ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 514.17; 532.5

ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ТОРЕ С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ. III[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе продолжается исследование задачи об условиях существования соленоидальных решений уравнения Эйлера в торе D относительно пары $(\mathbf{V}, p)$ векторного и скалярного полей, у которых линии векторного поля $\mathbf{V}$ имели бы простейшую структуру, совпадая с параллелями или меридианами тороидальных поверхностей, концентрически вложенных в тор D. Здесь в отличие от предыдущих двух работ мы правую часть уравнения Эйлера — векторное поле $\mathbf{f}$ в D не задаем специальным образом, а считаем произвольно заданным.

Ключевые слова: скалярное и векторное поля, уравнение Эйлера, дивергенция, ротор.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A solution class of the Euler equation in a torus with solenoidal velocity field. III.

We continue the study of the problem on the existence conditions for solenoidal solutions of the Euler equation in a torus D with respect to a pair $(\mathbf{V}, p)$ of vector and scalar fields such that the lines of the vector field $\mathbf{V}$ have a simple structure, coinciding with parallels and meridians of toroidal surfaces that are concentrically embedded in D. Here, in contrast to the previous two papers, the right-hand side of the Euler equation, i.e., the vector field $\mathbf{f}$ in D, is not given in a special form but is considered to be arbitrary.

Keywords: scalar and vector fields, Euler equation, divergence, curl.

MSC: 35Q30, 35Q31, 76D07, 76N10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-91-100

Введение

Работы [2–5] были посвящены развитию восходящего к И. С. Громеке [1] метода геометрического преобразования векторных полей в пространстве $\mathbb{R}^3$ или в его части и его приложениям к некоторым уравнениям матфизики. Метод позволяет из простых полей, например, тождественно постоянных, строить поля сложной, наперед заданной структуры. С его помощью были построены и исследованы полные классы специальных решений уравнений Эйлера, Стокса и Навье — Стокса во всем $\mathbb{R}^3$, в цилиндре и цилиндрическом слое, обладающих определенными геометрическими свойствами, когда ротор поля скоростей всюду параллелен или ортогонален вектору скорости. В работе [3] удалось для областей довольно общего вида найти нетривиальную постановку начальных и краевых задач для уравнения Навье — Стокса, решения которых гарантированно были бы из соответствующего класса векторных полей. В случае цилиндрического слоя такая краевая задача решена полностью с использованием гармонических всплесков. В настоящей работе завершаются исследования, начатые в работах [6; 7] о соленоидальных векторных полях в торе, подчиненных уравнению Эйлера, и при простейших дополнительных геометрических условиях на них. В дальнейшем планируется применить к ним метод геометрических преобразований для построения решений уравнений Навье — Стокса в торе или в тороидальном слое.

По настоянию первого из соавторов отметим сразу, что рассматриваемые здесь, как и в [6; 7], задачи являются чисто математическими задачами поиска некоторых специальных

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

решений известных уравнений механики, поскольку нам неясно, можно ли физически реализовать даже краевые условия из [3]. Но для образности нам удобно применять термины механики: сплошная среда, ее плотность ρ, давление — скалярное поле $p = p(\mathbf{X}, t)$, скорость — векторное поле $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, внешние силы — векторное поле $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, t — время. Здесь и далее $\mathbf{X}$ — одновременно и точка в $\mathbb{R}^3$ и ее радиус-вектор относительно начала декартовой системы координат.

1. Случай меридиальных линий поля скоростей

Кратко напомним криволинейную систему координат из работы [6], удобную для представления точек и полей, скалярных и векторных, в любом торе D_{r_c} с заданным радиусом r_c его осевой окружности L_c. Сначала выбираем декартову систему координат $(Ox_1x_2x_3)$ в $\mathbb{R}^3$ с началом O в центре симметрии тора и осью Ox_3, совпадающей с его осью симметрии. Соответствующие осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 базисные орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют фиксированную ортогональную правую тройку. Криволинейные координаты (r, ϑ, φ) каждой точки $M = \mathbf{X} \in D_{r_c}$ и ее радиус-вектора $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{OM}$ с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) определяем следующим образом: считаем, что полуплоскость Π_φ, проходящая через ось Ox_3 и точку $\mathbf{X}$, образует угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ с осью Ox_1, $\mathbf{X}_c(\varphi)$ — точка пересечения Π_φ с осевой окружностью L_c тора D_{r_c}, а радиус-вектор $\mathbf{X} - \mathbf{X}_c(\varphi)$ точки $\mathbf{X}$ относительно $\mathbf{X}_c(\varphi)$ имеет длину $r \in [0, r_c)$ и образует угол $\vartheta \in [0, 2\pi)$ с ортом $\mathbf{e}_3$. Угол отсчитываем против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X})$, перпендикулярного Π_φ и направленного в сторону возрастания угла φ. Точки $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать в криволинейных координатах так же через $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$, отличая их от декартовых только символьным изображением (непонятных точек вида $\mathbf{X}(1, 2, 3)$ в работе не будет). Орты криволинейной системы координат определяются так: $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_r(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = (\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) - \mathbf{X}_c(\varphi))/r$, введенный выше орт $\mathbf{e}_\varphi$ по аналогии с $\mathbf{e}_r$ будем обозначать также через $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, и, наконец, $\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ — орт, который вместе с $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ образует правую ортогональную тройку $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$. Отметим, что нижние индексы у этих базисных векторов не означают величины соответствующих расстояний и углов и связаны только с их геометрической интерпретацией, а значения углов ϑ и φ отражены в их аргументах. Таким образом, запись $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$ означает точку (и радиус-вектор) $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi) + r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, где $\mathbf{X}_c(\varphi) = (\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi) r_c$, а запись $\mathbf{a}(r, \vartheta, \varphi)$ означает, что вектор $\mathbf{a}$ является элементом векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ $(\mathbf{X} \in D_{r_c})$ и имеет вид $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = a_r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) + a_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, где $a_r = a_r(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_r)$, $a_\vartheta = a_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\vartheta)$, $a_\varphi = a_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\varphi)$ (аргументы ϑ, φ векторов $\mathbf{e}_r(\mathbf{X})$, $\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X})$ и $\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X})$ мы часто, как здесь, будем опускать).

