ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ π-ЗАМКНУТЫ. II [1]

В. А. Белоногов

Продолжается изучение пар (G,π), где G — конечная простая неабелева группа и π — множество простых чисел такие, что G имеет лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сама не является π-замкнутой. В статье (с учётом результатов первой статьи этой серии) указан список таких пар (G,π) в случае, когда G отлична от групп $PSL_r(q)$ и $PSU_r(q)$ при простом нечётном r и групп $E_8(q)$ (всюду q — степень простого числа).

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, π-замкнутая группа, максимальная подгруппа.

V. A. Belonogov. Finite simple groups in which all maximal subgroups are π-closed. II.

We continue the study of pairs (G,π), where G is a finite simple nonabelian group and π a set of primes, such that G has only π-closed maximal subgroups but is not π-closed itself. Using the results of the first paper from the series, we give a list of such pairs (G,π) in the case when G is different from the groups $PSL_r(q)$ and $PSU_r(q)$ with prime odd r and $E_8(q)$, where q is a prime power.

Keywords: finite group, simple group, π-closed group, maximal subgroup.

MSC: 20D06,20D08, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-12-22

Введение

Всюду далее G есть конечная группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Скажем, что *пара* (G,π) *имеет свойство* $(*)$, если группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты, т. е. если G есть *минимальная не π-замкнутая группа.*

Прежде всего отметим следующий результат, практически сводящий изучение таких пар к случаю простых неабелевых групп G. Напомним, что *группа Шмидта* есть конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Предложение 1 [1, теорема 1′]. *Для любых G и π со свойством $(*)$ либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта.*

Изучение таких пар (G,π) для простых групп G начато в статье [2], где доказаны две теоремы, которые мы приводим здесь в предложениях 2 и 3.

Предложение 2 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая группа и π — множество простых чисел. Предположим, что группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты. Тогда*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) *G есть группа одного из следующих типов* (*всюду q есть степень некоторого простого числа*):

(1) *$G \cong A_r$, где r — простое число и $r \geq 5$;*

(2) *$G \cong PSL_2(q)$, где $q > 5$;*

(3) *$G \cong PSL_r(q)$, где r — нечётное простое число*;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

(4) $G \cong PSU_r(q)$, *где* r — *нечётное простое число*;
(5) $G \cong Sz(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(6) $G \cong {}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^{2n+1} \geq 27$;
(7) $G \cong {}^3D_4(q)$;
(8) $G \cong {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(9) $G \cong E_8(q)$;
(10) G *изоморфна одной из групп* $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ *и* F_2.

Предложение 3 [2, теорема 2]. *Пусть* G — *конечная спорадическая простая группа и* π — *подмножество из* $\pi(G)$. *Следующие утверждения равносильны*:
(A) *группа* G *не* π*-замкнута, а все её максимальные подгруппы* π*-замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:
(1) $G \cong M_{23}$ *и* $\pi = \{23\}$;
(2) $G \cong J_1$ *и* $\pi = \{19\}$;
(3) $G \cong J_4$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$;
(4) $G \cong Ly$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$;
(5) $G \cong Fi'_{24}$ *и* $\pi = \{29\}$;
(6) $G \cong F_2$ *и* $\pi = \{47\}$.

Отметим, что доказательства предложений 2 и 3 основываются на результатах статьи автора [3] о контроле простого спектра конечных простых групп.

В настоящей статье доказана следующая теорема. В ней, как обычно, $\pi(n)$ есть множество всех простых делителей натурального числа n. Кроме того, для любой степени q простого числа используются следующие обозначения. Пусть $S(q) := \{q_0 \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \mid q = q_0^r$ при некотором простом числе $r\}$. Далее, если $P(x)$ — целочисленный многочлен от x, то положим $\pi_0(P(q)) := \pi(P(q))\backslash \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(P(q_0))$. Например, если $q = 2^6$, то $S(q) = \{2^3, 2^2\}$ и $\pi_0(q+1) = \pi(2^6+1)\backslash(\pi(8+1) \cup \pi(4+1)) = \pi(65) \setminus \{3, 5\} = \{13\}$, а если $q = 2^7$, то $S(q) = \{2\}$ и $\pi_0(P(q)) = \pi(P(q)) \setminus \pi(P(2))$ при любом $P(x)$. Таким образом, $\pi_0(n) \subseteq \pi(n)$ для чисел n вида $P(q)$.

