]\int\limits_0^{\pi/k}\sin kx\,dx\Big) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big).$$

Таким образом, получена оценка

$$a_k \leq \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big), \tag{2.5}$$

которая влечет неравенство (2.1). Первое утверждение теоремы проверено.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Определим на интервале $(0,\pi)$ функцию f соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \Big(\frac{(m_0-1)\pi}{k}, \frac{m_0\pi}{k}\Big); \\ x-2\pi, & x \in \Big(\frac{(m_e-1)\pi}{k}, \frac{m_e\pi}{k}\Big). \end{cases} \tag{2.6}$$

Распространим ее нечетно на интервал $(-\pi,0)$: $f(x) = -f(-x)$, $x \in (-\pi,0)$. Построенную функцию распространим 2π-периодически на всю ось; получившуюся функцию обозначим тем же символом f. Функция f на данный момент определена всюду на $\mathbb{R}$, кроме точек $m\pi/k$, $m \in \mathbb{Z}$; в этих точках доопределим функцию f полусуммой пределов слева и справа. Довольно легко увидеть, что f обладает свойством

$$f(x) \leq x, \quad x > -\pi/k. \tag{2.7}$$

Функция f была выбрана на основе анализа возможности достижения равенства в (2.5). Коэффициент $a_k = a_k(f)$ ряда Фурье $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu x$ функции f имеет значение

$$a_k(f) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.8}$$

Так что в некотором смысле эта функция экстремальная, однако она не является полиномом. Сейчас с помощью функции f будет построено семейство полиномов с экстремальными свойствами.

Обозначим через φ_δ, $0 < \delta < \pi/k$, функцию Соболева со следующими свойствами: функция φ_δ определена, неотрицательна, четна и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$; носитель функции φ_δ лежит на отрезке $[-\delta,\delta]$, т. е. $\varphi_\delta(x) = 0$, $x \notin [-\delta,\delta]$, и, наконец,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_\delta(x)dx = 1.$$

С ее помощью зададим на отрезке $[0,2\pi]$ вспомогательную функцию f_δ соотношением

$$f_\delta(x) = (f*\varphi_\delta)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\varphi_\delta(t)dt. \tag{2.9}$$

Функция f_δ, очевидно, бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ и 2π-периодическая. Поскольку $\varphi_\delta(x) = 0,\ x \notin [-\delta, \delta]$, то функцию f_δ можно представить в виде

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt. \tag{2.10}$$

Отметим, что если для $t \in [x-\delta, x+\delta]$ функция f линейная, то $f_\delta(x) = f(x)$. В самом деле, пусть $f(t) = At + B$. Тогда имеем

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} (At+B)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \left(A(t-x) + Ax + B\right)\varphi_\delta(t-x)dt$$

$$= A\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} (t-x)\varphi_\delta(t-x)dt + (Ax+B)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_\delta(t-x)dt = Ax + B = f(x).$$

Убедимся, что функция f_δ удовлетворяет ограничениям (1.1), а точнее,

$$f_\delta(x) \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{2.11}$$

Если $x \ge 0$, то $x-\delta \ge -\delta > -\pi/k$, а следовательно, в интеграле (2.10) для значения функции f выполняется оценка (2.7). Поэтому

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt \le \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} t\varphi_\delta(t-x)dt = x, \quad x \ge 0,$$

в частности, имеет место (2.11). Впрочем, в силу нечетности функции f_δ свойство (2.11) можно записать в эквивалентной форме:

$$x - 2\pi \le f_\delta(x) \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{2.12}$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\delta)\sin\nu x$$