Так как в точках осевой окружности L_c, т. е. при $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi)$, угол $\vartheta(\mathbf{X})$ не определен, а значит, не определены и орты $\mathbf{e}_r(\mathbf{X})$, $\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X})$, то, говоря о непрерывности (гладкости) в торе D векторных и скалярных полей, имеем в виду, что непрерывные (непрерывно дифференцируемые) поля в $D \backslash L_c$ при $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \to \mathbf{X}_c(\varphi)$ имеют конечные, не зависящие от (r, ϑ) пределы (и пределы своих первых частных производных), непрерывные по $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Более детальное описание этих криволинейных координат дано в [6]. В частности, там показано, что дифференциальный оператор Гамильтона $\boldsymbol{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \partial/\partial x_i$ в этих координатах имеет вид
$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi(\varphi)æ^{-1}(r, \vartheta)\frac{\partial}{\partial \varphi},$$
где, как и всюду далее, $æ = r_c + r\sin\vartheta > 0$ $(0 < r < r_0)$.

В этом разделе будет обсуждаться вопрос о совместности следующей смешанной системы функционально-дифференциальных уравнений относительно векторного $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, \vartheta, \varphi, t)$ и скалярного $\sigma = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ полей, гладких по всем переменным, и непрерывного по t, гладкого по пространственным переменным скалярного поля $p = p(r, \vartheta, \varphi, t)$:
$$\Big\{\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi);\ (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{V}) = 0;\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)\Big\} \qquad (1.1)$$

при $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \in D_{r_c,r_0}$ и $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, где D_{r_c,r_0} есть тор D_{r_c} с радиусом $r_0 < r_c$ его меридиальных сечений, т. е.

$$D_{r_c,r_0} = \{\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{X}_c(\varphi) + r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) :\ 0 \le r < r_0,\ 0 \le \vartheta, \varphi < 2\pi\}.$$

Первое уравнение этой системы требует, чтобы в любое время t в любой точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \in D_{r_c,r_0}$ вектор скорости $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ был касательным к окружности $C_{r,\varphi} = \{\mathbf{X}(r, \widetilde{\vartheta}, \varphi) :\ \widetilde{\vartheta} \in [0, 2\pi)\}$; это равносильно тому, что каждая такая окружность $C_{r,\varphi}$ ($r \in (0, r_0),\ \varphi \in [0, 2\pi)$) должна быть линией векторного поля $\mathbf{V}$ в D_{r_c,r_0}. Второе уравнение системы (1.1) означает, что векторное поле V соленоидальное, т. е. $\operatorname{div} V(r, \vartheta, \varphi, t) \equiv 0$ в D_{r_c,r_0}. А третье уравнение системы (1.1) есть уравнение Эйлера, которое в механике трактуется как уравнение для плотности p и скорости $\mathbf{V}$ движения идеальной (несжимаемой и невязкой) сплошной среды в Эйлеровой системе отсчета внутри тора D_{r_c,r_0}.

В работе [6] показано, что система (1.1) в торе $D = D_{r_c,r_0}$ совместна, только если функция σ зависит от своих аргументов специальным образом, как

$$\sigma(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{æ(r, \vartheta)}\Sigma(r, \varphi, t) \tag{1.2}$$

с гладкой в D по всем переменным r, φ, t функцией $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ при $r \to 0$, а вектор-функция $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)$ определена формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{1}{ræ^2(r, \vartheta)}\Sigma^2(r, \varphi, t)\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)\\ + \Big(\frac{1}{æ(r, \vartheta)}\frac{\partial\Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\cos\vartheta}{æ^3(r, \vartheta)}\Sigma^2(r, \varphi, t)\Big)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)\end{aligned} \tag{1.3}$$

через $\Sigma(r, \varphi, t)$ и какую-либо гладкую в D функцию $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$, у которой предел $\lim\limits_{r\to 0} \times (1/r)(\partial/\partial\vartheta)\Phi$ конечен и не зависит от ϑ. При этом будет $p(\mathbf{X}, t) = -\rho\Phi(\mathbf{X}, t)$.

Из-за большого произвола в выборе функций Σ и Φ кажется, что таких функций $\mathbf{f}$ много, однако дальнейший анализ показывает, что правило (1.3) накладывает довольно жесткие ограничения на $\mathbf{f}$.

Итак, далее считаем, что в системе уравнений (1.1) $\mathbf{f}$ — произвольно заданное в $D^4 = D_{r_c,r_0} \times R_+$ непрерывное векторное поле, и постараемся найти явные ограничения на $\mathbf{f}$, гарантирующие существование решения системы. В силу изложенного результата работы [6] для этого достаточно считать (1.3) функционально-дифференциальным уравнением (нелинейным) относительно Σ и Φ при заданном $\mathbf{f}$ и, определив условия его совместности, найти решение (Σ, Φ).