Теорема. *Пусть* G — *конечная простая группа, отличная от групп* $PSL_r(q)$ *и* $PSU_r(q)$ *с простым нечётным* r *и* $E_8(q)$ (*всюду* q — *степень простого числа*), *и* π — *подмножество из* $\pi(G)$. *Равносильны следующие условия*:
(A) *группа* G *не* π*-замкнута, а все её максимальные подгруппы* π*-замкнуты*;
(B) $2 \notin \pi$, π *не пусто и выполнено одно из следующих условий*:
(1) $G \cong A_r$, *где* r — *простое число* (≥ 5), *отличное от* $11, 23$ *и чисел вида* $(q^n - 1)/(q - 1)$, *где* q — *степень простого числа и* $n \in \mathbb{N}$, *и* $\pi = \{r\}$;
(2) $G \cong PSL_2(q)$, $q > 5$, $\pi(q) = \{p\}$, *и верно одно из условий*:
($2a$) $q = p$ *и либо* $\pi \subseteq \pi(p + 1) \setminus \{3, 5\}$, *либо* $p \in \pi \subseteq \pi(p(p^2 - 1)) \setminus \{3, 5\}$;
($2b$) $q = p^m > p$ *и* $\pi \subseteq \pi_0(q + 1) \setminus \{5\}$, *причём* $3 \notin \pi$ *при* $p > 2$;
(3) $G \cong Sz(q)$ $(q = 2^{2n+1} \geq 8)$, $\pi \subseteq \pi_0(q^2 + 1)$ *при непростом* $2n + 1$ *и* $\pi \subseteq \pi(q^2 + 1)$ *при простом* $2n + 1$;
(4) $G \cong {}^2G_2(q)$ $(q = 3^{2n+1} \geq 27)$, $\pi \subseteq \pi_0(q^2 - q + 1)$ *при непростом* $2n+1$ *и* $\pi \subseteq \pi(q^2 - q + 1)$ *при простом* $2n + 1$;
(5) $G \cong {}^3D_4(q)$ *и* $\pi \subseteq \pi_0(q^4 - q^2 + 1)$;
(6) $G \cong {}^2F_4(q)$ $(q = 2^{2n+1} \geq 8)$ *и* $\pi \subseteq \pi_0(q^4 - q^2 + 1)$;
(7) G — *спорадическая группа и* (G, π) — *как в предложении* 3.

З а м е ч а н и я. 1. Группы A_r с простым $r = (q^n - 1)/(q - 1)$, как в п. (1), встречаются очень редко (см. замечание 2 к предложению 1.2 ниже).

2. Заметим, что в п. (2) всегда $5 \notin \pi$ (это следует и непосредственно из предложения 1.4).

3. В п. ($2b$) при $p = 2$ (как легко заметить) $3 \in \pi_0(q + 1)$ если и только если m — простое нечётное число.

4. Условия на π в п. (2) накладывают фактически и ограничения на параметр q. Например, условие ($2b$) противоречиво при $q = 9$ и $q = 49$.

5. В пп. (3)–(6) всегда $3 \notin \pi$ (так как 3 не делит m^2+1 и m^4-m^2+1 при любом целом m и $3 \mid q$ в (4)).

6. Пусть G удовлетворяет условию теоремы, G есть минимальная не π-замкнутая группа (т. е. выполнено условие (A) теоремы) и π_1 — непустое подмножество из π. Тогда G может не быть минимальной не π_1-замкнутой группой. Но это верно лишь в том и только в том случае, когда выполнено условие (2a) и $\pi_1 \subseteq \pi(p-1) \setminus \{3,5\}$ (т. е. $p \in \pi \setminus \pi_1$).

Используемые далее обозначения в основном стандартны (см., например, [4–6]). В частности, $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка конечной группы G; если π есть множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; π-холлова подгруппа группы G — это π-подгруппа из G, индекс которой в G есть π'-число (т. е. число, не делящееся на простые числа из π); группа, имеющая нормальную π-холлову подгруппу, называется *π-замкнутой.* Запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B; запись $B =: A$ равносильна записи $A := B$; $\dot{\cup}$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n. G^n есть прямое произведение n экземпляров группы G.

Используются также следующие, несколько видоизменённые, обозначения из Атласа [6, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается “G имеет тип $A.B$” или “G есть группа типа $A.B$”) означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [6] и многих других работах). Запись $G \doteq A_1.A_2.A_3. \ldots .A_n$ при $n \geq 3$ означает, что G имеет возрастающий нормальный ряд с факторами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$; в частности, при любом $i \leq n$ группа G имеет нормальную подгруппу $N_i \doteq A_1.A_2. \ldots .A_i \doteq (A_1.A_2. \ldots .A_{i-1}).A_i$.

Используются также и некоторые произведения бинарных отношений между объектами теории групп; например, $A \cong\leq B$ (существует H с $A \cong H \leq B$), $A >\doteq B$ (существует H с $A > H \doteq B$).

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [7].

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1 [8, теорема 1]. *Конечная неразрешимая группа G имеет точно 3 класса сопряжённых максимальных подгрупп если и только если $G/\Phi(G)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.*

Предложение 1.2. *Пусть $G = A_r$, где r — простое число, $r \geq 5$. Тогда каждая максимальная подгруппа M группы G удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *$M = M_{a,r-a}$, где $M_{1,r-1} \cong A_{r-1}$, $M_{2,r-2} \cong S_{r-2}$ и $M_{a,r-a} \doteq (A_a \times A_{r-a}).Z_2$ при $2 < a \leq (r-1)/2$;*

(2) *$M \doteq Z_r \leftthreetimes Z_{(r-1)/2}$ при r отличном от $7, 11, 17, 23$;*

(3) *$M \cong\leq \mathrm{Aut}(S)$, где $S = \mathrm{Soc}(M) \cong PSL_n(q)$, q — степень простого числа, при $r = (q^n-1)/(q-1)$ (n — простое число); в частности,*
$M \cong PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ при $r = 7$ и $M \doteq PSL_2(16).Z_4$ при $r = 17$;

(4) *$M \cong M_{11}$ при $r = 11$;*

(5) *$M \cong M_{23}$ при $r = 23$.*

Обратно, для любого $i \in \{1,2,3,4,5\}$ группа G имеет максимальную подгруппу M, удовлетворяющую условию (i).

