ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно разных характеристик. Доказано, что если G — классическая группа достаточно большого лиева ранга, то графы простых чисел групп G и G_1 могут совпадать только при выполнении одного из трех случаев. Также доказано, что если $G = A_1(q)$ и G_1 — классическая группа, то графы простых чисел групп G и G_1 совпадают только если $\{G, G_1\}$ равно $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$ или $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.

Ключевые слова: конечная простая классическая группа, граф простых чисел, спектр.

M. R. Zinov'eva. On finite simple classical groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. We define a graph on $\pi(G)$ with the following adjacency relation: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. Let G and G_1 be two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders q and q_1, respectively, with different characteristics. It is proved that, if G is a classical group of a sufficiently high Lie rank, then the prime graphs of the groups G and G_1 may coincide only in one of three cases. It is also proved that, if $G = A_1(q)$ and G_1 is a classical group, then the prime graphs of the groups G and G_1 coincide only if $\{G, G_1\}$ is equal to $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, or $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.

Keywords: finite simple classical group, prime graph, spectrum.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-101-116

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одним и тем же графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случаях, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Мы в [4] исследовали этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В данной работе продолжается это исследование. Мы рассматриваем две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является классической группой.

[1]Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 15-11-10025).

Далее $q = p^f$ и $q_1 = {p_1}^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа.

Мы рассматриваем только простые группы. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $D^{\varepsilon}_n(q)$ обозначается $D_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2D_n(q)$ при $\varepsilon = -$, а через $E^{\varepsilon}_6(q)$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечных простых классических групп $A^{\pm}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$, $B_n(q)$, где $n \geq 5$, $C_n(q)$, где $n \geq 5$, $D^{\pm}_n(q)$, где $n \geq 5$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [5–8], мы получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $G = A_1(q)$ и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая классическая группа над полем из q_1 элементов. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то $\{G, G_1\}$ равно $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$ или $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.*

Теорема 2. *Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Если $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$ и $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$;*

(2) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где либо n четно, либо $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 нечетно;*

(3) $\{G, G_1\} = \{D^{\varepsilon}_n(q), D^{\varepsilon}_n(q_1)\}$, *где n четно и $\varepsilon \in \{+,-\}$.*

Замечание. Нам известны следующие пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одним и тем же графом простых чисел: $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, $\{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$, $\{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$, $\{G_2(3), A_1(13)\}$.

Гипотеза. Указанные в замечании пары исчерпывают все пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одним и тем же графом простых чисел.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [5; 6] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [7; 8] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Индуцированный подграф называется *кокликой*, если его вершины попарно несмежны. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной по включению кокликой* будем называть коклику, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Согласно [8, определения 3.3–3.8] определяются подмножества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ множества $\pi(G)$. Если G — одна из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A^{\varepsilon}_2(q)$, то $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ определяются согласно [8, определения 3.3–3.7]. Если G не является одной из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A^{\varepsilon}_2(q)$, то согласно [8, определение 3.8], через $\theta(G)$ обозначается пересечение всех коклик максимального размера графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди, 1892 [9]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

Таблица 1

Конечные простые группы G лиева типа над полем характеристики 2 с $t(G) = 5$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$C_6(2)$		2	5	1	$\{7,11,13,17,31\}$	$\{\varnothing\}$
$C_6(q)$	$q>2$	2	5	1	$\{r_5,r_8,r_{10},r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
$A_8(q)$	$q>2$	3	5	1	$\{r_5,r_6,r_7,r_8,r_9\}$	$\{\varnothing\}$
$A_9(q)$	$q>2$	3	5	1	$\{r_6,r_7,r_8,r_9\}$	$\{r_5\}$, $\{r_{10}\}$
${}^2A_8(q)$		3	5	1	$\{r_3,r_8,r_{10},r_{14},r_{18}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2A_9(q)$		3	5	1	$\{r_3,r_8,r_{14},r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$C_5(q)$	$q>2$	3	5	1	$\{r_3,r_5,r_6,r_8,r_{10}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2D_7(2)$		3	5	1	$\{11,13,31,43\}$	$\{7\}$,$\{17\}$
$A_{10}(2)$		3	5	2	$\{17,73,127,r_{11}\}$	$\{11\}$,$\{31\}$
$F_4(q)$	$q>2$	3	5	3	$\{r_3,r_4,r_6,r_8,r_{12}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2D_6(2)$		4	5	1	$\{11,13,17,31\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
${}^2D_6(q)$	$q>2$	4	5	1	$\{r_5,r_8,r_{10},r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$E_6(2)$		4	5	2	$\{5,17,31,73\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
$E_6(q)$	$q>2$	4	5	2	$\{r_5,r_8,r_9\}$	$\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_{12}\}$, $\{r_6,r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	$q>2$	4	5	2	$\{r_8,r_{10},r_{18}\}$	$\{r_3,r_{12}\}$, $\{r_4,r_6\}$, $\{r_4,r_{12}\}$
${}^2F_4(q)$	$q\geq 32$	4	5	3	$\{s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2E_6(2)$		4	5	4	$\{11,13,17,19\}$	$\{5\}$,$\{7\}$

Согласно [7] если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r,q)=1$, то через $e(r,q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если q нечетно, то $e(2,q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с $e(r,q)=n$ является *примитивным простым делителем* числа q^n-1. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа q^n-1, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Для натурального n через n_p обозначается p-часть числа n.

Определяем, как в [7; 8], функции $\eta(x)$, $\nu(x)$ и $\nu_\varepsilon(x)$ на множестве натуральных чисел:

$$\eta(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \text{ нечетном},\\ x/2 & \text{при } x \text{ четном},\end{cases}\quad \nu(x)=\begin{cases} x & \text{при } x\equiv 0 \pmod 4,\\ x/2 & \text{при } x\equiv 2 \pmod 4,\\ 2x & \text{при } x\equiv 1 \pmod 2,\end{cases}\quad \nu_\varepsilon(x)=\begin{cases} x & \text{при } \varepsilon=+,\\ \nu(x) & \text{при } \varepsilon=-.\end{cases}$$

Пусть n — натуральное число. Следуя [7; 8], положим $m_1(G,n)=3^{2n+1}-1$, $m_2(G,n)=3^{2n+1}+1$, $m_3(G,n)=3^{2n+1}-3^{n+1}+1$, $m_4(G,n)=3^{2n+1}+3^{n+1}+1$, $m_1(F,n)=2^{2n+1}-1$, $m_2(F,n)=2^{2n+1}+1$, $m_3(F,n)=2^{4n+2}+1$, $m_4(F,n)=2^{4n+2}-2^{2n+1}+1$, $m_5(F,n)=2^{4n+2}-2^{3n+2}+2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, $m_6(F,n)=2^{4n+2}+2^{3n+2}+2^{2n+1}+2^{n+1}+1$.

Если G — одна из групп ${}^2F_4(2^{2n+1})$ или ${}^2G_2(3^{2n+1})$, то через $S_i(G)$ обозначаются множество $\pi(m_i(F,n))\setminus\{3\}$ для $G={}^2F_4(2^{2n+1})$ $(i=1,\ldots,6)$ и множество $\pi(m_i(G,n))\setminus\{2\}$ для $G={}^2G_2(3^{2n+1})$ $(i=1,\ldots,4)$. Если группа G фиксирована, то положим $S_i=S_i(G)$ и через s_i обозначим любой элемент из S_i.

На основе результатов [5–8] нами были составлены таблицы (см. [4, табл. 1 и 2]), в которых описаны некоторые числовые характеристики и максимальные коклики графов простых чисел конечных простых групп G лиева типа с $t(G)\leq 6$ для четного q и с $t(G)\leq 4$ для нечетного q. Мы продолжим эти описания, приведя все конечные простые группы G лиева типа с $t(G)=5$ (табл. 1, 2).