Перепишем (1.3) в скалярной форме, разрешив относительно производных от $\boldsymbol{\nabla}\Phi$. Получим систему

$$\Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{1}{ræ^2}\Sigma^2 - f_r;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -\frac{r\cos\vartheta}{æ^3}\Sigma^2 + \frac{r}{æ}\frac{\partial\Sigma}{\partial t} - rf_\vartheta;\ \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -æf_\varphi\Big\}, \tag{1.4}$$

где $f_r, f_\vartheta, f_\varphi$ — ортогональные проекции в $\mathbb{R}^3$ вектора $\mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ на орты $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi),\ \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ и $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$. Это изначально непрерывные в D^4 функции.

Отметим, что совместность системы (1.4), высказанные выше ограничения на функции Σ и Φ сразу накладывают некоторые ограничения на компоненты $\mathbf{f}$. Так, они вместе с непрерывностью функций $\mathbf{f}$, Σ и $\partial\Sigma/\partial t$ в D_{r_c,r_0} и вторым уравнением системы (1.4) позволяют легко получить равенство $\lim\limits_{r\to 0}(1/r)(\partial/\partial\vartheta)\Phi(r, \vartheta, \varphi, t) = f_\vartheta(0, \vartheta, \varphi, t) = f_\vartheta(0, 0, \varphi, t)$, вычислить предел $\lim\limits_{r\to 0} 1/2\pi \displaystyle\int_0^{2\pi} (1/r)(\partial\Phi/\partial\vartheta)\, d\vartheta$ непосредственно через правую часть того же уравнения и получить равенство $0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f_\vartheta(0,\vartheta,\varphi,t)\,d\vartheta = f_\vartheta(0,0,t)$. Отсюда и из третьего уравнения системы (1.4) следует, что для совместности системы (1.1) необходимо, чтобы на осевой окружности L_c тора были справедливы тождества

$$f_\vartheta(0,\vartheta,\varphi,t)\ \Big(:=\lim_{r\to 0} f_\vartheta(r,\vartheta,\varphi,t)\Big)\equiv 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi} f_\varphi(r,\vartheta,\varphi,t)\,d\varphi \equiv 0. \tag{1.5}$$

Несколько упростим систему (1.4), заменив в первых двух ее уравнениях функцию $\Phi(r,\vartheta,\varphi,t)$ четырех переменных на функцию $\widetilde{\Phi}(r,\vartheta,t)=\Phi(r,\vartheta,0,t)$ трех переменных. В силу третьего уравнения системы (1.4) имеем

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi,t)=\widetilde{\Phi}(r,\vartheta,t)-æ(r,\vartheta)\int\limits_0^{\varphi} f_\varphi(r,\vartheta,\widetilde{\varphi},t)\,d\widetilde{\varphi}=\widetilde{\Phi}-æF_\varphi, \tag{1.6}$$

где для краткости через $F_\varphi(r,\vartheta,\varphi,t)$ обозначена 2π-периодическая первообразная по переменной φ функции f_φ, подчиненная условию (см. (1.5)) $F_\varphi(r,\vartheta,0,t)\equiv F_\varphi(r,\vartheta,2\pi,t)\equiv 0$ в $D^4=D_{r_c,r_0}\times\mathbb{R}_+$. Учитывая еще, что Σ не зависит от ϑ, что $(r\cos\vartheta)/æ^3=-1/2\cdot\partial/\partial\vartheta\cdot(1/æ^2)$, и интегрируя второе уравнение по ϑ на периоде, получаем еще соотношение

$$f^0_\vartheta(r,\varphi,t)=:\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\vartheta(r,\vartheta,\varphi,t)\,d\vartheta=\frac{\partial\Sigma(r,\varphi,t)}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(æ^{-1}(r,\vartheta))\,d\vartheta=\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(æ^{-1})^0,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial\Sigma(r,\varphi,t)}{\partial t}=\frac{1}{(æ^{-1})^0}f^0_\vartheta. \tag{1.7}$$

Здесь, как и далее в этом разд. 1, символом типа $\mathcal{W}^0$ обозначено среднее значение на периоде 2π-периодической по переменной ϑ функции $\mathcal{W}$. Подстановка (1.6) и (1.7) в первое и второе уравнения системы (1.4) заменяет ее на более простую систему

$$\Big\{\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial r}=\frac{\partial(æF_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{ræ^2}\Sigma^2-f_r;\ \ \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\vartheta}=\frac{\partial(æF_\varphi)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{2}\frac{\partial(æ^{-2})}{\partial\vartheta}\Sigma^2+\frac{rf^0_\vartheta}{æ(æ^{-1})^0}-rf_\vartheta\Big\}, \tag{1.8}$$

в результате чего вопрос о совместности системы (1.1) сводится к совместности этой линейной по Σ^2 и $\widetilde{\Phi}$ системы двух уравнений при любом значении параметра $\varphi\in[0,2\pi)$ и к требованию, чтобы функция Φ из (1.6) и (1.8) удовлетворяла и третьему уравнению в (1.4). При этом функции f_φ и f_ϑ должны подчиняться условию (1.5), а Σ — еще и условию (1.7).

Для упрощения формулировок и без того громоздких формул будем далее предполагать, что функции в правых частях уравнений (1.8) непрерывно дифференцируемые (т. е. гладкие) по всем переменным в D^4. Тогда условие разрешимости системы (1.8) в классе гладких функций $\widetilde{\Phi}(r,\vartheta,t)$ сводится, как хорошо известно (см., например, [8, с. 99]), к требованию независимости от порядка дифференцирования смешанных вторых частных производных по r и ϑ будущего решения $\widetilde{\Phi}(r,\vartheta,t)$. Это ограничение, как легко проверить, вырождается в условие

$$\frac{r\cos\vartheta}{æ^3(r,\vartheta)}\,\frac{\partial\Sigma^2(r,\varphi,t)}{\partial r}+\frac{3r_c\cos\vartheta}{æ^4}\Sigma^2(r,\varphi,t)=\frac{\partial f_r}{\partial\vartheta}-\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Big(f_\vartheta-\frac{f^0_\vartheta}{æ(æ^{-1})^0}\Big)\Big). \tag{1.9}$$

Таким образом, совместность системы уравнений (1.8) (при априорных условиях гладкости $\mathbf{f}$ и условиях (1.5)) сведено к вопросу о существования гладкого, не зависящего от ϑ решения $\Sigma(r,\varphi,t)$ уравнения (1.9), удовлетворяющего (1.7) и ограничению $\Sigma(r,\varphi,t)=o(r)$ при $r\to 0$.