Замечания. 1. В пп. (1)–(5) предложения 1.2 число классов сопряжённых подгрупп, изоморфных M, может быть больше единицы; например, в группе A_{11} — 2 класса сопряжённых подгрупп, изоморфных M_{11} (п. (4)), а в группе A_{13} — 2 класса сопряжённых максимальных подгрупп M, изоморфных $PSL_3(3)$ (п. (3)).

2. В п. (3) подгруппа M не определена однозначно. Уточнены лишь два её частных случая.

3. Подгруппы типа (3) встречаются в группах A_r очень редко. Выпишем, например (используя таблицы из [9]), все такие значения числа r (указывая в скобках соответствующее n) в следующих случаях:

(а) при $q = 2$ и $n \leq 94$: 7 (3), 31 (5), 127 (7), 8191 (13), 131071 (17), 524287 (19), 2147483647 (31), 2305843009213693951 (61), 618970019642690137449562111 (89);

(б) при $q = 3$ и $n \leq 101$: 13 (3), 1093 (7), 797161 (13), 1337547332574898624019733579791287 73 (71).

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1.2. Пусть M — максимальная подгруппа группы $G = A_r$. По теореме О'Нана — Скотта (см. [5, теорема 2.4]) или [10, Appendix, 2-я теорема] любая максимальная подгруппа M группы G (при простом r) удовлетворяет одному из следующих условий:

(A) $M \cong M_{a,b} := (S_a \times S_b) \cap G$, где $r = a + b$ и $a < b$;

(B) $M \cong AGL_1(r) \cap G \doteq Z_r \leftthreetimes Z_{(r-1)/2}$;

(C) $S = \mathrm{Soc}(M) \trianglelefteq M \cong\leq \mathrm{Aut}(S)$, где M и S действуют примитивно на множестве $\{1, \ldots, r\}$, и, следовательно, S имеет максимальную подгруппу индекса r (стабилизатор точки).

Условие (A), очевидно, равносильно условию (1) доказываемого предложения, причём по [11, теорема и табл. I] все подгруппы группы G, изоморфные $M_{a,b}$ при указанных a и b, действительно максимальны в G.

Пусть для подгруппы M группы G выполнено условие (B). Тогда согласно [11, теорема и табл. I] M не максимальна в G в точности тогда, когда $r \in \{7, 11, 17, 23\}$, причём

$Z_7 \leftthreetimes Z_3 \doteq H < PSL_3(2) \cong PSL_2(7) = M$, M максимальна в A_r при $r = 7$,

$Z_{11} \leftthreetimes Z_5 \doteq H < PSL_2(11) \cong< M_{11} = M$, M максимальна в A_r при $r = 11$,

$Z_{17} \leftthreetimes Z_8 \doteq H < PSL_2(16).Z_4 = M$, M максимальна в A_r при $r = 17$,

$Z_{23} \leftthreetimes Z_{11} \doteq H < M_{23} = M$, M максимальна в A_{23} при $r = 23$.

Таким образом, здесь мы получаем утверждения (2), (4), (5) и два частных случая утверждения (3), отмеченные в его формулировке.

Пусть, наконец, для подгруппы M выполнено условие (C) и H — максимальная подгруппа индекса r в S. Тогда по результату Р. Гуральника [12] для S, H и r имеются лишь следующие возможности:

(C1) $S \cong PSL_n(q)$ $(n \geq 2, q \geq 2)$ и $r = |S : H| = (q^n - 1)/(q - 1)$;

(C2) $S \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$, $r = |S : H| = 11$;

(C3) $S \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$, $r = |S : H| = 11$;

(C4) $S \cong M_{23}$, $H \cong M_{11}$, $r = |S : H| = 23$.

Является ли M максимальной в G можно увидеть по [11, теорема и табл. II–IV].

В случае (C1) будет выполнено условие (3) доказываемого предложения. Существование подгруппы S при указанном r обеспечивается упомянутой выше теоремой Гуральника.

В случаях (C2) и (C3), где $r = 11$, подгруппа M из A_{11} изоморфна одной из групп $PSL_2(11)$ и M_{11}. Но максимальной в A_{11} является лишь M_{11} [6, с. 75], и мы получаем условие (4).

Наконец, условие (C4) приводит к условию (5), так как $M_{23} \cong \mathrm{Aut}(M_{23})$.

Предложение 1.2 доказано.

Подгрупповое строение групп $PSL_2(q)$ было определено А. Виманом [13] и Е. Х. Муром [14]. Из их работ (см. [15, разд. 2.1]) (а также из [16, табл. 8.1]) вытекает следующее утверждение (в каждом из пп. (1)–(8) после слова "если" записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряжённых подгрупп в G).

Предложение 1.3. *Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q = p^m$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, и $d := (2, q-1)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G имеет строение, указанное с точностью до изоморфизма в следующем списке*:

(1) $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ — *группа Фробениуса с ядром* E_q (*всегда существует,* 1 *класс*);

(2) $D_{2(q-1)/d}$, *если* $q \notin \{5,7,9,11\}$ (1 *класс*);

(3) $D_{2(q+1)/d}$, *если* $q \notin \{7,9\}$ (1 *класс*);

(4) $PSL_2(q_0)$, *если* $q = q_0^r$, *где* $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r — *простое, и* r *нечётно при нечётном* q (1 *класс при каждом* r);

(5) $PGL_2(q_0)$, *если* q *нечётно и* $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$ (2 *класса*);

(6) S_4, *если* $q = p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 8)$ (2 *класса*);

(7) A_4, *если* $q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \,(\mathrm{mod}\, 40)$ (1 *класс*);

(8) A_5, *если* $q = p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 10)$ *или* $q = p^2$, *где* $p \equiv \pm 3 \,(\mathrm{mod}\, 10)$ (2 *класса*).