ряда Фурье функции f_δ. Коэффициенты Фурье $a_\nu(\delta)$ функции f_δ убывают быстрее любой отрицательной степени ν; в частности, с некоторым множителем $C(\delta)$ выполняется оценка

$$|a_\nu(\delta)| \le \frac{C(\delta)}{\nu^3}, \quad \nu \ge 1.$$

Ряд Фурье функции f_δ сходится к f_δ равномерно. Поэтому, в частности, имеем

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(\delta)\sin\nu x.$$

Следовательно,

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu(\delta)|\cdot|\sin\nu x| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{C(\delta)}{\nu^3}|x|\nu \le |x|\,\epsilon_n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\epsilon_n = \epsilon_n(\delta) = C(\delta) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2};$$

последняя величина обладает свойством $\epsilon_n \to 0,\ n \to \infty$. Отсюда и из (2.11) для сумм S_n при $x \in [0, 2\pi]$ получаем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \le f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \le x + x\epsilon_n = x(1 + \epsilon_n).$$

Тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1 + \epsilon_n}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \le x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Коэффициент с номером k полинома s_n есть $a_k(\delta)/(1 + \epsilon_n)$. Поэтому для величины $A_k^+(n)$ справедливы оценки

$$\frac{a_k(\delta)}{1 + \epsilon_n} \le A_k^+(n) \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi/k$

$$a_k(\delta) \le \lim_{n\to\infty} A_k^+(n) \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.13}$$

Найдем предел величины

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx$$

при $\delta \to +0$. Из определения (2.9) следует, что в точках непрерывности $x \in \mathbb{R}$ функции f имеет место предельное соотношение

$$f_\delta(x) \to f(x), \quad \delta \to +0. \tag{2.14}$$

Функция f непрерывна всюду на оси, кроме точек $m\pi/k,\ m \in \mathbb{N}$. Поэтому соотношение (2.14) выполняется всюду на $[0, \pi]$, за исключением конечного числа точек. Помимо того, согласно (2.12) семейство функций $\{f_\delta,\ 0 < \delta < \pi/k\}$ равномерно ограничено. Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости (см., например, [12, гл. 3, § 5]), заключаем, что

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx \ \to\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin kx = a_k(f) \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Соотношения (2.8) и (2.13) влекут теперь утверждение (2.2). Второе утверждение теоремы доказано.

Исследование величины $A_k^-(n)$ осуществляется с помощью тех же соображений, что и величины $A_k^+(n)$. Обоснуем третье утверждение теоремы. Пусть вновь f_n — нечетный тригонометрический полином порядка $n \ge 1$, удовлетворяющий условиям (1.3). Для его коэффициента $a_k = a_k(f_n)$ с номером $k,\ 1 \le k \le n$, имеем

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(x) \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_{I_m} f_n(x) \sin kx\, dx$$

$$\ge \frac{2}{\pi}\Big(\sum_{m_o}\int_{I_{m_o}} (x - 2\pi) \sin kx\, dx + \sum_{m_e}\int_{I_{m_e}} x \sin kx\, dx\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} x\sin kx\,dx - \sum_{m_o}\int\limits_{I_{m_e}} 2\pi\sin kx\,dx\Big)$$

$$= 2\Big(\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \Big[\frac{k+1}{2}\Big]\,2\int\limits_0^{\pi/k}\sin kx\,dx\Big) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big).$$

Отсюда следует неравенство (2.3). Тем самым доказано третье утверждение теоремы.

Доказательство четвертого утверждения осуществляется аналогично второму. В данном случае вместо (2.6) рассмотрим на $(0,\pi)$ функцию

$$g(x) = \begin{cases} x - 2\pi, & x \in \Big(\dfrac{(m_0-1)\pi}{k}, \dfrac{m_0\pi}{k}\Big); \\ x, & x \in \Big(\dfrac{(m_e-1)\pi}{k}, \dfrac{m_e\pi}{k}\Big). \end{cases} \tag{2.15}$$

Распространим ее нечетно на $(-\pi,0)$, продолжим с $(-\pi,\pi)$ на всю ось 2π-периодически и доопределим полусуммой пределов слева и справа в точках разрыва $m\pi/k,\ m\in\mathbb{Z}$. Полученную в результате функцию обозначим тем же символом g. Коэффициент $b_k = b_k(g)$ ряда Фурье $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x$ функции g имеет значение

$$b_k(g) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.16}$$

Легко понять, что построенная функция обладает свойством

$$g(x) \le x, \quad x > 0. \tag{2.17}$$

По аналогии с (2.9), рассмотрим свертку $g_\delta = g * \varphi_\delta$; ее можно записать в виде

$$g_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} g(t+x)\varphi_\delta(t)dt. \tag{2.18}$$

Убедимся, что если $0<\delta<\pi/(2k)$, то

$$g_\delta(x) \le x, \quad x > 0. \tag{2.19}$$

При $x>\delta$ имеем $x-\delta>0$, а следовательно, в первом интеграле (2.18) для значения функции g выполняется оценка (2.17). Отсюда следует, что свойство (2.19) выполняется при $x\ge\delta$. Обоснуем теперь свойство (2.19) для $x\in(0,\delta)$. Согласно (2.15) если $x\in(0,\pi/k)$, то $g(x)=x-2\pi<0$. Кроме того, функция g нечетная. Поэтому, исходя из второй формулы (2.18), можно сделать вывод, что $g_\delta(x)<0$ для $x\in(0,\delta)$. Тем более для таких значений аргумента будет выполняться неравенство $g_\delta(x)<x$. Свойство (2.19) функции g_δ проверено.

Частичные суммы

$$S_n(x) = S_n(x; g_\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(\delta)\sin\nu x \tag{2.20}$$

ряда Фурье функции g_δ обладают свойством

$$|g_\delta(x) - S_n(x)| \le |x|\,\epsilon_n, \quad x\in\mathbb{R},$$

где $\epsilon_n = \epsilon_n(\delta)\to 0,\ n\to\infty$. Отсюда и из (2.19) для сумм (2.20) при $x\in[0,2\pi]$ получаем $S_n(x)\le x(1+\epsilon_n)$. Следовательно, тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \le x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$.

Коэффициент с номером k полинома s_n есть $b_k(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому для величины $A_k^-(n)$ справедливы оценки

$$\frac{b_k(\delta)}{1+\epsilon_n} \ge A_k^-(n) \ge \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем, что при любом $0 < \delta < \pi/(2k)$

$$b_k(\delta) \ge \lim_{n\to\infty} A_k^-(n) \ge \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.21}$$

Вновь с помощью теоремы Лебега о мажорантной сходимости заключаем, что $b_k(\delta) \to b_k(g)$ при $\delta \to +0$. Соотношения (2.16) и (2.21) влекут теперь утверждение (2.4). Доказательство четвертого утверждения, а вместе с тем и всей теоремы завершено.

Автор признателен своему научному руководителю В. В. Арестову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. I, 392 с.; Т. II, 432 с.
2. **Milovanović G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
3. **Fejer L.** Uber trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
4. **Egervary E.V, Szasz 0.** Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27. P. 641–652.
5. **Арестов В.В., Кондратьев В.П.** Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 15–28.
6. **Révész Sz.Gy.** A Fejér type extremal problem // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, nos. 3–4. P. 279–283.
7. **Révész Sz.** On some extremal problems of Landau // Serdica Math. J. 2007. Vol. 33, no. 1. P. 125–162.
8. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878.
9. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
10. **Зыков Д.О.** Коэффициенты тригонометрических полиномов при одностороннем ограничении // Тр. Ин-та мататики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 152–160.
11. **Зыков Д.О.** Исследование второго коэффициента нечетного тригонометрического полинома при одностороннем ограничении // Материалы 47-й Междунар. молодеж. шк.-конф. “Современные проблемы математики и ее приложений” (e-resource) / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2016. С. 179–185.
12. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011. 166 с.

Зыков Дмитрий Олегович
аспирант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mitya130@mail.ru

Поступила 06.05.2016