Обозначим правую часть (1.9) через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})$. В этих обозначениях общее решение этого дифференциального уравнения при всех допустимых значениях параметров ϑ, φ, t имеет, как легко проверить, вид

$$\Sigma^2_{\text{общ}}(r, \varphi, t) = \frac{(r_c + r\sin\vartheta)^3}{r^3\cos\vartheta}\left(c(\vartheta, \varphi, t) + \int_0^r \widetilde{r}^2\mathcal{F}(\widetilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})\, d\widetilde{r}\right).$$

Отсюда видно, что удовлетворить условию $\Sigma^2(r, \varphi, t) = o(r^2)$ $(r \to 0)$ можно только за счет условия $c(\vartheta, \varphi, t) \equiv 0$ и ограничения

$$\mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f}) = o(r^2) \qquad (r \to 0) \tag{1.10}$$

на компоненты f_ϑ и f_r вектор-функции $\mathbf{f}$, вытекающего из следующих соотношений эквивалентности при $r \to 0$:

$$\Sigma^2(r, \varphi, t) \sim \frac{r_c^3}{r^3}\int_0^r \frac{\widetilde{r}^3\mathcal{F}(\widetilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})}{r_c^3}\, d\widetilde{r} \sim \frac{r^3\mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})}{3r^2} = \frac{1}{3}r\mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t).$$

Кроме ограничений (1.10) из обоснованной выше формулы

$$\Sigma^2(r, \varphi, t) = \frac{(r_c + r\sin\vartheta)^3}{r^3\cos\vartheta}\int_0^r \widetilde{r}^2\mathcal{F}(\widetilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})\, d\widetilde{r} \tag{1.11}$$

вытекают требование независимости правой части (1.11) от ϑ и наряду с этим еще одно ограничение на $\mathbf{f}$,

$$\int_0^r \widetilde{r}^2\mathcal{F}(\widetilde{r}, 0, \varphi, t; \mathbf{f})\, d\widetilde{r} \ge 0 \tag{1.12}$$

и формула

$$\Sigma(r, \varphi, t) = \left(\frac{r_c^3}{r^3}\int_0^r \widetilde{r}^2\mathcal{F}(\widetilde{r}, 0, \varphi, t; \mathbf{f})\, d\widetilde{r}\right)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Вместе с условием независимости правой части (1.11) от ϑ условие (1.12) гарантирует и неотрицательность всей правой части (1.11). Выписанные ограничения на поле $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ и систему (1.8) позволяют разрешить ее в явном виде. Подставив в нее Σ^2 (1.11), видим, что система станет удовлетворять условию совместности (1.9). Так что, применяя обычную процедуру и учитывая независимость $\widetilde{\Phi}$ от φ и (1.11) от ϑ, можем представить $\widetilde{\Phi}$, например, в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi} &= C(\varphi, t) + æ(r, \vartheta)F_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) - \int_0^r \frac{æ(\widetilde{r}, \vartheta)}{\widetilde{r}^4\cos\vartheta}\int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{\widetilde{r}}^2\mathcal{F}(\widetilde{\widetilde{r}}, \vartheta, \varphi, t)\, d\widetilde{\widetilde{r}}\, d\widetilde{r} - \int_0^r f_r(\widetilde{r}, \vartheta, \varphi, t)\, d\widetilde{r} \\ &= C(t) + æ(r, \vartheta)F_\varphi(r, \vartheta, 0, t) - \int_0^r \frac{r_c^3}{\widetilde{r}^4 æ^2(\widetilde{r}, \vartheta)}\int_0^{\widetilde{r}} \widetilde{\widetilde{r}}^2\mathcal{F}(\widetilde{\widetilde{r}}, 0, 0, t)\, d\widetilde{r} - \int_0^r f_r(\widetilde{r}, \vartheta, 0, t)\, d\widetilde{r},\end{aligned} \tag{1.14}$$

откуда легко проконтролировать, что функция $\Phi = \widetilde{\Phi} - æF_\varphi$ (1.6) удовлетворяет системе (1.4). А второе равенство в (1.14) представляет собой последнее ограничение на $\mathbf{f}$ для совместности системы (1.1), так что совокупность всех ограничений на $\mathbf{f}$ определяет не только необходимые, но и достаточные условия совместности системы (1.1).