Замечания. 1. Мы видим, что случаи (5)–(8) возможны лишь при нечётном q.

2. Из п. (4) следует, что G содержит подгруппу, изоморфную $PSL_2(q_1)$ при любом $q_1 = p^k > 2$, где k делит m.

Предложение 1.4. *Пусть* $G = PSL_2(p^m)$, *где* p — *простое число и* $m \in \mathbb{N}$. *Равносильны следующие условия*:

(1) 5 *делит* $|G|$;

(2) *выполнено одно из условий*:

(2a) $p = 5$;

(2b) $p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$;

(2c) $p \equiv \pm 3 \,(\mathrm{mod}\, 5)$ *и* m *чётно*;

(3) $G \geq\cong A_5$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Предположим, что выполнено условие (1), т. е. число 5 делит p^m, $p^m - 1$ или $p^m + 1$. Если $p \neq 5$, то, очевидно, p удовлетворяет одному из сравнений пп. (2b) и (2c). Для доказательства условия (2) нам нужно ещё показать, что в последнем случае число m чётно. И это действительно так, поскольку для p из п. (2c) мы имеем $p \equiv \pm 3 \,(\mathrm{mod}\, 5)$, $p^2 \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$ и (по индукции по $n \in \mathbb{N}$) $p^{2n+1} = p^{2n-1}p^2 \equiv (\pm 3)(-1) \equiv \pm 3 \,(\mathrm{mod}\, 5)$, и, следовательно, $5 \nmid |PSL_2(p^{2n+1})|$. (Однако $5 \mid |PSL_2(p^{2n})|$, так как $p^{2n} \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$.)

(2) $\Rightarrow$ (3): В случае (2a) группа G имеет согласно предложению 1.3 (см. также замечание 2) подгруппу $H \cong PSL_2(5)$, которая изоморфна A_5.

Пусть выполнено условие (2b). Тогда, очевидно, p нечётно и согласно замечанию 2 предложения 1.3 группа G имеет подгруппу $H \cong PSL_2(p)$. Однако, с учетом условия $p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$, которое можно записать и в виде $p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 10)$, H согласно п. (8) предложения 1.3 имеет подгруппу, изоморфную A_5.

Пусть выполнено условие (2c) (здесь возможен и случай $p = 2$). Тогда ввиду чётности m согласно замечанию 2 после предложения 1.3 группа G имеет подгруппу $H \cong PSL_2(p^2)$, если p нечётно, и подгруппу, изоморфную $PSL_2(4)$, если $p = 2$. Но согласно п. (8) предложения 1.3 H имеет подгруппу, изоморфную A_5, а $PSL_2(4) \cong A_5$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

Предложение 1.4 доказано.

Предложение 1.5. *Пусть* $G = PSL_2(q)$. *Тогда*

(1) *при любом простом* $q > 3$ *группа* G *содержит максимальную подгруппу, изоморфную одной из групп* S_4, A_4, A_5 *типов* (6)–(8) *предложения* 1.3 *соответственно*;

(2) *если* G *содержит максимальную подгруппу, изоморфную* A_4, *то* G *не содержит максимальных подгрупп, изоморфных* S_4 *и* A_5.

Доказательство. (1): Пусть $q = p > 3$ — простое число. Очевидно, мы можем считать, что $p > 5$. Согласно предложению 1.3 группа G содержит подгруппу, изоморфную S_4 если и только если $p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 8)$, т. е. если и только если $p \equiv x \,(\mathrm{mod}\, 40)$, где $x \in X := \{1, 7, 9, 17, 23, 31, 33, 39\}$, а также содержит максимальную подгруппу, изоморфную A_4, если и только если $p \equiv y \,(\mathrm{mod}\, 40)$, где $y \in Y := \{3, 13, 27, 37\}$ (случай $p = 5$ мы исключили), и содержит максимальную подгруппу, изоморфную A_5, если и только если $p \equiv \pm 1 \,(\mathrm{mod}\, 10)$, т. е. $p \equiv z (\mathrm{mod}\, 40)$, где $z \in Z := \{1, 9, 11, 19, 21, 23, 31, 39\}$. Поскольку каждое нечётное число из отрезка $[1, 40]$, не кратное 5, встречается по крайней мере в одном из приведённых выше множеств X, Y и Z, то утверждение (1) справедливо.

(2): Предположим, что G содержит максимальную подгруппу $M \cong A_4$. M может быть типов (6) или (4) предложения 1.3. Если M — типа (4) предложения 1.3, то $q = p$ — простое число. Поскольку в обозначениях предыдущего пункта $Y \cap (X \cup Z) = \varnothing$, то G не содержит максимальных подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, типов (6) и (8) предложения 1.3 соответственно. Но нужно ещё показать, что G не содержит максимальных подгрупп $PGL_2(3) \cong S_4$ типа (5) предложения 1.3 и максимальных подгрупп $PSL_2(5) \cong A_5$ типа (4) предложения 1.3. Однако, в этих случаях должно быть $q = 3^2$ или $q = 3^r$ при некотором простом r. Но у нас $q = p$ — простое число.