Лемма 2 (Героно, 1870 [10]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a-q^b=1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Т а б л и ц а 2

Конечные простые группы G лиева типа над полем нечетной характеристики p с $t(G)=5$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$A_8(q)$		2	5	1	$\{r_5,r_6,r_7,r_8,r_9\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2A_8(q)$		2	5	1	$\{r_3,r_8,r_{10},r_{14},r_{18}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(q)$, $C_5(q)$	$q\neq 3$	2	5	1	$\{r_3,r_5,r_6,r_8,r_{10}\}$	$\{\varnothing\}$
$A_9(q)$		2	5	1	$\{r_6,r_7,r_8,r_9\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
${}^2A_9(q)$		2	5	1	$\{r_3,r_8,r_{14},r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$B_6(q)$, $C_6(q)$		2	5	1	$\{r_5,r_8,r_{10},r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
${}^2D_6(q)$		2	5	1	$\{r_5,r_8,r_{10},r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$F_4(q)$		2	5	2	$\{r_3,r_4,r_6,r_8,r_{12}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(3)$, $C_5(3)$		2	5	2	$\{7,11,13,41,61\}$	$\{\varnothing\}$
$E_6(q)$		3	5	2	$\{r_5,r_8,r_9\}$	$\{r_3,r_4\}$, $\{r_4,r_{12}\}$, $\{r_6,r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$		3	5	2	$\{r_8,r_{10},r_{18}\}$	$\{r_3,r_{12}\}$, $\{r_4,r_6\}$, $\{r_4,r_{12}\}$
${}^2G_2(3^{2n+1})$	$n\geq 1$	3	5	3	$\{3,s_1,s_2,s_3,s_4\}$	$\{\varnothing\}$

Лемма 3. *Пусть p — простое число, f — натуральное число и α — четное натуральное число. Тогда уравнение $2^{2f}+2^f+1=p^\alpha$ не имеет решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как α четно, то $\alpha=2k$ для некоторого натурального k. Поэтому уравнение $2^{2f}+2^f+1=p^\alpha$ можно записать в виде $2^f(2^f+1)=(p^k-1)(p^k+1)$. Учитывая, что p нечетно, получаем $(p^k-1,p^k+1)=2$. Таким образом, 2^{f-1} делит p^k-1 или p^k+1.

Предположим, что 2^{f-1} делит p^k-1. Получаем $p^k-1=2^{f-1}t$ и $p^k+1=2(2^f+1)/t$, где t — нечетное натуральное число. Если $t=1$, то $2^{f-1}+2=2^{f+1}+2$; противоречие. Если $t\geq 3$, то $3\cdot 2^{f-1}+1\leq p^k\leq 2(2^f+1)/3-1$, т. е. $2^f\leq -8/5$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случае, когда 2^{f-1} делит p^k+1. Лемма доказана.

Лемма 4 [8, предложение 2.4]. *Пусть $r,s\in\pi(B_n(q))\setminus\{2,p\}$, $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(k)\leq\eta(l)$. Тогда r,s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l)>n$ и l/k не является нечетным натуральным числом.*

Лемма 5 [8, предложение 2.5]. *Пусть $r,s\in\pi(D_n^\epsilon(q))\setminus\{2,p\}$, $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(k)\leq\eta(l)$. Тогда r,s несмежны в $GK(D_n^\epsilon(q))$ тогда и только тогда, когда $2\cdot\eta(k)+2\cdot\eta(l)>2n-(1-\epsilon(-1)^{k+l})$, l/k не является нечетным натуральным числом, и если $\epsilon=+$, то система равенств $n=l=2\eta(l)=2\eta(k)=2k$ не верна.*

Далее в леммах $q=p^f$ и $q_1=p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа, G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно.

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 6. *Пусть G — одна из групп $A_2(2)$, $A_2(4)$, $A_6(2)$, $A_7(2)$, $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, $A_8(2)$, $A_9(2)$, $A_{10}(2)$, $A_{11}(2)$, $B_5(3)$, $C_5(2)$, $C_5(3)$, $C_6(2)$, $C_7(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, $D_7(2)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_7(2)$, ${}^2A_8(2)$, ${}^2A_9(2)$, ${}^2A_{10}(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*: (1) $\{G,G_1\}=\{A_1(7),A_1(8)\}$; (2) $\{G,G_1\}=\{{}^2A_3(3),A_1(49)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G_1) = GK(G)$ для некоторой группы G_1.

Если G — одна из групп $B_5(3)$, $C_5(2)$, $C_5(3)$, $C_6(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_7(2)$, ${}^2A_8(2)$, ${}^2A_9(2)$, ${}^2A_{10}(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по [11] $\pi(G_1) \neq \pi(G)$ и, следовательно, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = A_2(2) \cong A_1(7)$. Имеем $\pi(G_1) = \pi(G) = \{2,3,7\}$ и по [11] $G_1 \in \{A_1(8), {}^2A_2(3)\}$. По [4, табл. 2] имеем $G_1 \neq {}^2A_2(3)$. Значит, $G_1 = A_1(8)$. Выполняется утверждение (1) леммы.

Пусть $G \in \{A_2(4), {}^2A_3(3)\}$. Имеем $\pi(G_1) = \pi(G) = \{2,3,5,7\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(49), A_2(4), A_3(2), C_2(7), C_3(2), D_4(2), {}^2A_2(5), {}^2A_3(3)\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $\{G, G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$. Выполняется утверждение (2) леммы.

Пусть $G = A_7(3)$. Имеем $\pi_1(G_1) = \pi_1(G) = \{2,3,7,11,13,41\}$. Поэтому $p_1 \in \{2,7,11,13,41\}$. По [4, табл. 2] кокликами максимального размера в $GK(A_7(3))$ являются $\{5,7,11,1093\}$ и $\{7,11,41,1093\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем G_1 — одна из групп: $A_2(q_1)$, где $(q_1-1)_3 = 3$ и $q_1+1 \neq 2^k$; $A_6(q_1)$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^k$; ${}^2A_6(q_1)$; $B_4(q_1)$; $C_4(q_1)$; или ${}^2D_4(q_1)$, причем q_1 нечетно, если $G \neq C_4(q_1)$. Пусть $G_1 = A_6(q_1)$. По [4, табл. 2] коклики максимального размера в $GK(A_6(q_1))$ имеют вид $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_6(q_1), r_7(q_1)\}$. Из описания коклик максимального размера в $GK(G_1)$ получаем, что $p_1 \notin \{7,11,41\}$. Значит, $q_1 = 13^f$. Имеем $\{2,3,30941\} = \pi(13^5-1) \subseteq \pi(q^5-1) \subseteq \pi_1(A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(3))$; противоречие. Случай $G_1 = {}^2A_6(q_1)$ рассматривается аналогично случаю $G_1 = A_6(q_1)$. Пусть $G_1 = B_4(q_1)$ или $C_4(q_1)$. По [4, табл. 1, 2] коклики максимального размера в $GK(B_4(q_1))$ имеют вид $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$. По малой теореме Ферма $11 \notin R_i(q_1)$, где $i \in \{3,4,6,8\}$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2D_4(q_1)$. По [4, табл. 2] коклики максимального размера в $GK({}^2D_4(q_1))$ имеют вид $\{p_1, r_3(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$ или $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$. По малой теореме Ферма $p_1 = 11$, $5 \in R_4(q_1)$, $7, 1093 \in R_3(q_1) \cup R_6(q_1)$. Из равенства графов $GK(A_7(3))$ и $GK({}^2D_4(q_1))$ получаем равенство коклик $\{5,7,11,1093\} = \{p_1, r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1)\}$; противоречие. В случаях $G_1 = A_2(q_1)$ и $G_1 = {}^2A_2(q_1)$ все коклики максимального размера содержат 3; противоречие.

Пусть $G = A_7(5)$. Аналогично случаю $G = A_7(3)$ получаем противоречие.

Пусть $G = A_7(9)$. Имеем $\pi_1(G_1) = \pi_1(G) = \{2,3,5,7,11,13,17,41,61,73,193\}$. По [4, табл. 2] кокликой максимального размера в $GK(A_7(9))$ является, например, $\{11,41,73,547\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $G_1 \in \{A_6(q_1), {}^2A_6(q_1)\}$, где q_1 четно. Пусть $G_1 = A_6(q_1)$. Тогда $\{31\} = \pi(2^5-1) \subseteq \pi(q^5-1) \subseteq \pi_1(A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(9))$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2A_6(q_1)$. По [4, табл. 1] коклики максимального размера в $GK({}^2A_6(q_1))$ имеют вид $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_{10}(q_1), r_{14}(q_1)\}$. По малой теореме Ферма и из сравнения коклик максимального размера получаем $41 \in R_4(q_1)$. Так как 41 делит $q_1^4 - 1 = 2^{4f_1} - 1$, то 5 делит f_1. Имеем $\{3,5,11,31,41\} = \pi(2^{20}-1) \subseteq \pi(q_1^4-1) \subseteq \pi_1({}^2A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(9))$; противоречие.