Итак, доказана

Теорема. *Функционально-дифференциальная система* (1.1) *относительно неизвестных функций* $\mathbf{V} = \sigma(r,\vartheta,\varphi,t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi)$ *и* $p = p(r,\vartheta,\varphi,t)$ *в торе* D_{r_c,r_0} *и* $t \in [0,\infty)$ *при заданном гладком по пространственным переменным и непрерывном по* t *векторном поле* $\mathbf{f}(r,\vartheta,\varphi,t)$ *совместна тогда и только тогда, когда поле* $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ *удовлетворяет при каждом* $t \in \mathbb{R}_+$ *следующим условиям:*

а) *компоненты* $f_\vartheta = (\mathbf{f},\mathbf{e}_\vartheta)$ *и* $f_\varphi = (\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi)$ *поля* $\mathbf{f}$ *должны подчиняться условиям* (1.5);

б) *функция* $\mathcal{F}(r,\vartheta,\varphi,t) = (f_r)'_\vartheta - (r(f_\vartheta - f^0_\vartheta/(æ(æ^{-1})^0)))'_r$ *должна удовлетворять условиям* (1.10) *и* (1.12);

в) *вектор-функция* $\mathbf{f}$ *должна быть такой, чтобы функция в правой части* (1.11) *не зависела от* ϑ;

г) *функция* (1.13) *должна обладать гладкой в* $D^4 = D_{r_c,r_0}\times\mathbb{R}_+$ *ветвью, удовлетворяющей соотношению* (1.7);

д) *для функции* $\mathbf{f}(r,\vartheta,\varphi,t)$ *должно выполняться второе равенство в* (1.14).

В итоге в силу теоремы, сформулированной в конце работы [1], в случае любого гладкого в D^4 поля $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$, используя формулы (1.13), (1.14) и (1.6), можно выписать решения системы (1.1) в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(r,\vartheta,\varphi,t);\mathbf{f}) = \frac{\Sigma(r,\varphi,t;\mathbf{f})}{æ(r,\vartheta)}\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi),$$

$$p(X(r,\vartheta,\varphi,t);\mathbf{f}) = -\rho\Phi(r,\vartheta,\varphi,t;\mathbf{f}) + \mathcal{P}(t),$$

где $\mathcal{P}(t)$ — произвольная непрерывная на $[0,\infty)$ функция.

Отметим, что в отличие от [1] здесь в представление функции $p(\mathbf{X},f)$ через $\Phi(\mathbf{X},\mathbf{f})$ вошла и функция $\Sigma(r,\varphi,t;\mathbf{f})$, которая теперь, в силу однозначности правой части (1.7), вполне определилась вектор-функцией $\mathbf{f}$, удовлетворяющей указанным в теореме ограничениям.

2. Случай, когда линии поля скоростей — параллели концентрических торов

Продолжим изучение задачи, рассмотренной в [7], когда линии векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ есть окружности с центрами на оси Ox_3 симметрии тора, лежащие в его сечениях плоскостями, перпендикулярными Ox_3. Кратко опишем другую, используемую в [7], криволинейную систему координат относительно той же, что в разд. 1, декартовой системы $Ox_1x_2x_3$ и правой тройки ортов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. Повернув в экваториальной плоскости тора векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на угол φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ в положительном направлении, получим при каждом φ правую тройку ортов $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$. Будем писать $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1,x_2,x_3) = \mathbf{X}(R,\varphi,x_3)$, где (x_1,x_2,x_3) — декартовы координаты, а (R,φ,x_3) — криволинейные параметры точки и радиус-вектора $\mathbf{X}$, определяемые по правилу $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3$ $(R > -r_c)$, где r_c — радиус осевой окружности L_c тора D, $\mathbf{X}_c(\varphi) = O_c(\varphi) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) \in L_c$. Следовательно, $\mathbf{X}(R,\varphi,x_3) = (r_c + R)\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3$, $O_c(\varphi)(r_c,\varphi,0)$. Введя в координатной поверхности $\varphi \equiv \mathrm{const}$ (в полуплоскости Π_φ) локальную декартову систему координат $O_c(\varphi)$, R, x_3 с базисом $\{\mathbf{e}_R(\varphi),\mathbf{e}_3\}$, получаем, что $\mathbf{X}(R,\varphi,x_3) \in \Pi_\varphi$ и в этой системе имеет координаты (R,x_3). В этих координатах тор $D = D_{r_c,r_0}$ можно определить как $D = \{\mathbf{X}(R,\varphi,x_3):\ R^2 + x_3^2 < r_0^2,\ \varphi \in [0,2\pi)\}$, и задача состоит в том, чтобы определить, при каких условиях на заданную в $D^4 = D_{r_c,r_0}\times(0,\infty)$ вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ совместна система двух дифференциальных и одного геометрического уравнения

$$\Big\{\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(\mathbf{X},t) = \widehat{f}(\mathbf{X},t);\ \mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \sigma(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\ (\boldsymbol{\nabla},\mathbf{V}) = 0\Big\}, \tag{2.1}$$

и в случае совместности найти решение — пару $(\mathbf{V}(\mathbf{X},t),p(\mathbf{X},t))$.

В [7] показано, что система (2.1) совместна тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma(R,x_3,t)$ — гладкое по t, непрерывное по R и X_3, не зависящее от φ скалярное поле, а поле $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ задано в виде $\mathbf{f} = (\partial\sigma/\partial t)\mathbf{e}_\varphi - (\sigma^2/(r_c+R))\mathbf{e}_R + \boldsymbol{\nabla}\Phi$, где $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$ — непрерывное по t, гладкое по R,φ,x_3 в D^4 скалярное поле. При этом пара $(\mathbf{V} = \sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\ p = \rho\Phi)$ будет решением системы (2.1). Здесь и в разд. 1 (σ,Φ) — символы разных пар функций.

Таким образом, в случае, когда поле $\mathbf{f}$ в D^4 как-то задано, вопрос о разрешимости системы (2.1) сводится к существованию соответствующих скалярных полей $\sigma(R,x_3,t)$ и $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$, т. е. к разрешимости относительно Φ и σ системы уравнений

$$\Big\{\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{\sigma^2}{r_c+R} + f_R;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = f_3;\quad \frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} + f_\varphi\Big\}, \tag{2.2}$$

где $f_R = (\mathbf{f},\mathbf{e}_R(\varphi)),\ f_\varphi = (\mathbf{f},\mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ и $f_3 = (\mathbf{f},\mathbf{e}_3)$. Это нелинейная система трех дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций, все функции $\Phi, f_R, f_3, f_\varphi$ зависят от R,φ,x_3,t и 2π-периодические по φ.