Если M — типа (4) предложения 1.3 ($M \cong PSL_2(3) \cong A_4$), то $q = 3^r$ некотором простом нечётном r. Тогда G не содержит максимальных подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, типов (6) и (8) предложения 1.3 соответственно. Но нужно ещё показать, что G не содержит максимальных подгрупп $PGL_2(3) \cong S_4$ типа (5) предложения 1.3 и максимальных подгрупп $PSL_2(5) \cong A_5$ типа (4) предложения 1.3. Однако в этих случаях должно быть $q = 3^2$ или $q = 5^l$ при некотором простом l, но у нас $q = 3^r$ с нечётным r.

Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. *Пусть G и π удовлетворяют условию (A) теоремы и K — секция некоторой собственной подгруппы группы G. Если K не имеет неединичных нормальных π-холловых подгрупп, то $\pi(K) \subseteq \pi'$. В частности, простые неабелевы секции собственных подгрупп группы G все являются π'-группами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно вытекает из [2, лемма 2.1] (собственная секция простой неабелевой группы G есть секция некоторой собственной подгруппы группы G).

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная простая группа, удовлетворяющая условию теоремы. Ввиду предложений 2 и 3 G должна быть группой одного из типов (1), (2), (5)–(8) предложения 2. И нам нужно убедиться, что для каждой такой G (при возможном уточнении её параметров, как в пп. (1) и (2b)) в условии (B) теоремы указаны все возможные π со свойством условия (A). По-существу, нужно убедиться, что для любой такой группы G условия (A) и (B) равносильны.

Случай 1. Пусть $G = A_r$, где r — простое число и $r \geq 5$ (т. е. G — группа типа (1) предложения 2). Предположим, что существует множество π, которое удовлетворяет условию (A) для рассматриваемого G.

Максимальные подгруппы группы G перечислены в пп. (1)–(5) предложения 1.2. Поскольку G имеет максимальную подгруппу A_{r-1} (см. п. (1)) с $\pi(A_{r-1}) = \pi((r-1)!)$, которая, очевидно, не может быть π-замкнутой, так как $2 \notin \pi$ по предложению 2 и A_{r-1} не имеет неединичных нормальных холловых подгрупп нечётного порядка, то, следовательно, $\pi \cap \pi(A_{r-1}) = \varnothing$, т. е. $\pi = \{r\}$.

Обратно, если $\pi = \{r\}$, то из предложения 1.2 следует, что все максимальные подгруппы в G π-замкнуты если и только если r отлично от $11, 23$ и чисел вида $(q^n - 1)/(q - 1)$, где q — степень простого числа и $n \in \mathbb{N}$, так как подгруппы типов (3)–(5) предложения 1.2 не r-замкнуты.

Итак, в случае 1 условия (A) и (B) теоремы равносильны.

Случай 2. Пусть $G = PSL_2(q)$, $q > 5$, т. е. выполнено условие (2) предложения 2.

Тогда $|G| = q(q^2-1)/d$, где $d = (2, q-1)$, и, очевидно, $\pi(G) = \pi(q) \dot\cup \pi((q-1)/d) \dot\cup \pi((q+1)/d)$. Максимальные подгруппы групп $G = PSL_2(q)$ приведены в предложении 1.3. Особую роль играют подгруппы $B \doteq E_q \leftthreetimes Z_{q-1}$, $D_- \cong D_{2(q-1)}$, $D_+ \cong D_{2(q+1)}$, назовём их *подгруппами 1-го типа*; они почти всегда (за исключением случая $q \in \{7, 9, 11\}$) существуют. Остальные подгруппы, а именно подгруппы вида $PSL_2(q_0)$, $PGL_2(q_0)$ и подгруппы, изоморфные A_4, S_4,

A_5, назовём *подгруппами 2-го типа*. Они существуют не всегда, причём в случае, когда $q = 2^m$, где m — простое число (и только в этом случае), отсутствуют вовсе.

Предположим, что множество π удовлетворяет условию (A) для рассматриваемой G. Так как по условию (A) все максимальные подгруппы группы G π-замкнуты, то все подгруппы 2-го типа в G должны быть π'-группами (так как они не имеют неединичных нормальных подгрупп нечётного порядка). Кроме того, $5 \in \pi'$ по предложению 1.4. Таким образом,

$$\{5\} \cup \pi(H) \subseteq \pi' \text{ при } H \in \{PSL_2(q_0), PGL_2(q_0), A_4, S_4, A_5\}\ . \tag{2.1}$$

Случай 2a. Пусть $q = p$.

По условию $p > 5$. Предположим сначала, что $p \in \{7, 11\}$ (особенный случай предложения 1.3). Группа $G \cong PSL_2(7)$ имеет лишь максимальные подгруппы, изоморфные $Z_7 \leftthreetimes Z_3$ и S_4. В этом случае $\pi = \{7\}$ и, значит, выполнено условие п. (2a) теоремы. Группа $G \cong PSL_2(11)$ имеет точно 4 класса максимальных подгрупп: $B \cong Z_{11} \leftthreetimes Z_5$, $D_+ \cong D_{12}$ и 2 класса подгрупп, изоморфных A_5. В этом случае $\pi = \{11\}$, т. е. снова выполнено условие (2a) теоремы.

Далее мы предполагаем, что $p \notin \{7, 11\}$, т. е. $p > 11$. В этом случае согласно предложению 1.3 группа G имеет все три максимальные подгруппы B, D_-, D_+ 1-го типа и не имеет подгрупп вида $PSL_2(q_0)$ и $PGL_2(q_0)$. Согласно предложению 1.1 группа G должна иметь по крайней мере ещё одну максимальную подгруппу. Поэтому G содержит подгруппу, изоморфную одной из групп S_4, A_4 и A_5. В любом случае по (2.1) $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi'$.