Пусть $G \in \{A_6(2), A_7(2)\}$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2,3,5,\dots,127\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(19^3), A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $G_1 \in \{A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. Заметим, что $\pi_1(A_6(2)) = \{2,3,5,7,31\}$, $\pi_1(A_7(2)) = \{2,3,5,7,17,31\}$, $\pi_1(A_2(19)) = \{2,3,5,19\}$, $\pi_1(A_2(107)) = \{2,3,53,107\}$, $\pi_1(G_2(19)) = \{2,3,5,19,381\}$. Значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G \in \{A_8(2), A_9(2), A_{10}(2), A_{11}(2), C_7(2), D_7(2)\}$. Тогда по [8, табл. 2, 3] $t(G) \geq 4$ и $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2,3,5,\dots,127\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(19^3), A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. По [4, табл. 2] имеем $t(G_1) \leq 3$, значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_7(3)$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2,3,5,\dots,547\}$. По [11] $G_1 \in \{{}^2A_2(41), {}^2A_3(41)\}$. По [4, табл. 2] имеем $G_1 = {}^2A_2(41)$. Заметим, что $\pi_1(G) = \{2,3,5,7,13,41,61\}$, $\pi_1({}^2A_2(41)) = \{2,3,5,7,41\}$. Значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_7(7)$. Аналогично случаю $G = A_7(9)$ получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $G = A_1(q)$ и $G_1 = A_1(q_1)$ — неизоморфные простые группы для $q, q_1 > 3$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда $\{G, G_1\} \in \{\{A_1(9), A_1(4)\}, \{A_1(9), A_1(5)\}, \{A_1(7), A_1(8)\}\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = A_1(q)$ и $3 < q = p^f \equiv \epsilon \pmod 4$ для $\epsilon = \pm 1$. Предположим, что $G = A_1(q_1)$, $q_1 = 2^{f_1} > 2$. Тогда либо $\pi(q-\epsilon) = \{2\}$ и $\pi(q_1 - 1) = \{p\}$, либо

$\pi(q-\epsilon)=\{2\}$ и $\pi(q_1+1)=\{p\}$.

Пусть $\pi(q-\epsilon)=\{2\}$, $\pi(q_1-1)=\{p\}$ и $\pi((q+\epsilon)/2)=\pi(q_1+1)$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f-\epsilon=2^s,\\ 2^{f_1}-1=p^t,\\ \pi((p^f+\epsilon)/2)=\pi(2^{f_1}+1), \end{cases} \tag{1}$$

где s, t — натуральные числа.

Предположим, что $\epsilon=1$. Тогда $p^f-1=2^s$. По лемме 2 отсюда следует, что либо $p^f=9$ и $2^s=8$, либо $f=1$, либо $s=1$. Если $s=1$, то $q=3$; противоречие.

Пусть $q=9$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-1=3^t$, т. е. $2^{f_1}-3^t=1$. Так как $q_1>2$, то $f_1>1$. По лемме 2 имеем $t=1$. Отсюда $q_1=4$. Так как $GK(A_1(9))=GK(A_1(4))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(9),A_1(4)\}$.

Пусть $f=1$, т. е. $q=p$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-1=p^t$, т. е. $2^{f_1}-p^t=1$. Так как $f_1>1$, то по лемме 2 имеем $t=1$. Из (1) получаем, что $\pi((p+1)/2)=\pi(p+2)$; противоречие, так как $(p+2,(p+1)/2)=1$.

Предположим, что $\epsilon=-1$. Тогда $p^f+1=2^s$, т. е. $2^s-p^f=1$. По лемме 2 отсюда следует, что $f=1$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-p^t=1$. Так как $f_1>1$, то по лемме 2 имеем $t=1$. Тогда $2^{f_1}=p+1=2^s$, поэтому $f_1=s$. Из (1) получаем, что $\pi(2^{s-1}-1)=\pi((p-1)/2)=\pi(p+2)=\pi(2^s+1)$. По лемме 1 при $s\neq 3$ существует примитивный простой делитель u числа $2^{2s}-1$, т. е. u делит 2^s+1 и не делит $2^{s-1}-1$; противоречие. При $s=3$ имеем $p=7$ и $q=7$. Так как $f_1=s=3$, то $q_1=8$. Так как $GK(A_1(7))=GK(A_1(8))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(7),A_1(8)\}$.

В случаях $\pi(q-\epsilon)=\{2\}$, $\pi(q_1+1)=\{p\}$ и $\pi((q+\epsilon)/2)=\pi(q_1-1)$ аналогично получаем противоречие.

Предположим, что $G_1=A_1(q_1)$ и $3<q_1={p_1}^{f_1}\equiv\epsilon_1 \pmod 4$ для $\epsilon_1=\pm1$. Тогда $\pi(q-\epsilon)=\pi(q_1-\epsilon_1)$, $\pi((q+\epsilon)/2)=\{p_1\}$, $\pi((q_1+\epsilon_1)/2)=\{p\}$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f+\epsilon=2p_1^{m_1},\\ p_1^{f_1}+\epsilon_1=2p^m,\\ \pi(p^f-\epsilon)=\pi(p_1^{f_1}-\epsilon_1), \end{cases} \tag{2}$$

где m, m_1 — натуральные числа.

Предположим, что $\epsilon=\epsilon_1=1$. Из (2) следует, что $\pi(p^f-1)=\pi(2p^m-2)=\pi(p^m-1)$. Если $f>m$ или $(f,p)\neq(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель u числа p^f-1, значит, u не делит p^m-1; противоречие. Пусть $(f,p)=(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s. Тогда $\pi(p-1)=\pi(p^2-1)=\pi(p^m-1)$. Если $m\geq 3$, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель v числа p^m-1, значит, v не делит $p-1$; противоречие. Если $f<m$ или $(m,p)\neq(2,2^s-1)$ для некоторого простого s, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель u_1 числа p^m-1, значит, u не делит p^f-1; противоречие. Пусть $(m,p)=(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s. Тогда $\pi(p-1)=\pi(p^2-1)=\pi(p^f-1)$. Если $f\geq 3$, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель v_1 числа p^f-1, значит, v_1 не делит $p-1$; противоречие. Поэтому либо $f=m$, либо $p=2^s-1$ и $(f,m)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

Пусть $f=m$. Из (2) следует, что $p_1^{f_1}=2(2p_1^{m_1}-1)-1=4p_1^{m_1}-3$. Поэтому $p_1=3$ и $3^{f_1-1}=4\cdot 3^{m_1-1}-1$. Если $m_1-1>1$ и $f_1-1>1$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая не делится; противоречие. Если $m_1=2$, то $3^{f_1-1}=11$; противоречие. Если $f_1=1$, то $3^{m_1-1}=1/2$; противоречие. Если $f_1=2$, то $m_1=1$. Итак, $m_1=1$. Тогда $3^{f_1-1}=3$, т. е. $f_1=2$ и $q_1=9$. Из (2) следует, что $q=5$. Так как $GK(A_1(5))=GK(A_1(9))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(5),A_1(9)\}$.

Пусть $p=2^s-1$ и $(f,m)\in\{(1,2),(2,1)\}$. Без ограничения общности можно считать, что $f=2$, $m=1$. Из (2) следует, что $p_1^{f_1}=2p-1$ и $p^2=2p_1^{m_1}-1$. Поэтому $(p_1^{f_1}+1)^2=4(2p_1^{m_1}-1)$.

Отсюда $p_1^{2f_1}+2p_1^{f_1}-8p_1^{m_1}+5=0$, поэтому $p_1=5$. Имеем $5^{2f_1}+2\cdot 5^{f_1}-8\cdot 5^{m_1}+5=0$. Пусть $f_1<m_1$. Тогда $5^{f_1}(5^{f_1}-8\cdot 5^{m_1-f_1}+2)+5=0$. Если $f_1\geq 2$, то получаем противоречие. Если $f_1=1$, то $8\cdot 5^{m_1-1}=8$, т. е. $m_1=1$, но $m_1\geq 2$; противоречие. Пусть $f_1\geq m_1$. Тогда $5^{m_1}(5^{2f_1-m_1}+2\cdot 5^{f_1-m_1}-8)+5=0$. Если $m_1\geq 2$, то получаем противоречие. Значит, $m_1=1$. Тогда $5^{2f_1-1}+2\cdot 5^{f_1-1}-7=0$. Если $f_1\geq 2$, то получаем противоречие. Следовательно, $f_1=1$ и $q_1=5$. Из (2) следует, что $p=3$ и $q=9$. Так как $GK(A_1(9))=GK(A_1(5))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(9),A_1(5)\}$.

Аналогично случаю $\epsilon=\epsilon_1=1$ рассматриваются случаи $\epsilon\epsilon_1=-1$. Получаем, что система (2) не имеет решений.

Предположим, что $\epsilon=\epsilon_1=-1$. Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} p^f=2p_1^{m_1}+1,\\ p_1^{f_1}=2p^m+1,\\ \pi(p^f+1)=\pi(p_1^{f_1}+1), \end{cases} \tag{3}$$

где m, m_1 — натуральные числа.

Отсюда $\pi(p^f+1)=\pi(p^m+1)$. Если $f\neq m$, то ввиду леммы 1 получаем противоречие. Значит, $f=m$. Из системы (3) следует, что $\pi(p_1^{f_1}+1)=\pi(p_1^{m_1}+1)$. Если $f_1\neq m_1$, то ввиду леммы 1 получаем противоречие. Значит, $f_1=m_1$. Из системы (3) следует, что $p^f=-1$; противоречие. Лемма доказана.