В этом разд. 2 для любой функции $g(R,\varphi,x_3,t)$ будем обозначать через $g^0 = g^0(R,x_3,t)$ ее среднее значение по φ, $g^0 = 1/2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi} g(R,\varphi,x_3,t)\,d\varphi$, а разность $g - g^0$ — через $g^\perp = g^\perp(R,\varphi,x_3,t)$. Переходя в системе уравнений (2.2) к средним значениям по φ на $[0,2\pi]$ всех входящих в нее функций, получим новую систему уравнений

$$\Big\{\frac{\partial\Phi^0}{\partial R} = \frac{\sigma^2}{r_c+R} + f_R^0;\quad \frac{\partial\Phi^0}{\partial x_3} = f_3^0;\quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = f_\varphi^0\Big\}, \tag{2.3}$$

откуда и из (2.2) получаем еще одну систему

$$\Big\{\frac{\partial\Phi^\perp}{\partial R} = f_R^\perp;\quad \frac{\partial\Phi^\perp}{\partial x_3} = f_3^\perp;\quad \frac{\partial\Phi^\perp}{\partial\varphi} = (r_c+R)f_\varphi^\perp\Big\}. \tag{2.4}$$

Вместе системы уравнений (2.3), (2.4) эквивалентны системе (2.2), но каждая из них проще исходной. Особенно система (2.4) — она линейная. Ее и разрешим вначале.

Для упрощения формулировок будем далее предполагать, что все компоненты вектор-функции $\mathbf{f}^\perp(R,\varphi,x_3,t)$ — гладкие функции. Тогда критерий совместности этих трех уравнений состоит в справедливости следующих соотношений (см. [8, с. 99]):

$$\Big\{\frac{\partial f_R^\perp}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3^\perp}{\partial R};\ \frac{\partial f_R^\perp}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial R}((r_c+R)f_\varphi^\perp);\ \frac{\partial f_3^\perp}{\partial\varphi} = (r_c+R)\frac{\partial f_\varphi^\perp}{\partial x_3}\Big\}\qquad (x\in D,\ t\in R_+). \tag{2.5}$$

При выполнении этих условий решение $\Phi^\perp(R,\varphi,x_3;t)$ системы (2.4) можно представить, например, в виде

$$\Phi^\perp(R,\varphi,x_3;t) = C(t) + \int\limits_0^R f_R^\perp(\widetilde{R},0,0;t)\,d\widetilde{R} + \int\limits_0^{x_3} f_3^\perp(R,0,\widetilde{x}_3;t)\,d\widetilde{x}_3 + (r_c+R)\int\limits_0^{\varphi} f_\varphi^\perp(R,\widetilde{\varphi},x_3;t)\,d\widetilde{\varphi}. \tag{2.6}$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. *Система уравнений* (2.4) *при априорном условии гладкости по* R,φ,x_3 *вектор-функции* $\mathbf{f}^\perp(R,\varphi,x_3;t)$ *совместна тогда и только тогда, когда компоненты функции* $\mathbf{f}^\perp$ *удовлетворяют в области* $D^4 = D\times\mathbb{R}_+$ *соотношениям* (2.5)*. При этом общее решение этой системы можно представить формулой* (2.6)*, где* $C(t)$ *— произвольная непрерывная функция.*

Обозначим через F_φ^0 функцию $1/2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^t f_\varphi(R,\widetilde{\varphi},x_3,\tau)\,d\tau\,d\widetilde{\varphi} = \int_0^t f_\varphi^0(R,x_3,\tau)\,d\tau$, а через G — функцию $G(R,x_3,t) = (\partial f_3^0(R,x_3,t)/\partial R - \partial f_R^0(R,x_3,t)/\partial x_3)(r_c+R)$.

Условие, накладываемое на $\mathbf{f}^0$ совместностью уравнений (2.3) заключается в том, что должна существовать гладкая функция $\sigma(R,x_3)$ такая, что в $D_0^3=\{R,x_3,t:\ R^2+x_3^2<r_0^2,\ t\geq 0\}$

$$\Big\{\sigma(R,x_3,t)=\sigma(R,x_3)+F_\varphi^0;\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma(R,x_3)+F_\varphi^0)^2=G(R,x_3,t)\Big\}. \tag{2.7}$$

Фактически это условие гарантирует представление функции Φ^0, например, в виде

$$\Phi^0(R,x_3,t)=\Phi^0(0,0,t)+\int_0^R\frac{1}{r_c+\widetilde{R}}\Big(\sigma(\widetilde{R},0)+F_\varphi^0\Big|_{x_3=0}\Big)^2\,d\widetilde{R}+\int_0^R f_R^0\Big|_{x_3=0}\,d\widetilde{R}+\int_0^{x_3}f_3^0\,d\widetilde{x}_3. \tag{2.8}$$

Условие (2.7) — жесткое ограничение на $\mathbf{f}^0$, поскольку должно выполняться при всех $t\in\mathbb{R}_+$, а $\sigma(R,x_3)$ не зависит от t. Пусть для $\sigma(R,x_3,t)$ выполняется (2.7). Тогда $\sigma(R,x_3)$ должна удовлетворять продифференцированному по t равенству, которое преобразуется к виду

$$2\frac{\partial(\sigma(R,x_3)f_\varphi^0(R,x_3,t))}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial t}\Big\{G(R,x_3,t)-\frac{\partial}{\partial x_3}(F_\varphi^0(R,x_3,t))^2\Big\}, \tag{2.9}$$