2a1. Предположим, что $p \notin \pi$. Поскольку подгруппа $B = E_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}$ не имеет неединичных нормальных p'-подгрупп нечётного порядка, то $\pi(Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi'$, и тогда (см. конец предыдущего абзаца) должно быть $\pi \subseteq \pi(p+1) \setminus \{2, 3, 5\}$, т. е. реализуется первая возможность утверждения (2a) теоремы.

2a2. Предположим, что $p \in \pi$. Тогда все максимальные подгруппы 1-го типа, очевидно, являются π_1-замкнутыми при любом $\pi_1 \subseteq \pi(G) \setminus \{2, 3, 5\}$. Но этим свойством обладают и все максимальные подгруппы 2-го типа, так как они являются $\{2, 3, 5\}$-группами. Таким образом, реализуется вторая возможность утверждения (2a) теоремы.

Итак, в случае 2a выполнено условие (2a) теоремы.

Случай 2b распадается на следующие два подслучая.

2b1. Пусть $q = 2^m$ ($m \geq 3$, так как $q > 5$). Если m — простое число, то согласно предложению 1.1 B, D_-, D_+ — единственные максимальные подгруппы в G; из их строения видно, что $\pi \subseteq \pi(2^m + 1)$ и, значит, выполнено условие (2b) теоремы, так как $\pi_0(2^m + 1) = \pi(2^m + 1)$ при простом m.

Пусть m — непростое число. Тогда по предложению 1.3 кроме подгрупп B, D_-, D_+ группа G имеет ещё лишь максимальные подгруппы вида $H_{q_0} = PSL_2(q_0)$, где $q = q_0^b$, $q_0 > 2$ и b — простое число. Поэтому $\pi \subseteq \pi(q+1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(PSL_2(q_0)) = \pi(q+1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi((q_0+1)(q_0-1)) = \pi(q+1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0+1) = \pi_0(q+1)$ (учитываем, что $(q+1, q_0-1) = (q_0^b+1, q_0-1) = (q_0^b+q_0, q_0-1) = (q_0^{b-1}+1, q_0-1) = \ldots = (q_0+1, q_0-1) = 1$). Итак, при произвольном $q = 2^m$ с $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие (2b) теоремы (при $p = 2$). (Заметим, что в этом случае $3 \in \pi_0(q+1) \Leftrightarrow m$ — простое нечётное.)

2b2. Предположим, что $q = p^m$, $p > 2$, $m > 1$.

Рассмотрим наименьший случай: $q = 9$. Группа $G \cong PSL_2(9)$ имеет точно 5 классов максимальных подгрупп: $B \cong E_9 \leftthreetimes Z_4$ и по 2 класса подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, причём $\pi(G) = \pi(A_5)$. Поэтому $G \cong PSL_2(9)$ не удовлетворяет условию (A) теоремы ни при каком π. Это утверждение можно (в случае, если G и π удовлетворяют условию (A)) записать и в виде условия (2b): $\pi \in \pi(9+1) \setminus \{5\}$, которое противоречиво, поскольку в (B) $2 \notin \pi$ и $\pi \neq \varnothing$.

Пусть теперь $q > 9$. Тогда по предложению 1.3 G имеет максимальную подгруппу вида $PSL_2(p^a)$ или $PGL_2(p^a)$, где $ar = m$, $a \geq 1$, r — простое число, и теперь по (2.1) $\{2, 3, 5, p\} \subseteq \pi'$. Отсюда и из наличия в G подгруппы Фробениуса $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/2}$, следует, что $\pi(q-1)/2) \subseteq \pi'$, и тогда должно быть $\pi \subseteq \pi(q+1) \setminus \{2,3,5\}$. Следовательно, выполнено утверждение (2b) теоремы.

Таким образом, для любой G, указанной в условии (2), утверждения (A) и (B) теоремы равносильны.

Случай 3. Пусть $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$. $(Sz(2) \doteq Z_5 \rtimes Z_4.)$

Тогда $|G| = q^2(q-1)(q^2+1) = q^2(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)(q+\sqrt{2q}+1)$, причём множители q^2, $q-1$, $q+\sqrt{2q}+1$, $q-\sqrt{2q}+1$ попарно взаимно просты.

Согласно работе М. Судзуки [17] (см. также теорему 4.1 в [5]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$ — группа Фробениуса;
(2) $D \cong D_{2(q-1)}$;
(3) $F_+ \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \rtimes Z_4$ — группа Фробениуса;
(4) $F_- \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \rtimes Z_4$ — группа Фробениуса;
(5) $H_{q_0} \cong Sz(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — (нечётное) простое число и $q_0 > 2$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G. Тогда $2 \notin \pi$ по предложению 1 и, очевидно, $\pi \neq \varnothing$. По предложению 1.6 подгруппы типов (1), (2) и (5) не могут быть π-замкнутыми. Подгруппы же типов (3) и (4) π-замкнуты если и только если $\pi \subseteq q^2+1$. Отсюда следуют следующие два утверждения. Во-первых, если $2n+1$ не является простым числом, т. е. $S(q) \neq \{2\}$, то

$$\pi' \supseteq \{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(H_{q_0})) = \{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi((q_0-1)(q_0^2+1))) =$$
$$\{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2+1)) \text{ и } \pi \subseteq \pi(q^2+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2+1)) = \pi_0(q^2+1)).$$

Если же $2n+1$ — простое число, т. е. $S(q) = \{2\}$, то п. (5) приведённого списка пуст, и в этом случае $\pi \subseteq \pi(q^2+1)$.