Пусть $G=A_1(q)$. Если G_1 — классическая группа, то по [4, табл. 1, 2] имеем $G_1\in\{A_1(q_1)$, $A_2(2)$, ${}^2A_3(3)$, ${}^2A_5(2)\}$ и из лемм 6, 7 получаем заключение теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2

Для любой неединичной конечной группы G положим $\mathcal{T}(G)=\{t(r,G)\mid r\in\pi(G)\}$ и будем рассматривать $\mathcal{T}(G)$ как строго убывающую последовательность $(t(r_1,G),t(r_2,G),\ldots)$, где r_i — некоторые числа из $\pi(G)$.

Если G — группа лиева типа над полем порядка q, то иногда при $q=2$ одно из чисел $t(r,G)$ для некоторого $r\in\pi(G)$ исчезает; если при $q\neq 2$ оно есть, мы пишем $(t(r,G))$.

Лемма 8. *Пусть $G=B_n(q)$ или $C_n(q)$, где $4\leq n\leq 24$, $(n,q)\neq(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)$ или $n=27$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*: $n=4$, $\mathcal{T}(G)=(4,2)$; $n=5$, $\mathcal{T}(G)=(5,4,3,2)$; $n=6$, $\mathcal{T}(G)=(5,3,2)$; $n=7$, $\mathcal{T}(G)=(6,3,2)$; $n=8$, $\mathcal{T}(G)=(7,5,4,2)$; $n=9$, $\mathcal{T}(G)=(8,7,5,4,3,2)$; $n=10$, $\mathcal{T}(G)=(8,7,4,3,2)$; $n=11$, $\mathcal{T}(G)=(9,7,5,3,2)$; $n=12$, $\mathcal{T}(G)=(10,8,6,5,4,2)$; $n=13$, $\mathcal{T}(G)=(11,10,9,6,4,3,2)$; $n=14$, $\mathcal{T}(G)=(11,10,8,6,5,3,2)$; $n=15$, $\mathcal{T}(G)=(12,10,8,6,5,3,2)$; $n=16$, $\mathcal{T}(G)=(13,11,10,7,4,2)$; $n=17$, $\mathcal{T}(G)=(14,13,12,10,8,7,5,4,3,2)$; $n=18$, $\mathcal{T}(G)=(14,13,11,9,7,5,3,2)$; $n=19$, $\mathcal{T}(G)=(15,13,12,9,8,7,6,3,2)$; $n=20$, $\mathcal{T}(G)=(16,14,13,11,9,8,6,5,4,2)$; $n=21$, $\mathcal{T}(G)=(17,16,15,13,12,11,9,6,5,4,3,2)$; $n=22$, $\mathcal{T}(G)=(17,16,14,13,10,9,8,6,4,3,2)$; $n=23$, $\mathcal{T}(G)=(18,16,15,13,11,9,6,5,3,2)$; $n=24$, $\mathcal{T}(G)=(19,17,16,14,12,10,8,7,5,4,2)$; $n=27$, $\mathcal{T}(G)=(21,19,18,16,14,12,11,10,8,7,5,3,2)$.

Доказательство. Пусть $n=5$. Тогда $t(G)=5$. Пусть $k=1$. Найдем $t(r_1,G)$. Пусть $r,s\in\pi(B_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $e(r,q)=1$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(l)$. По лемме 4 r,s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l)>4$ и l не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l=10$ и $t(r_1,G)=2$.

Пусть $k=2$. Найдем $t(r_2,G)$. Пусть $r,s\in\pi(B_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $e(r,q)=2$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(l)$. По лемме 4 r,s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l)>4$ и $l/2$ не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l=5$ и $t(r_2,G)=2$.

Пусть $k = 4$. Найдем $t(r_4, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2, p\}$ такие, что $e(r, q) = 4$, $l = e(s, q)$ и $2 \leq \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l) > 3$ и $l/4$ не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l \in \{5, 8, 10\}$ и $t(r_4, G) = 4$.

По табл. 1 и 2 $\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$, поэтому $t(r_k, G) = 5$, где $k \in \{3, 5, 6, 8, 10\}$. По [7, табл. 4, 6] $t(p, G) = 3$. Таким образом, $\mathcal{T}(G) = (5, 4, 3, 2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G = D_n(q)$, где $5 \leq n \leq 22$ и $(n, q) \neq (5, 2), (6, 2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: $n = 5$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 6$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 7$, $\mathcal{T}(G) = (6, (5), 3, 2)$; $n = 8$, $\mathcal{T}(G) = (6, (5), 3, 2)$; $n = 9$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 10$, $\mathcal{T}(G) = (7, 6, 4, 3, 2)$; $n = 11$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, (4), 3, 2)$; $n = 12$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 13$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, (5), 4, 3, 2)$; $n = 14$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 5, 3, 2)$; $n = 15$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 16$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 9, 7, 6, 4, 3, 2)$; $n = 17$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 18$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 9, 7, 6, 5, 3, 2)$; $n = 19$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, 6, (5), 3, 2)$; $n = 20$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 12, 11, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 21$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 22$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 12, 10, 8, 5, 4, 3, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о использует [7, табл. 4, 6] и лемму 5 и аналогично доказательству леммы 8. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G = {}^2D_n(q)$, где $4 \leq n \leq 22$, $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2), (5, 3), (6, 2), (7, 2)$ или $n \in \{24, 26, 28, 30\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: $n = 4$, $\mathcal{T}(G) = (4, 2)$; $n = 5$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 6$, $\mathcal{T}(G) = (5, 4, 2)$; $n = 7$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (6, 5, 3, 2)$; $n = 7$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (6, 5, 3)$; $n = 8$, $\mathcal{T}(G) = (7, 6, 4, 2)$; $n = 9$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 9$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3)$; $n = 10$, $\mathcal{T}(G) = (8, 5, 4, 2)$; $n = 11$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, (5), 4, 3, 2)$; $n = 11$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3)$; $n = 12$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 13$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 13$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 3)$; $n = 14$, $\mathcal{T}(G) = (11, 9, 7, 6, 4, 2)$; $n = 15$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 15$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3)$; $n = 16$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 8, 7, 5, 4, 2)$; $n = 17$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, (5), 4, 3, 2)$; $n = 17$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3)$; $n = 18$, $\mathcal{T}(G) = (14, 12, 10, 8, 5, 4, 2)$; $n = 19$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, (6), 5, 3, 2)$; $n = 19$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 3)$; $n = 20$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 12, 10, 8, 7, 6, 4, 2)$; $n = 21$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 21$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3)$; $n = 22$, $\mathcal{T}(G) = (17, 15, 14, 11, 10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 24$, $\mathcal{T}(G) = (19, 18, 17, 15, 13, 11, 10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 26$, $\mathcal{T}(G) = (20, 18, 17, 15, 13, 11, 8, 6, 4, 2)$; $n = 28$, $\mathcal{T}(G) = (22, 21, 20, 18, 17, 14, 13, 11, 8, 7, 5, 4, 2)$; $n = 30$, $\mathcal{T}(G) = (23, 21, 20, 18, 16, 14, 13, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о использует [7, табл. 4, 6] и лемму 5 и аналогично доказательству леммы 8. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$ при $(\varepsilon, q) \neq (+, 2)$ и $n \geq 13$ при $(\varepsilon, q) = (+, 2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: (1) n нечетно, $(n, \varepsilon, q) \notin \{(13, +, 2), (15, +, 2), (17, +, 2), (19, +, 2)\}$, $\mathcal{T}(G) = ((n+1)/2, (n-1)/2, (n-3)/2, (n-5)/2, (n-7)/2, \dots, 2)$; (2) $(n, \varepsilon, q) = (13, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; (3) $(n, \varepsilon, q) = (15, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (4) $(n, \varepsilon, q) = (17, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (5) $(n, \varepsilon, q) = (19, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (6) n четно, $(n, \varepsilon, q) \notin \{(8, -, 2), (10, -, 2), (12, -, 2), (14, +, 2), (16, +, 2), (18, +, 2), (20, +, 2)\}$, $n_3 \neq 3$ при $(\varepsilon, q) = (-, 2)$, $n_2 \neq 4$ при $(\varepsilon, q) = (-, 3)$, $\mathcal{T}(G) = (n/2, n/2 - 1, n/2 - 2, n/2 - 3, n/2 - 4, \dots, 2)$; (7) $n_3 = 3$ при $(\varepsilon, q) = (-, 2)$, $n_2 = 4$ при $(\varepsilon, q) = (-, 3)$, $\mathcal{T}(G) = (n/2, n/2 - 1, n/2 - 2, n/2 - 3, n/2 - 4, \dots, 3)$; (8) $(n, \varepsilon, q) = (14, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; (9) $(n, \varepsilon, q) = (16, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (10) $(n, \varepsilon, q) = (18, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (11) $(n, \varepsilon, q) = (20, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$. Более того, если $(\varepsilon, q) = (+, 2)$ и $13 \leq n \leq 20$, то $GK(G) \neq GK(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n нечетно. Тогда $t(G) = (n+1)/2$. Пусть k — натуральное число такое, что $\nu_\varepsilon(k) = (n-1)/2$, и r — простое число такое, что $k = e(r,q)$. Найдем $t(r_k, G)$. По [7, предложение 3.1] r и p смежны. Пусть $s \in \pi(A^\varepsilon_{n-1}(q)) \setminus \{p\}$, $l = e(s,q)$ и $\nu_\varepsilon(l) = 1$. По [7, предложения 4.1,4.2] r и s смежны. Пусть $s \in \pi(A^\varepsilon_{n-1}(q)) \setminus \{2,p\}$, $l = e(s,q)$ и $2 \le \nu_\varepsilon(k) \le \nu_\varepsilon(l)$. По [7, предложения 2.1,2.2] r,s несмежны в $GK(A^\varepsilon_{n-1}(q))$ тогда и только тогда, когда $\nu_\varepsilon(k)+\nu_\varepsilon(l) > n$ и $\nu_\varepsilon(k)$ не делит $\nu_\varepsilon(l)$. Отсюда $\nu_\varepsilon(l) \in \{(n+3)/2, (n+5)/2, \ldots n-2, n\}$. Следовательно, $t(r_k, G) = (n-1)/2$. Рассматривая натуральные числа k такие, что $\nu_\varepsilon(k) \in \{(n-3)/2, (n-5)/2, \ldots\}$, и простые числа r такие, что $k = e(r,q)$, получаем утверждение леммы. Случай четного n рассматривается аналогично. Выполнен один из пп. (1)–(11).