или, как легко видеть, к следующему условию на функцию $\sigma(R,x_3)f_\varphi^0(R,x_3,t)$:

$$\int_0^{x_3}2\frac{\partial(\sigma(R,\widetilde{x}_3)f_\varphi^0(R,\widetilde{x}_3,t))}{\partial\widetilde{x}_3}\,d\widetilde{x}_3=\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\int_0^{x_3}G(R,\widetilde{x}_3,t)\,d\widetilde{x}_3-\int_0^{x_3}\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_3}(F_\varphi^0(R,\widetilde{x}_3,t))^2\,d\widetilde{x}_3\Big\}. \tag{2.10}$$

Из условий (2.7), (2.9), (2.10), в частности, вытекает при $f_\varphi^0\equiv 0$ формула

$$\sigma^2(R,x_3,t)\equiv\sigma^2(R,x_3)=\sigma^2(R)+\int_0^{x_3}G(R,\widetilde{x}_3,t)\,d\widetilde{x}_3 \tag{2.11}$$

и следующее

Утверждение 2. *Система уравнений* (2.1) *описывает движение сплошной среды со стационарной скоростью* $\mathbf{V}=\mathbf{V}(R,\varphi,x_3)$ *в торе* D_{r_c,r_0} *только тогда, когда компоненты поля сил* $\mathbf{f}$ *удовлетворяют утверждению* 1 *и таковы, что* $f_\varphi^0\equiv 0$ *в* D_0^3, *а функция* $G(R,x_3,t)=(r_c+R)((f_3^0)'_R-(f_R^0)'_{x_3})$ *не зависит от* t *(совпадая с* $G(R,x_3,0)$*) и при* $|x_3|<\sqrt{r_0^2-R^2}$ *отделена от* $(-\infty)$. *При этом* $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)=\sigma(R,x_3)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, *где* $\sigma(R)$ *в* (2.11) *— непрерывная на интервале* $(-r_0,r_0)$ *функция со значениями* $\sigma^2(R)\geq\sup\{-G(R,x_3,0):\ |x_3|<\sqrt{r_0^2-R^2}\}$.

Например, если $G(R,x_3)\geq 0$ при $R^2+x_2^2<r_0^2$, то в качестве $\sigma(R)$ можно взять любую непрерывную при $|R|<r_0$ функцию.

Вернемся к общему случаю совместности системы (2.3) при априорных условиях достаточной гладкости в D^4 вектор-функции $\mathbf{f}^0(R,x_3,t)$. Пусть (2.9) выполнено. Тогда разность между правой частью второго уравнения в (2.7) и $\partial\sigma^2(R,x_3)/\partial x_3$ не зависит от t и, следовательно, совпадает со своим значением при $t=0$, т. е. (см. также (2.7) при $t=0$) с

$$(r_c+R)\Big(\frac{\partial f_3^0(R,x_3,0)}{\partial R}-\frac{\partial f_R^0(R,x_3,0)}{\partial x_3}\Big)=\frac{\partial\sigma^2(R,x_3)}{\partial x_3}. \tag{2.12}$$

Таким образом, условия (2.9) и (2.12) вместе с первым уравнением из (2.7) необходимы и достаточны для совместности системы (2.3). В силу (2.12) имеем

$$\sigma^2(R,x_3)=\sigma^2(R,0)+\int_0^{x_3}G(R,\widetilde{x}_3,0)\,d\widetilde{x}_3, \tag{2.13}$$

где $\sigma^2(R,0)$ — пока неопределенная функция. Это равенство формально совпадает с (2.11), но получено без ограничения $f^0_\varphi = 0$.

Введем обозначение $G(R,x_3,t) - (\partial/\partial x_3)(F^0_\varphi(R,x_3,t))^2 =: g(R,x_3,t)$, представив (2.9) в виде $2((f^0_\varphi)'_{x_3}\sigma(R,x_3) + f^0_\varphi\partial\sigma(R,x_3)/\partial x_3) = g'_t$. Умножив это равенство на $\sigma(R,x_3)$, получаем при $\sigma(R,x_3) \neq 0$ эквивалентное (2.9) условие $2(f^0_\varphi)'_{x_3}\sigma^2(R,x_3) + f^0_\varphi(R,x_3,t)(\partial/\partial x_3)\sigma^2(R,x_3) = g'_t(R,x_3,t)\sigma(R,x_3)$, которое вместе с (2.12) равносильно квадратному уравнению

$$2(f^0_\varphi)'_{x_3}\sigma^2(R,x_3) - g'_t(R,x_3,t)\sigma(R,x_3) + f^0_\varphi(R,x_3,t)G(R,x_3,0) = 0. \tag{2.14}$$

Отметим, что здесь случай $f^0_\varphi \equiv 0$ в D_{r_c,r_0} соответствует утверждению 2.