Таким образом, верно утверждение $(B)(3)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 4. Пусть $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} \geq 27$. $({}^2G_2(3) \cong P\Gamma L_2(8) \doteq PSL_2(8) \rtimes Z_3.)$

Тогда $|G| = q^3(q-1)(q^3+1) = 2^3 q^3 \dfrac{q-1}{2}\dfrac{q+1}{4}(q+\sqrt{3q}+1)(q-\sqrt{3q}+1)$, где все множители последнего разложения попарно взаимно просты. Согласно [18; 19] (см. также [5, теорема 4.2]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq P \rtimes Z_{q-1}$, $|P| = q^3$;
(2) $D \cong (E_4 \times D_{(q+1)/2}) \rtimes Z_3$;
(3) $M \cong Z_2 \times PSL_2(q)$;
(4) $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \rtimes Z_6$ — группа Фробениуса;
(5) $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \rtimes Z_6$ — группа Фробениуса;
(6) $H_{q_0} \cong {}^2G_2(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — простое число и $q_0 > 3$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

По предложению 1.6 подгруппы типа (3), а потому и типов (1) и (2), а также типа (6) не могут быть π-замкнутыми. Подгруппы же типов (4) и (5) π-замкнуты если и только если $\pi \subseteq \pi(q^2-q+1) = \pi((q^3+1)/(q+1))$.

Таким образом, если $2n+1$ не является простым числом, т. е. $S(q) \neq \{3\}$, то

$$\pi' \supseteq \{2,3\} \cup \pi(q^2-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(H_{q_0})) = \{2,3\} \cup \pi(q^2-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2-q_0+1), \text{ и}$$
$$\pi \subseteq \pi(q^2-q+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2-q_0+1) = \pi_0(q^2-q+1).$$

Если же $2n+1$ — простое число, т. е. $S(q) = \{3\}$, то п. (6) пуст, и в этом случае $\pi \subseteq \pi(q^2-q+1)$.

Итак, справедливо утверждение $(B)(4)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 5. Пусть $G \cong {}^3D_4(q)$, $q = p^n$, где p — простое число и $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$, причём $q^8+q^4+1 = (q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1)$ и $q^6-1 = (q^4+q^2+1)(q^2-1)$. Таким образом,

$$\pi(G) = \pi(q) \,\dot\cup\, \pi(q^4-q^2+1) \,\dot\cup\, \pi(q^6-1). \tag{5.1}$$

Приведём список максимальных подгрупп группы G (он получен в [20] и приведён также в [5, теорема 4.3]):

$M_1 \doteq A \leftthreetimes SL_2(q^3).Z_{q-1}$, где $|A| = q^9$;
$M_2 \doteq B \leftthreetimes SL_2(q).Z_{q^2-1}$, где $|B| = q^{11}$;
$M_3 \cong G_2(q)$ (порядка $q^6(q^6-1)(q^2-1)$);
$M_4 \cong PGL_3(q)$, если $q \equiv 1 \pmod 3$;
$M_5 \cong PGU_3(q)$, если $2 < q \equiv 2 \pmod 3$;
$M_6^{q_0} \cong {}^3D_4(q_0)$, если q_0 делит q и $q = q_0^r$, где r — простое число;
$M_7 \cong SL_2(q^3) \times SL_2(q)$, если q чётно;
$M_8 \doteq Z_2{}^{\cdot}(PSL_2(q^3) \times PSL_2(q)) \leftthreetimes Z_2$, если q нечётно;
$M_9 \doteq SL_3(q).Z_{q^2+q+1}.Z_2$;
$M_{10} \doteq SU_3(q).Z_{q^2-q+1}.Z_2$;
$M_{11} \doteq (Z_{q^2+q+1} \times Z_{q^2+q+1}) \leftthreetimes SL_2(3)$;
$M_{12} \doteq (Z_{q^2-q+1} \times Z_{q^2-q+1}) \leftthreetimes SL_2(3)$;
$M_{13} \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

Обратим внимание на "большую" подгруппу $M_3 \cong G_2(q)$. Ясно, что $\pi' \supseteq \pi(G_2(q))$ (по предложению 1.6). Если из приведённого списка максимальных подгрупп исключить все подгруппы M_i с $\pi(M_i) \subseteq \pi(G_2(q))$, в том числе саму $G_2(q)$, то, как легко увидеть, в нём останутся лишь подгруппы вида $M_6^{q_0} \cong {}^3D_4(q_0)$ с $q_0 \in S(q)$ и подгруппа $M_{13} \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$.

Как видно из (5.1), число q^4-q^2+1 взаимно просто с $|G_2(q)|$. Таким образом, поскольку в списке максимальных подгрупп группы G присутствует и подгруппа ${}^3D_4(p)$ (при простом n), то в любом случае (при простом и непростом n)

$$\pi' \supseteq \pi(G_2(q)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi({}^3D_4(q_0))) = \pi(q(q^6-1)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4-q_0^2+1)$$

(здесь мы учли что $\pi({}^3D_4(q_0)) = \pi(q_0(q_0^4-q_0^2+1)(q_0^6-1))$ и q_0^6-1 делит q^6-1), и

$$\pi \subseteq \pi(q^4-q^2+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4-q_0^2+1) = \pi_0(q^4-q^2+1).$$

Следовательно, верно утверждение $(B)(7)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 6. Пусть $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$, где $q^6+1 = (q^2+1)(q^4-q^2+1)$, $q^2+1 = (q+\sqrt{2q}+1)(q-\sqrt{2q}+1)$ и $q^4-q^2+1 = ab$, где $a = q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)$ и $b = q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1))$, причём

$$\pi(G) = \{2\} \,\dot\cup\, \pi(q^6+1) \,\dot\cup\, \pi(q^3+1) \,\dot\cup\, \pi(q-1),$$
$$\pi(q^6+1) = \pi(q^2+1) \,\dot\cup\, \pi(q^4-q^2+1), \quad \text{и } \pi(q^4-q^2+1) = \pi(a) \,\dot\cup\, \pi(b).$$

Рассмотрим список $\mathcal{S}$ максимальных подгрупп группы G, полученный в [21] (см. также [5, теорема 4.5]):

$M_1 \doteq A \leftthreetimes (Sz(q) \times Z_{q-1})$, где $|A| = q^{10}$;
$M_2 \doteq B \leftthreetimes GL_2(q)$, где $|B| = q^{11}$;
$M_3 \doteq SU_3(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_4 \doteq PGU_3(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_5 \doteq Sz(q) \leftthreetimes Z_2$;

$M_6 \doteq Sp_4(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_7^{q_0} \cong {}^2F_4(q_0)$, если q_0 делит q и $q = q_0^r$, где r — простое нечётное число;
$M_8 \doteq (Z_{q+1} \times Z_{q+1}) \leftthreetimes GL_2(3)$;
$M_9 \doteq (Z_{q+\sqrt{2q}+1} \times Z_{q+\sqrt{2q}+1}) \leftthreetimes 4S_4$;
$M_{10} \doteq (Z_{q-\sqrt{2q}+1} \times Z_{q-\sqrt{2q}+1}) \leftthreetimes 4S_4$;
$M_{11} \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{12}$;
$M_{12} \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{12}$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

Очевидно, что π' содержит $\pi(M_i)$ при $i \leq 6$ и $M_7^{q_0}$ (из-за отсутствия в M_i неединичных нормальных подгрупп нечётного порядка), а также при $i \in \{8, 9, 10\}$, так как числа $q+1, q+\sqrt{2q}+1, q-\sqrt{2q}+1$ делят $|Sz(q)|$. Таким образом,

$$\pi' \supseteq (\pi(G) \setminus \pi(ab)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi({}^2F_4(q_0))). \tag{6.1}$$

Поскольку $\pi(G) \setminus \pi(ab) = \{2\} \cup \pi(q^2+1) \cup \pi(q^3+1) \cup \pi(q-1)$ и $\pi({}^2F_4(q_0)) = \{2\} \cup \pi(q_0^2+1) \cup \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1) \cup \pi(q_0^3+1) \cup \pi(q_0 - 1)$, то (6.1) можно переписать в виде (заметим, что $q = q_0^r$, где r — нечётное число, так как оно делит $2n+1$, и поэтому q^2+1 делится на q_0^2+1)

$$\pi' \supseteq (\pi(G) \setminus \pi(ab)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1)). \tag{6.2}$$

Кроме того, так как $(ab, |G|/ab) = 1$ и $(a, b) = 1$, то из (6.2) получаем

$$\pi \subseteq \pi(ab) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1)) = \pi(q^4 - q^2 + 1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1) = \pi_0(q^4 - q^2 + 1)$$

и, следовательно, верно утверждение $(B)(6)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. школа-конф. по теор. групп, посв. 70-летию В. В. Кабанова: сб. ст. Нальчик: К-БГУ, 2014. С. 6–9.
2. **Белоногов В. А.** Конечные простые группы, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 25–34.
3. **Белоногов В. А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
4. **Gorenstein D.** Finite Groups. New York: Harper & Row, 1968. 527 p.
5. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer-Verlag, 2009. 298 p.
6. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
7. **Belonogov V. A.** Finite groups in which all maximal subgroups are π-closed // Междунар. конф. “Алгебра и логика: Теория и приложения”, посвящ. 70-летию В. М. Левчука: тез. докл. Красноярск, 2016. С. 90.
8. **Белоногов В. А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп// Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
9. Factorizations of $b^n \pm 1$, $b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$ up to high powers / J. Brillhart et al. Providence: American Math. Society, 1988. 236 p. (Contemporary Math.; vol. 22).
10. **Aschbacher M., Scott L.** Maximal subgroups of finite groups // J. Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 44–80.
11. **Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.** The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.
12. **Guralnick R.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.

13. **Wiman A.** Bestimmung aller Untergruppen einer doppelt unendlichen Reihe von einfachen Gruppen // Stockh. Acad. Bihang. 1899. Vol. 25, no. 2. P. 1–47.
14. **Moor E. H.** The subgroups of the generalized finite modular group // Dicennial Publications of the University of Chicago. Chicago: The University of Chicago Press, 1903. Vol. 9. P. 141–190.
15. **King O. H.** The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configuratios // Surveys in combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 327.)
16. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)
17. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
18. **Левчук В. М., Нужин Я. Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
19. **Kleidman P. B.** The maximal subgroups of the finite Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 117, no. 1. P. 30–71.
20. **Kleidman P. B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.
21. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139, no. 1. P. 52–69.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 29.12.2015