Пусть $G \in \{A_{12}(2), A_{13}(2)\}$. По леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $G_1 \in \{D_9(q_1), {}^2D_9(q_1)\}$. Ввиду [5; 6] $2 = s(G) \ne s(G_1) = 1$, поэтому $GK(G) \ne GK(G_1)$. Пусть $G \in \{A_{14}(2), A_{15}(2)\}$. По леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $G_1 \in \{B_9(q_1), C_9(q_1)\}$. Ввиду [7, табл. 4, 6] имеем $3 = t(2,G) \ne t(2,G_1) = 2$, поэтому $GK(G) \ne GK(G_1)$. Если $G \in \{A_{18}(2), A_{19}(2)\}$, то по леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $GK(G) \ne GK(G_1)$.

Пусть $G \in \{A_{16}(2), A_{17}(2)\}$. По леммам 8–10 и и доказанному в первом абзаце имеем $G_1 \in \{D_{11}(q_1), {}^2D_{11}(q_1)\}$. По [5; 6] $s(G) = 2$, $s(D_{11}(q_1)) = 2$ при $q_1 \in \{3,5\}$ и $s({}^2D_{11}(q_1)) = 2$ при $q_1 = 3$. Ввиду [7, табл. 4, 6] $3 = t(2,G) \ne t(2, D_{11}(3)) = 2$, поэтому $G_1 \in \{D_{11}(5), {}^2D_{11}(3)\}$. Так как $23 \in \pi_1(A_{16}(2)) \setminus (\pi_1(D_{11}(5)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $23 \in \pi_1(A_{17}(2)) \setminus (\pi_1(D_{11}(5)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $29 \in \pi_1(D_{11}(5)) \setminus (\pi_1(A_{16}(2)) \cup \pi_1(A_{17}(2)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $37 \in \pi_1({}^2D_{11}(3)) \setminus (\pi_1(A_{16}(2)) \cup \pi_1(A_{17}(2)) \cup \pi_1(D_{11}(5)))$, то $GK(G) \ne GK(G_1)$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $G = B_n(q)$ или $C_n(q)$, где $n \ge 25$ и $n \ne 27$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n \equiv 0 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1, 3n/4-1, 3n/4-2, 3n/4-4, 3n/4-5, \ldots)$;

(2) $n \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+5/4, 3n/4+1/4, 3n/4-3/4, 3n/4-11/4, 3n/4-15/4, \ldots)$;

(3) $n \equiv 2 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/2, 3n/4-1/2, 3n/4-5/2, 3n/4-7/2, 3n/4-11/2, \ldots)$;

(4) $n \equiv 3 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+3/4, 3n/4-5/4, 3n/4-9/4, 3n/4-17/4, 3n/4-21/4, \ldots)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \equiv 0 \pmod 4$. Ввиду [8, табл. 3] имеем $t(G) = 3n/4+1$, и $\{r_i \mid n/2 \le \eta(i) \le n\}$ — коклика максимального размера в $GK(G)$. По [12] $|G| = q^{n^2}\prod_{i=1}^n (q^{2i}-1)/d$, где $d = (2, q-1)$.

Пусть $k = n/2-1$. Найдем $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r,s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l) > n/2+1$, т. е. $\eta(l) \in \{n/2+2, \ldots, n\}$. Значит, $l \in \{n/2+3, n/2+5, \ldots, n-1, 2(n/2+2), \ldots, 2n\}$. Так как $3(n/2-1) > n-1$, то l/k не является нечетным натуральным числом для любого l. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n/2+3, \ldots, 2n\}$, получаем $3n/4-2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_{n/2-1}, G) = 3n/4-1$.

Пусть $k = n/2-3$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $t(r_{n/2-3}, G) = 3n/4-4$.

Пусть $k \le n/2-5$ и k нечетно. Оценим сверху число $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r,s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l) > n-k$, т. е. $\eta(l) \in \{n-k+1, \ldots, n\}$. Значит, $l \in \{n-k+2, n-k+4, \ldots, n-1, 2(n-k+1), \ldots, 2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k+2, \ldots, 2n\}$, получаем не более $3k/2-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k, G) \le 3k/2+1/2 \le 3n/4-7$.

Пусть $k = n-2$. Как и ранее, находим, что $t(r_{n-2}, G) = 3n/4-1$. Если $k = n-4$, то $t(r_{n-4}, G) = 3n/4-2$. Если $k = n-6$, то $t(r_{n-6}, G) = 3n/4-4$. Если $k = n-8$, то $t(r_{n-8}, G) = 3n/4-5$.

Пусть $k \le n-10$ и k четно. Оценим сверху число $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r,s несмежны в $GK(B_n(q))$

тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l)>n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l)>n-k/2$, т. е. $\eta(l)\in\{n-k/2+1,\dots,n\}$.

Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k\le n-12$. Таким образом, $l\in\{n-k/2+1,n-k/2+3,\dots,n-1,2(n-k/2+1),2(n-k/2+2),\dots,2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k/2+1,\dots,2n\}$, получаем не более $3k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\le 3k/4+1\le 3/4(n-12)+1=3n/4-8$.

Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k\le n-10$. Таким образом, $l\in\{n-k/2+2,n-k/2+4,\dots,n-1,2(n-k/2+1),2(n-k/2+2),\dots,2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k/2+2,\dots,2n\}$, получаем не более $3k/4-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\le 3k/4+1/2\le 3/4(n-10)+1/2=3n/4-7$.

Таким образом, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+1,3n/4-1,3n/4-2,3n/4-4,3n/4-5,\dots)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $G=D_n(q)$, где $n\ge 23$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n\equiv 0\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4,3n/4-1,3n/4-3,3n/4-4,3n/4-6,\dots)$;

(2) $n\equiv 1\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+1/4,3n/4-3/4,3n/4-7/4,3n/4-11/4,3n/4-15/4,3n/4-19/4,\dots)$;

(3) $n\equiv 2\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4-1/2,3n/4-3/2,3n/4-5/2,3n/4-9/2,3n/4-11/2,\dots)$;

(4) $n\equiv 3\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+3/4,3n/4-1/4,3n/4-5/4,3n/4-9/4,3n/4-13/4,3n/4-17/4,\dots)$.

Доказательство. Пусть $n\equiv 0\pmod 4$. Ввиду [8, табл. 3] имеем $t(G)=3n/4$, и $\{r_i\mid n/2\le\eta(i)\le n, i\ne 2n\}$ — коклика максимального размера в $GK(G)$. По [12] $|G|=q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, где $d=(4,q^n-1)$.

Пусть $k=n/2-1$. Найдем $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\le\eta(k)\le\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>n$, т. е. $l\in\{n+2,n+4,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n+2,\dots,2(n-1)\}$, получаем $n/2-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l>n/2+1$, т. е. $l\in\{n/2+3,n/2+5,\dots,n-1\}$. Так как $3(n/2-1)>n-1$, то l/k не является нечетным натуральным числом для любого l. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n/2+3,\dots,n-1\}$, получаем $n/4-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_{n/2-1},G)=3n/4-1$.

Пусть $k=n/2-3$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $t(r_{n/2-3},G)=3n/4-4$.

Пусть $k\le n/2-5$ и k нечетно. Оценим сверху число $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\le\eta(k)\le\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>2n-2k-2$, т. е. $l\in\{2n-2k,2n-2k+2,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{2n-2k,\dots,2(n-1)\}$, получаем k попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l>n-k$, т. е. $l\in\{n-k+2,n-k+4,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k+2,\dots,n-1\}$, получаем не более $k/2-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\le 3k/2+1/2\le 3n/4-7$.

Пусть $k=n-2$. Как и ранее, находим, что $t(r_{n-2},G)=3n/4-1$. Если $k=n-4$, то $t(r_{n-4},G)=3n/4-3$. Если $k=n-6$, то $t(r_{n-6},G)=3n/4-4$. Если $k=n-8$, то $t(r_{n-8},G)=3n/4-6$.

Пусть $k\le n-10$ и k четно. Оценим сверху число $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\le\eta(k)\le\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>2n-k$, т. е. $l\in\{2n-k+2,2n-k+4,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{2n-k+2,\dots,2(n-1)\}$, получаем не более $k/2-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n-k/2-1$.

Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k \le n-12$. Таким образом, $l \in \{n-k/2+1, n-k/2+3,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k/2+1,\dots,n-1\}$, получаем $k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G) \le 3k/4 \le 3/4(n-12) = 3n/4-9$.

Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k \le n-10$. Таким образом, $l \in \{n-k/2+2, n-k/2+4,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k/2+2,\dots,n-1\}$, получаем $k/4+1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G) \le 3k/4+1/2 \le 3/4(n-10)+1/2 = 3n/4-7$.

Таким образом, $\mathcal{T}(G) = (3n/4, 3n/4-1, 3n/4-3, 3n/4-4, 3n/4-6,\dots)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть* $G = {}^2D_n(q)$, *где* $n \ge 23$ *и* $n \ne 24, 26, 28, 30$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n \equiv 0 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1, 3n/4, 3n/4-1, 3n/4-3, 3n/4-4, 3n/4-6,\dots)$;

(2) $n \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/4, 3n/4-3/4, 3n/4-7/4, 3n/4-11/4, 3n/4-15/4, 3n/4-19/4,\dots)$;

(3) $n \equiv 2 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/2, 3n/4-3/2, 3n/4-5/2, 3n/4-9/2, 3n/4-11/2,\dots)$;

(4) $n \equiv 3 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+3/4, 3n/4-1/4, 3n/4-5/4, 3n/4-9/4, 3n/4-13/4, 3n/4-17/4,\dots)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Лемма 15. *Пусть* $\{G, G_1\}$ — *одна из пар* $\{A_8^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_8^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{A_9^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_9^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{A_6^\varepsilon(q), D_5^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, $\{A_6^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{A_7^\varepsilon(q), D_5^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, $\{A_7^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{D_5^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{D_7^\varepsilon(q), D_8(q_1)\}$, *где* $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$. *Тогда графы* $GK(G)$ *и* $GK(G_1)$ *не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Пусть $\{G, G_1\}$ равно $\{A_9(q), B_5(q_1)\}$ или $\{A_9(q), C_5(q_1)\}$. Так как $t(2,G) = t(2,G_1)$, то по [7, табл. 4, 6] q и q_1 нечетны. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_9(q)\}$ при $(q-1)_2 = 2$; $\{2, r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_2 > 2$; $\{r_2(q), r_9(q)\}$; $\{5, r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_5 > 5$, $5 \mid (q-1)$; $\{r_1(q), r_{10}(q)\}$, где $r_1(q) \ne 5$; $\{5, r_9(q), r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_5 = 5$; $\{p, r_9(q), r_{10}(q)\}$; $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_5(q_1)\}$ при $(q_1-1)_2 = 2$; $\{2, r_{10}(q_1)\}$ при $(q_1-1)_2 > 2$; $\{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \ne 2$; $\{r_2(q_1), r_5(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \ne 2$; $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$.

Пусть $(q-1)_2 = 2$ и $(q_1-1)_2 = 2$. Если $\{2, r_9(q)\}$ — некоторая коклика, содержащая 2 в $GK(A_9(q))$, то $\{2, r_9(q)\} = \{2, r_5(q_1)\}$ для некоторого $r_5(q_1) \in R_5(q_1)$, поэтому $R_9(q) \subseteq R_5(q_1)$. Обратное включение тоже верно. Значит, $R_9(q) = R_5(q_1)$. Максимальные коклики одного порядка в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$ одинаковы. Но множество троек вида $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ не совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$; противоречие. В случае, когда $(q-1)_2 = 2$ и $(q_1-1)_2 > 2$, аналогично получаем противоречие.

Пусть $(q-1)_2 > 2$ и $(q_1-1)_2 = 2$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $R_{10}(q) = R_5(q_1)$. Заметим, что множество троек вида $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$, поэтому $p_1 \in R_3(q) \cup R_8(q)$. Так как множество троек вида $\{p, r_9(q), r_{10}(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$, то $p_1 \in R_9(q)$; противоречие. В случае $(q-1)_2 > 2$ и $(q_1-1)_2 > 2$ аналогично получаем противоречие.

Случаи, когда $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A_8^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_8^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{{}^2A_9(q), B_5(q_1)\}$ или $\{{}^2A_9(q), C_5(q_1)\}$ рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), D_5(q_1)\}$. Так как по [5;6] имеем $s(A_6^\varepsilon(q)) = 2$, то $s(D_5(q_1)) = 2$ и $q_1 \in \{2,3,5\}$. По лемме 6 $GK(G_1) \ne GK(G)$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случаях $\{G, G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), {}^2D_5(q_1)\}$ и $\{G, G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{A_7(q), D_5(q_1)\}$. Как и в случае $\{G, G_1\} = \{A_9(q), B_5(q_1)\}$, вычисляя максимальные по включению коклики порядков 2, 3 и 4, получаем, что максимальные коклики вида $\{r_4(q), r_5(q), r_6(q), r_7(q)\}$ из $GK(G)$ не совпадают с максимальными кокликами из $GK(G_1)$; противоречие.

Случаи, когда $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{{}^2A_7(q), D_5(q_1)\}$, $\{A_7^\varepsilon(q), {}^2D_5(q_1)\}$ или $\{A_7^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_5(q), D_6(q_1)\}$. Так как $t(2, G) = t(2, G_1)$, то по [7, табл. 4, 6] q нечетно и если q_1 четно, то $q \equiv 5 \pmod 8$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_5(q)\}$ при $q \equiv 3 \pmod 4$; $\{2, r_8(q)\}$ при $q \equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q), r_8(q)\}$, где $r_1(q) \neq 2$; $\{r_2(q), r_5(q)\}$, где $r_2(q) \neq 2$; $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8$; $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_5(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 3 \pmod 4$; $\{2, r_{10}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $\{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \neq 2$; $\{r_2(q_1), r_5(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \neq 2$; $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$.

Предположим сначала, что q_1 четно и $q \equiv 5 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и в $GK(G_1)$, получаем, что любая тройка вида $\{2, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ совпадает с тройкой $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$. Отсюда $\{r_5(q_1), r_{10}(q_1)\} = \{r_5(q), r_8(q)\}$. Множество троек вида $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$. Значит, $R_4(q_1) = \{p\}$. Получаем уравнение $q_1^2 + 1 = p^t$ для некоторого натурального t. По лемме 2 имеем $t = 1$ и $q_1 = 2^{2^{n-1}}$. Если $n = 1$, то $G_1 = D_6(2)$, откуда по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Если $n \geq 2$, то $q \equiv 1 \pmod 8$; противоречие с предположением.

Предположим теперь, что q_1 нечетно. Если $q \equiv 5 \pmod 8$, то коклика вида $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ в $GK(D_5(q))$ не совпадает с кокликами вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ и $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ в $GK(D_6(q_1))$; противоречие.

Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 3 \pmod 4$. Как и ранее, имеем $R_5(q) = R_5(q_1)$. Так как $\{r_1(q), r_8(q)\} = \{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, то $R_8(q) \subseteq R_1(q_1) \cup R_{10}(q_1)$. Значит, множество троек вида $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ в $GK(D_6(q_1))$, а коклик вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ нет в $GK(D_5(q))$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случаях $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 3 \pmod 4$; $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$.

Случаи, когда $\{G, G_1\}$ равно $\{{}^2D_5(q), D_6(q_1)\}$ или $\{D_7^\varepsilon(q), D_8(q_1)\}$, рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно, $\{D_n^\varepsilon(q), D_n^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, где n нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$, $\{A_{n-1}^\varepsilon(q), D_{n_1}^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, где n_1 нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$, $\{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$. Заметим, что по [7, табл. 4] $t(p, D_n(q)) = 3$. Так как $p \neq p_1$, то $p = r_i(q_1)$ для некоторого числа i. Проверим, что для любого $r_i(q_1) \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1))$ имеем $t(r_i(q_1), {}^2D_{n-2}(q_1)) \neq 3$. По [7, табл. 4, 6] $t(2, {}^2D_{n-2}(q_1)) \in \{2, 4\}$. Используя лемму 5, получаем, что $\{r_1(q_1), r_{2n-4}(q_1)\}$ и $\{r_2(q_1), r_{2n-4}(q_1)\}$ — максимальные коклики порядка 2 в графе $GK(G_1)$.

Пусть $k \geq 3$ и k нечетно. Оценим снизу число $t(r_k, {}^2D_{n-2}(q_1))$. Пусть $r, s \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1)) \setminus \{2, p_1\}$ такие, что $k = e(r, q_1)$, $l = e(s, q_1)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. По лемме 5 r, s несмежны в $GK({}^2D_{n-2}(q_1))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k) + 2\eta(l) > 2(n-2) - (1 - (-1)^l)$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l > 2n - 2k - 4$, т. е. $l \in \{2n - 2k - 2, 2n - 2k, \ldots, 2(n-2)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{2n-2k-2, \ldots, 2(n-2)\}$, получаем k попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n - k - 3$, т. е. $l \in \{n - k - 2, n - k, \ldots, n - 3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n - k - 2, \ldots, n - 3\}$, получаем не менее $k/2 - 1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/2 + 1/2 \geq 5$.

Пусть $k \geq 4$ и k четно. Оценим снизу число $t(r_k, {}^2D_{n-2}(q_1))$. Пусть $r, s \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1)) \setminus \{2, p_1\}$ такие, что $k = e(r, q_1)$, $l = e(s, q_1)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. По лемме 5 r, s несмежны в $GK({}^2D_{n-2}(q_1))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l) > 2(n-2)-(1+(-1)^l)$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l > 2n-k-6$, т. е. $l \in \{2n-k-4, 2n-k-2, \ldots, 2(n-2)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{2n-k-4, \ldots, 2(n-2)\}$, получаем не менее $k/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n-k/2-2$. Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k \geq 4$ и $l \in \{n-k/2-1, n-k/2+1, \ldots, n-3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n-k/2-1, \ldots, n-3\}$, получаем $k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/4+1 \geq 4$. Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k \geq 6$ и $l \in \{n-k/2, n-k/2+2, \ldots, n-3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n-k/2, \ldots, n-3\}$, получаем $k/4-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/4+1/2 \geq 5$.

Таким образом, $t(r_i(q_1), {}^2D_{n-2}(q_1)) \neq 3$. Поэтому $3 \neq t(p, {}^2D_{n-2}(q_1)) = t(p, D_n(q)) = 3$. Следовательно, $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно. По [7, табл. 4, 6] либо $2 = t(2, G) \neq t(2, G_1) = 3$, либо $2 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 3$; противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядка 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$, $\{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8$). В $GK(G_1)$ это $\{p_1, r_n(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$; $\{2, r_n(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 5 \pmod 8$. Если q четно, то коклик вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$ нет в $GK(G)$; противоречие. Аналогично получаем противоречие, если q_1 четно. Значит, q и q_1 нечетны. Так как $t(p, G) = 3$ и $p = r_i(q_1)$ для некоторого числа i, то $t(p, G_1) = 3$; противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, $\{{}^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_n(q)\}$ при $q \equiv 3 \pmod 4$, $\{2, r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q), r_{2n-2}(q)\}$, где $r_1(q) \neq 2$; $\{r_2(q), r_n(q)\}$, где $r_2(q) \neq 2$; $\{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8$; $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$; $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_{2n}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $\{2, r_{2n-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 7 \pmod 8$; $\{r_1(q_1), r_{2n}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \neq 2$; $\{r_2(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \neq 2$; $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 3 \pmod 8$; $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1), r_{2n-4}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$.

Предположим, что q четно. Так как $t(2, G) = t(2, G_1) = 3$, то по [7, табл. 4, 6] $q_1 \equiv 3 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Отсюда $\{r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Максимальной коклики вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ нет в $GK(G)$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае, когда q_1 четно.

Предположим, что q и q_1 нечетны. Пусть $q \equiv 5 \pmod 8$. Так как $t(2, D_n(q)) = 3 = t(2, {}^2D_n(q_1))$, то $q_1 \equiv 3 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Тогда $\{r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Заметим, что любая тройка вида $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ и $p = p_1$; противоречие.

Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$. Как и ранее, $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$. Заметим, что $\{r_1(q), r_{2n-2}(q)\} = \{r_2(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$, поэтому $R_{2n-2}(q) \subseteq R_2(q_1) \cup R_{2n-2}(q_1)$. Получаем, что любая тройка вида $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ и $p = p_1$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случаях, когда $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 7 \pmod 8$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 7 \pmod 8$.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{D_n(q), D_n(q_1)\}$, $\{{}^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), D_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 3 \pmod 4$. Так как $t(G) = t(G_1)$ и $n_1 \equiv 3 \pmod 4$, то $n \equiv 0 \pmod 3$ при n четном и $n \equiv 2 \pmod 3$ при n нечетном.

Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2, 3 и 4 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ – это $\{2, r_n(q)\}$, где $n_2 < (q-1)_2$; $\{2, r_{n-1}(q)\}$, где $n_2 > (q-1)_2$ и q нечетно; $\{2, r_{n-1}(q)\}$, где $n_2 = (q-1)_2 = 2$; $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $2 < n_2 = (q-1)_2$; $\{r_1(q), r_n(q)\}$, где $n_{r_1(q)} < (q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, где $n_{r_1(q)} > (q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, где $n_{r_1(q)} = (q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ при n четном; $\{r_2(q), r_n(q)\}$ при n нечетном; $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$; $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ при $n \equiv 0 \pmod 3$; $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$; $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ при $n \equiv 0 \pmod 4$; $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 1 \pmod 4$; $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 4$; $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 3 \pmod 4$. В $GK(G_1)$ — это $\{2, r_{n_1}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 3 \pmod 4$; $\{2, r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \neq 2$; $\{r_2(q_1), r_{n_1}(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \neq 2$; $\{2, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 5 \pmod 8$; $\{p_1, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1)\}$; $\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $n_1 \equiv 5 \pmod 6$.

Предположим, что q нечетно, q_1 четно или $q_1 \equiv 5 \pmod 8$. Так как $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$, то $2 < n_2 = (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\} = \{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $\{r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\} = \{r_{n-1}(q), r_n(q)\}$. Заметим, что любая тройка вида $\{p, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ и $p = p_1$; противоречие.

Предположим, что q нечетно, $q_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $n_2 < (q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n_1}(q_1)\} = \{2, r_n(q)\}$. Тогда $R_{n_1}(q_1) = R_n(q)$. Заметим, что любая пара $\{r_1(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает либо с парой $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$, либо с парой $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$, поэтому при $q_1 \neq 3$ имеем $R_{2n_1-2}(q_1) \subseteq R_1(q) \cup R_2(q) \cup R_{n-1}(q)$. Если $q_1 = 3$, то любая тройка вида $\{3, r_{n_1}(3), r_{2n_1-2}(3)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $R_{2n_1-2}(3) \subseteq R_1(q) \cup R_{n-1}(q)$. Также заметим, что любая тройка вида $\{r_4(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ или $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ при $n \equiv 2 \pmod 3$. Тогда $R_{n_1-2}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_1(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-1}(q)$. Получаем, что любая четверка вида $\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ не совпадает с четверками вида $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$, $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$, $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ или $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$; противоречие.

Предположим, что q нечетно, $q_1 \equiv 3 \pmod 4$, $n_2 > (q-1)_2$ или $n_2 = (q-1)_2 = 2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n_1}(q_1)\} = \{2, r_{n-1}(q)\}$. Тогда $R_{n_1}(q_1) = R_{n-1}(q)$. Заметим, что $\{r_1(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\} = \{r_1(q), r_n(q)\}$, поэтому при $q_1 \neq 3$ имеем $R_{2n_1-2}(q_1) \subseteq R_1(q) \cup R_n(q)$. Если $q_1 = 3$, то любая тройка вида $\{3, r_{n_1}(3), r_{2n_1-2}(3)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $R_{2n_1-2}(3) \subseteq R_1(q) \cup R_n(q)$. Также заметим, что любая тройка вида $\{r_4(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ или $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$. Тогда $R_{n_1-2}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_1(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-2}(q) \cup R_n(q)$.

При $n \equiv 2 \pmod 3$ любая четверка вида $\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ не совпадает с четверками вида $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$, $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$, $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ или $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$; противоречие.

При $n \equiv 0 \pmod 3$ любая четверка вида $\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает с четверкой вида $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $n \equiv 3 \pmod 4$. Но тогда n нечетно, поэтому $n \equiv 2 \pmod 3$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае, когда при q нечетно и $q_1 \equiv 1 \pmod 8$.

Предположим, что $q = 2^f$. Так как $t(2, G) = 3 = t(2, G_1)$, то $q_1 \equiv 5 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$. Тогда $\{r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$.

При $n \equiv 0 \pmod 3$ любая тройка вида $\{r_4(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с тройкой вида $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$, поэтому $R_{n_1-2}(q_1) \subseteq R_3(q) \cup R_{n-2}(q)$. Любая четверка вида

$\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает с четверкой вида $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $n \equiv 3 \pmod 4$. Но тогда n нечетно, поэтому $n \equiv 2 \pmod 3$; противоречие.

При $n \equiv 2 \pmod 3$ любая тройка вида $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с тройкой вида $\{p_1, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$, поэтому $R_3(q) = \{p_1\}$. Таким образом, $(2^{3f}-1)/((2^f-1)(3, 2^f-1)) = p_1^\alpha$. Пусть f четно, т.е. $f = 2f_1$ для натурального числа f_1. Если $f_1 = 1$, то $p_1 = 7$, но $p_1 \equiv 5 \pmod 8$; противоречие. Если $f_1 = 2$, то $p_1^\alpha = 91$ и p_1 непростое; противоречие. Если $f_1 \geq 3$, то по лемме 1 существуют числа $r = r_{6f_1}(2) \neq 3$ и $r_1 = r_{3f_1}(2) \neq 3$, причем $r \neq r_1$. Тогда p^α непростое, а значит, и p_1 непростое; противоречие. Значит, f нечетно и $(3, 2^f - 1) = 1$ и $2^f(2^f + 1) + 1 = p_1^\alpha$. Если $q = 2$, то $p_1 = 7$, но $p_1 \equiv 5 \pmod 8$; противоречие. Если $q = 4$, то $p_1^\alpha = 21$ и p_1 непростое; противоречие. Если $q \geq 8$, то $q \equiv 0 \pmod 8$ и $p_1^\alpha \equiv 1 \pmod 8$. Так как $p_1 \equiv 5 \pmod 8$, то α четно. По лемме 3 получаем противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A^\varepsilon_{n-1}(q), D^{\varepsilon_1}_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 1 \pmod 4$ и $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$: $\{A_{n-1}(q), {}^2D_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 3 \pmod 4$; $\{{}^2A_{n-1}(q), D^\varepsilon_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$, то аналогично получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $G, G_1 \in \mathcal{M}$. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений*: (1) $\{G, G_1\} = \{A^\varepsilon_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$; (2) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар* $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, *где либо n четно, либо* $n \equiv 3 \pmod 4$ *и qq_1 нечетно*; (3) $\{G, G_1\} = \{D^\varepsilon_n(q), D^\varepsilon_n(q_1)\}$, *где n четно*, $\varepsilon \in \{+,-\}$.

Доказательство. Пусть $GK(G) = GK(G_1)$. Тогда $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$. Сравнивая множества $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}(G_1)$, указанные в леммах 8–14, получаем, что либо выполняется заключение леммы, либо $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A^\varepsilon_8(q), B_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_8(q), C_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_9(q), B_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_9(q), C_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_6(q), D^{\varepsilon_1}_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_6(q), D_6(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_7(q), D^{\varepsilon_1}_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_7(q), D_6(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_5(q), D_6(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_7(q), D_8(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_n(q), D^{\varepsilon_1}_n(q_1)\}$, где n нечетно, $\{A^{\varepsilon_1}_{n-1}(q), D^{\varepsilon_1}_{n_1}(q_1)\}$, где n_1 нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$, $\{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$, $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно. Из лемм 15 и 16 получаем, что выполняется заключение леммы. Лемма доказана.

Лемма 18. *Если $G = E_7(q)$, то $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 3)$.*

Доказательство использует [8, предложение 2.7] и аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 19. *Пусть $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают. Тогда $G_1 \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как $G \in \mathcal{M}$, то $t(G) \geq 4$ или $G \in \{A_6(2),\ A_7(2),\ {}^2D_5(2)\}$. Если $G \in \{A_6(2),\ A_7(2),\ {}^2D_5(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Значит, $t(G_1) = t(G) \geq 4$. Предположим, что $G_1 \notin \mathcal{M}$. Заметим, что $t(G) = t(G_1) \in \{4, 5, 8, 12\}$.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 4$. Тогда [4, табл. 1, 2] G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$; $A_7(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_7(q)$; $C_5(2)$; $D_5(q)$; $D_6(q)$; ${}^2D_5(q)$, $q \neq 2$ и, в частности, $s(G) \in \{1, 2, 3\}$. По [4, табл. 1, 2] заметим, что G_1 — одна из групп $F_4(2)$; ${}^2B_2(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$; $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1-1)_3 = 3$, $q_1+1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$, $q_1-1 \neq 2^k$; $C_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$; ${}^2D_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$ или $A_2(4)$. Если $G_1 = F_4(2)$, то по [11] $G \in \{A_1(13^2), C_2(13)\}$, поэтому $G \notin \mathcal{M}$; противоречие. Если $G_1 = {}^2B_2(2^{2n+1})$, то $s(G_1) = 4$, но $s(G_1) = s(G) \in \{1, 2, 3\}$; противоречие. Если $G_1 = A_2(4)$, то по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Итак, G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1-1)_3 = 3$, $q_1+1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$, $q_1-1 \neq 2^k$; $C_4(q_1)$ или ${}^2D_4(q_1)$, где $q_1 \neq 2$. Так как $s(G_1) = 2$, то $s(G) = 2$. Отсюда по [5; 6] G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$; $A_7(q)$, $q \in \{3, 5, 9\}$; ${}^2A_7(q)$, $q \in \{3, 7\}$; $C_5(2)$; $D_5(q)$, $q \in \{2, 3, 5\}$; $D_6(2)$ или $D_6(3)$. Если G — одна из групп $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, $C_5(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, то по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Значит, G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$. Если G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1-1)_3 = 3$, $q_1+1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$,

$q_1 - 1 \neq 2^k$, то по [8, табл. 2] коклики максимального размера графа $GK(G_1)$ содержат 3, а коклики максимального размера графа $GK(G)$ нет; противоречие. Таким образом, $G_1 = C_4(q_1)$ или ${}^2D_4(q_1)$, где $q_1 \neq 2$. По лемме 6 $G \neq {}^2A_6(2)$. По леммам 8 и 10 $\mathcal{T}(G_1) = (4, 2)$, а по лемме 11 $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 5$. Тогда по табл. 1 и 2 G — одна из групп $A_8(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_8(q)$; $A_9(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_9(q)$; $A_{10}(2)$; $B_5(q)$, $q \neq 2$; $C_5(q)$, $q \neq 2$; $C_6(2)$; $B_6(q)$, $q \neq 2$; $C_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2D_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2D_6(2)$ или ${}^2D_7(2)$. Если $G \in \{A_{10}(2), B_5(3), C_5(2), C_5(3), {}^2D_6(2), {}^2D_7(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Значит, $G \notin \{A_{10}(2), B_5(3), C_5(2), C_5(3), {}^2D_6(2), {}^2D_7(2)\}$, поэтому $s(G) = 1$. Заметим, что G_1 — одна из групп $F_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$; $E_6(q_1)$; ${}^2E_6(q_1)$; ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geq 1$; ${}^2F_4(2^{2n+1})$, $n \geq 2$, поэтому $s(G_1) \in \{2, 3\}$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 8$. Тогда $G_1 = E_7(q_1)$. Так как $t(2, G_1) = t(2, G)$, $s(G_1) = s(G)$, то по [7, табл. 4–9] G — одна из групп $A_{14}(q)$; $A_{15}(q)$; ${}^2A_{14}(q)$; ${}^2A_{15}(q)$; $B_9(q)$ или $C_9(q)$. По лемме 11 имеем $G \notin \{A_{14}(2), A_{15}(2)\}$, $\mathcal{T}(A^{\varepsilon}_{14}(q))$ и $\mathcal{T}(A^{\varepsilon}_{15}(q))$ равно либо $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$, либо $(8, 7, 6, 5, 4, 3)$, а по лемме 8 $\mathcal{T}(B_9(q)) = \mathcal{T}(C_9(q)) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$, по лемме 18 $\mathcal{T}(E_7(q_1)) = (8, 7, 5, 3)$. Следовательно, $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 12$. Тогда $G_1 = E_8(q_1)$. Так как $s(G_1) = s(G)$, то по [5, 6, 8, табл. 4] $G = E_8(q)$; противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 6, 17 и 19 следует теорема 2.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, позволившие значительно улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.
5. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
6. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
9. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
10. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 69–471.
11. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
12. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Поступила 10.02.2016