В случае, когда

$$(g'_t(R,x_3,t))^2 + (\partial f^0_\varphi(R,x_3,t)/\partial x_3)^2 \neq 0, \tag{2.15}$$

это уравнение для совместности системы уравнений (2.13) обязано иметь решение $\sigma(R,x_3)$, не зависящее от t, для чего дискриминант уравнения должен быть неотрицательным (при $\partial f^0_\varphi(R,x_3,t)/\partial x_3 = 0$ достаточно, чтобы $g'_t(R,x_3,t) \neq 0$), после чего нужно потребовать (это будет условие на f^0_φ, а через $g(R,x_3,t)$ и на f^0_R и f^0_3) независимости явно выраженного решения $\sigma(R,x_3)$ от t. Чтобы это решение не зависело от t, оно должно совпадать с решением этого уравнения в частном случае $t=0$:

$$2((f^0_\varphi)'_{x_3})\Big|_{t=0}\sigma^2(R,x_3) - g'_t(R,x_3,0)\sigma(R,x_3) + f^0_\varphi(R,x_3,0)g(R,x_3,0) = 0, \tag{2.16}$$

где $g'_t(R,x_3,0) = (r_c+R)\dfrac{\partial}{\partial t}\big((f^0_3)'_R(R,x_3,t) - (f^0_R)'_{x_3}(R,x_3,t)\big)\Big|_{t=0}$. Более того, учитывая формулу (2.13), для определения $\sigma(R,x_3)$ достаточно выписать решение уравнения (2.16) при $x_3=0$ с вполне определенной функцией $\sigma(R,0) = \sigma(R,0;\mathbf{f})$:

$$\sigma(R,0;\mathbf{f}) = \frac{g'_t(R,0,0) \pm \sqrt{(g'_t(R,0,0))^2 - 4((f^0_\varphi)^2)'_{x_3}(R,0,0)g(R,0,0)}}{2(f^0_\varphi)'(R,0,0)}. \tag{2.17}$$

Подставив (2.17) в (2.13), найдем представление $\sigma^2(R,x_3) = \sigma^2(R,x_3;\mathbf{f})$ через $\sigma(R,0;\mathbf{f})$. Зная $\sigma(R,x_3)$, по первой формуле (2.7) вполне определяем $\sigma(R,x_3,t) = \sigma(R,x_3,t;\mathbf{f})$:

$$\sigma(R,x_3,t) = \sigma(R,x_3,t;\mathbf{f}) = \sigma(R,0;\mathbf{f}) + \int_0^t f^0_\varphi(R,x_3,\tau)\,d\tau. \tag{2.18}$$

А затем по частному значению $\sigma(R,0,t;\mathbf{f})$ этой функции можно найти еще представление $\sigma^2(R,x_3,t)$ по формуле

$$\sigma^2(R,x_3,t;\mathbf{f}) = \left(\sigma(R,0;\mathbf{f}) + \int_0^t f^0_\varphi(R,0,\tau)\,d\tau\right)^2 + \int_0^{x_3} G(R,\widetilde{x}_3,t;\mathbf{f})\,d\widetilde{x}_3, \tag{2.19}$$

удовлетворяющее второму уравнению из (2.7).

Все это накладывает следующие ограничения на $\mathbf{f}^0$ (не на пару (σ, f^0_φ), как было выше, а на саму функцию $\mathbf{f}^0$), которые для простоты далее формулируются не в виде аналога теоремы из разд. 1, а как следующий алгоритм проверки совместности системы уравнений (2.1):

а) при $(f^0_\varphi)'_{x_3}(R,x_3,t) \neq 0$ должно быть $(g'_t(R,x_3,t))^2 - 8f^0_\varphi(R,x_3,t)G(R,x_3,0) \geq 0$;

б) правые части в получаемых представлениях (2.13) и (2.19) функций $\sigma^2(R,x_3;\mathbf{f})$ и $\sigma^2(R,x_3,t;\mathbf{f})$ должны быть неотрицательными;

в) функции $\sigma^2(R,x_3,t;\mathbf{f})$, получаемые из (2.18) и (2.19), должны совпадать, что определяет функциональное уравнение для компонент функции $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$;

г) в случае $(f^0_\varphi)'_{x_3}(R,x_3,0) = 0$ и $g'_t(R,x_3,0) \neq 0$ из (2.16) сразу находим $\sigma(R,x_3) = f^0_\varphi g/g'_t\Big|_{t=0}$. Аналогично при $g'_t(R,x_3,t) = 0$ и $(f_{\varphi^0})'_{x_3}\Big|_{t=0} \neq 0$ сразу имеем $\sigma^2(R,x_3,t;\mathbf{f}) = (1/2)g(R,x_3,0)$ $(= (1/2)G(R,x_3,0))$. В обоих случаях должны выполняться требования п.п. б) и в).

Выписанные условия на $\mathbf{f}^0$ необходимы и достаточны для совместности системы (2.3), если они выполняются для всех допустимых значений переменных $R,\ x_3,\ t$. В общем случае эти условия вместе с ограничениями в утверждении 1 на функцию $\mathbf{f}^\perp$ определяют широкий класс достаточных условий на $\mathbf{f}$ для совместности системы (2.1), а при их выполнении формулы $\mathbf{V} = \sigma(R,x_3,t;\mathbf{f})\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ и $p(R,x_3,t) = \rho(\Phi^\perp(R,\varphi_3,x_3,t) + \Phi^0(R,x_3,t))$ через (2.6) и (2.8) определяют ее решения.

В случае, когда все коэффициенты уравнения (2.16) обращаются в нуль, условия (2.7) совместности системы (2.3) значительно упрощаются, и их анализ мы здесь не приводим. Отметим еще, что если выписанные ограничения на $\mathbf{f}^0$ разбивают область D^4 на части, то придется еще наложить условия на $\mathbf{f}$ для обеспечения гладкой склейки решений $\sigma(R,x_3,t)$ на границе между этими частями. Это лучше делать в каждом конкретном случае, так как в общем случае все становится слишком многообразно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Громека И.С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук // Громека И. С. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
2. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R^3 // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 11–23.
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 123–138.
4. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
5. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 48–63.
6. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 60–70.
7. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 102–108.
8. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич

Поступила 04.02.2016

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет Б. Н. Ельцина
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru