ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.988.68

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НОВОГО МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных. Строятся новые регуляризующие методы локализации в дискретной форме. Особенностью новых методов является переменное ядро усреднения, что позволяет существенно упростить реализацию алгоритмов. Для построенных методов получены оценки точности локализации и другой важной характеристики метода — порога разделимости.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, локализация особенностей, линия разрыва, регуляризация, дискретизация.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. Discretization of a new method for localizing discontinuity lines of a noisy two-variable function.

We consider the ill-posed problem of localizing (finding the position of) lines of discontinuity of a noisy function of two variables. New regularizing methods of localization are constructed in a discrete form. In these methods, the averaging kernel is varying, which simplifies the implementation of the algorithms. We obtain estimates for the localization error of the methods and for their separability threshold, which is another important characteristic.

Keywords: ill-posed problem, localization of singularities, line of discontinuity, regularization, discretization.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-8-17

Введение

В некоторых прикладных задачах возникает проблема локализации (определения положения) линий, в окрестности которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Такого рода задачи часто возникают при обработке изображений (ссылки на литературу можно найти в [1; 2]). Проблема заключается в том, что для многих типов возмущений обсуждаемая задача является некорректно поставленной [3; 4], т. е. положения линий разрыва известной зашумленной функции могут как угодно сильно отличаться от линий разрыва неизвестной точной функции. Именно этот случай рассматривается в настоящей работе. В качестве методов регуляризации используются методы усреднения функции двух переменных, построенные с помощью одномерных методов усреднения (ядро двумерного усреднения является произведением одномерных ядер усреднения).

Исследование усреднений для функций двух переменных опирается на исследования одномерных усреднений для локализации разрывов первого рода функций одной переменной [5–7]. В упомянутых работах для различной *априорной информации* о точной функции и различных видов возмущений построены регуляризующие методы усреднения, которые позволяют определить количество и аппроксимировать положение точек разрыва функции одной переменной с получением оценок точности локализации. Построению и теоретическому исследованию методов усреднения для локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629а).

посвящены работы [8–10]. В первых двух работах рассматривается различная априорная информация о точной функции. В работе [8] используется метод усреднения с ядром, которое получено сдвигом вдоль осей координат одной и той же двумерной функции, а усреднение представляет из себя двумерную свертку. Для задачи, рассматриваемой в работе [9] с другой априорной информацией об искомой функции простой метод из статьи [8] неприменим и используется более сложный метод "усреднения с поворотом": усреднение проводится в системе координат, повернутой на угол ϑ относительно начала координат исходной системы, и зависит от третьей переменной — угла ϑ. В работе [10] рассматриваются вопросы дискретизации метода из работы [8].

Дискретизация и исследование метода "усреднения с поворотом" работы [9] вызывает серьезные трудности (неясно, как проводить дискретизацию по углам поворота; в случае, когда исходная функция уже задана в дискретном виде, реализация усреднения требует использования сложных аппроксимационных схем). В настоящей статье указанные трудности преодолеваются: для априорной информации о точной функции, аналогичной априорной информации в статье [9], строится новый регуляризующий метод локализации в дискретной форме. Особенностью нового метода является новое переменное ядро усреднения, которое позволяет существенно упростить реализацию расчетного алгоритма и его теоретическое исследование. Для построенного метода получены оценки точности локализации и другой важной характеристики метода — порога разделимости.

Также необходимо отметить, что возможна экономичная реализация построенного метода. Поскольку метод "усреднения с поворотом" работы [9] не дискретизован, то строго теоретически сравнить по числу операций новый метод и старый невозможно. Однако интуитивно кажется, что преимущество должно быть за новым методом. Отметим, что возможны и другие реализации идеи переменного ядра при построении методов усреднения, т. е. конструирование других новых методов локализации линий разрыва.

Первый раздел статьи посвящен вспомогательным построениям и оценкам. Во втором разделе предложен новый метод локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных в дискретной форме, и для него получены оценки точности локализации и порога разделимости. Отметим, что оценки для нового дискретного метода имеют тот же порядок, что и оценки для непрерывного метода работы [9].

1. Вспомогательные оценки

Все построения в данном разделе являются непрерывными. Дискретизация проводится в следующем разделе. Вначале введем необходимые понятия для функции одной переменной. Пусть функция $g(x)$, имеет конечное число l разрывов первого рода в точках x_k, $k = 1, 2, \dots, l$, $\Delta_k = g(x_k + 0) - g(x_k - 0)$ — величины скачков; функция g и ее производная g' принадлежат множеству $L_2(-\infty, +\infty)$ (в точках x_k функция g' доопределена произвольным образом). Пусть на любом конечном отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва x_k, функция g абсолютно непрерывна. Множество таких функций обозначим через MW_2^1; норму в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_2}$.

Введем множество ΦF финитных усредняющих функций:

(a) $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$; $|\phi'(t)| \le C$, C — константа;

(b) существуют $0 < \tau < 1$, $0 < a \le 1$ такие, что $a \le |\phi(t)| \le 1$ для $t \in [-\tau, \tau]$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Отметим, что для функций $\phi \in \Phi F$ нормы функций ϕ и ϕ' определены в $L_2(-\infty, +\infty)$ и ограничены.

Согласно лемме 1 работы [9] для любой функции $\phi \in \Phi F$ для любого $\lambda > 0$ существует непрерывная функция

$$g_\lambda(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)(\phi_\lambda(x-t))'_x dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda),$$

для которой имеет место представление

$$g_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x - x_k) + \alpha_\lambda(x), \quad \alpha_\lambda(x) = \int\limits_{x-\lambda}^{x+\lambda} g'(t)\phi_\lambda(x-t)dt, \tag{1.1}$$

где $\sup\limits_x |\alpha_\lambda(x)| \le \|\phi\|_{L_2}\|g'\|_{L_2}\lambda^{1/2}$.

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ имеет конечное число линий разрыва $\Gamma_k, k = 1,2,\dots,l$ (см. рис. 1); вне этих линий функция f гладкая. Точные условия на линии разрыва и поведение функции f вне разрывов будут приведены ниже.

Зафиксируем некоторое значение переменной $y = \bar{y}$ и рассмотрим полосу

$$D = \{(x,y)\colon -\infty < x < +\infty, |y-\bar{y}| \le \bar{\delta}\},$$

где величина $\bar{\delta} > 0$ может быть сколь угодно малой. Пусть линии $\Gamma_k, k = 1,2,\dots,l$, в полосе D можно задать функциями $x = \gamma_k(y)$. Через x_k обозначены точки пересечения кривых Γ_k с линией $y = \bar{y}$: $x_k = \gamma_k(\bar{y}),\ k = 1,2,\dots,l$.

Введем множество $D_x MW_2^1$ функций двух переменных (априорная информация на точную функцию), для которых в полосе D выполнены следующие условия:

$(*)$ $f(x,y)$ принадлежит множеству MW_2^1 для почти всех y таких, что $|y-\bar{y}| \le \bar{\delta}$ и $\|df(x,y)/dx\|_{L_2(D)} \le r$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

$(**)$ для любой точки $(x,y) \in \Gamma_k$, $k = 1,2,\dots,l$, существуют конечные величины $f(x \pm 0, y)$, и они не равны; соответствующий скачок функции обозначим через $\Delta_k(y)$, $k = 1,2,\dots,l$; $\Delta_k(y)$ — непрерывная функция; существуют положительные константы $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$: $\Delta^{\min} \le \min\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \le \Delta^{\max}$;

$(***)$ в полосе D линии $\Gamma_k, k = 1,2,\dots,l$, — гладкие: существуют производные γ'_k, γ''_k, и $\max\limits_k |\gamma'_k(\bar{y})| \le M_1$, $\max\limits_{k,|y-\bar{y}|\le\bar{\delta}} |\gamma''_k(y)| \le M_2$, M_1, M_2 — константы.

Отметим, что в работе [9] на множество точных функций накладывались более жесткие условия: требовалось существование для всех направлений $\boldsymbol{\tau}$ частной производной $\partial f(x,y)/\partial\boldsymbol{\tau}$ вместо $df(x,y)/dx$.

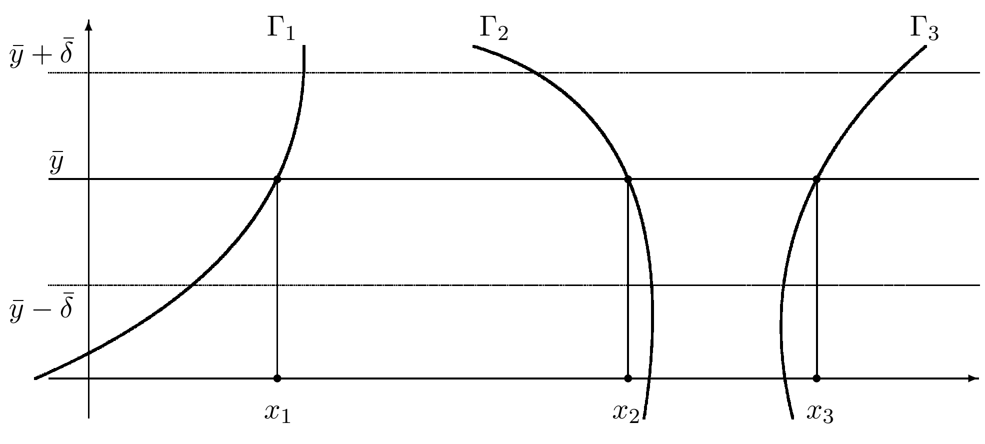

Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f; x_k — аппроксимируемые величины.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in D_x MW_2^1$. Требуется по зашумленной функции $f^\delta \in L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f-f^\delta\|_{L_2(-\infty,+\infty;-\infty,+\infty)} \le \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Методы локализации [5–9] основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Поскольку возмущение $f-f^\delta$ двумерно, то нужно проводить усреднение по двум переменным. Для усреднения по одной переменной возьмем усредняющую функцию из множества ΦF. Для усреднения по второй переменной введем второй класс усредняющих функций Ψ, который состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in (-\infty,+\infty)$, удовлетворяющих условиям

(a$'$) $\psi \in L_2(-\infty,+\infty)$;

(b$'$) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 1$;

(c$'$) $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1,1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1,1]$.

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\Big(\frac{t}{\lambda_1}\Big), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\Big(\frac{t}{\lambda_2}\Big), \quad \lambda_1,\lambda_2 > 0.$$

Ядро усреднения для функции $f^\delta(x,y)$ будем конструировать с помощью сдвига произведения функций $(\phi_{\lambda_1}(x))'\psi_{\lambda_2}(y)$ так же, как в работах [8–10]. Однако в отличие от этих работ, область интегрирования будет состоять из $2M+1$ прямоугольника ($M>0$ — целое число) со сторонами, параллельными осям координат (см. рис. 2) и с центрами на прямой, угол наклона которой к оси y равен величине ϑ.

Введем $\bar\lambda_2 = (2M+1)\lambda_2$. Положим для $x \in (-\infty,+\infty)$, $\bar y^i = \bar y + 2i\lambda_2$, $i = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm M$,

$$F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x) = \int_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f^\delta(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(x-\xi))'_x\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)d\xi dy. \tag{1.2}$$

Тогда, полагая $\tau^i(x,\vartheta) = x + 2i\lambda_2 \operatorname{tg}\vartheta$, $\vartheta \in [-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$, вспомогательную функцию вычисляем по формуле

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta) = \sum_{i=-M}^{M} F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(\tau^i(x,\vartheta))$$

$$= \sum_{i=-M}^{M}\int_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f^\delta(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)d\xi dy. \tag{1.3}$$

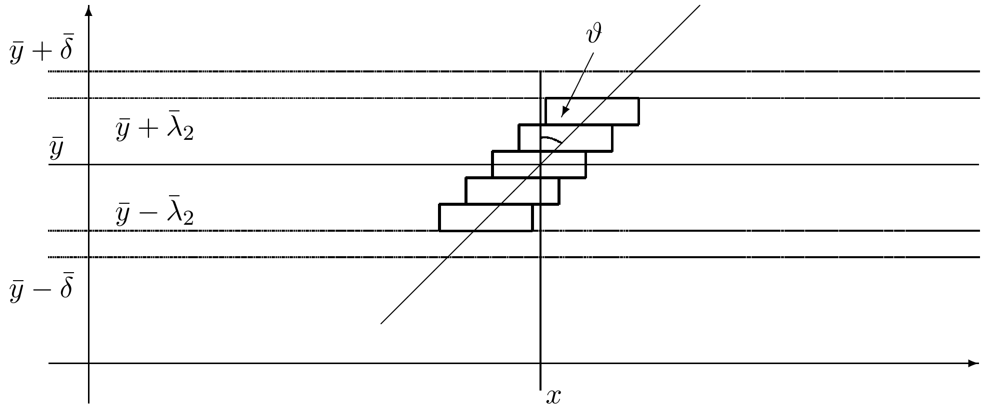

Рис. 2. Область интегрирования, состоящая из пяти прямоугольников при $M{=}2$.

Пределы изменения угла ϑ выбраны таким образом, что для каждой кривой Γ_k величина $\vartheta_k = \operatorname{arctg}\gamma'_k(\bar y)$ принадлежит отрезку $[-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$.

Дискретизация функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ по переменным x, ϑ будет проведена в следующем разделе. Прежде получим нужные неравенства для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)$ вне окрестностей точек x_k для всех ϑ и в окрестности точек x_k для ϑ, близких к ϑ_k.

Введем величины $\Delta t = M_1/(2M)$, $K = \lambda_1 + 3M_1\bar\lambda_2$, где $\bar\lambda_2 = (2M+1)\lambda_2$. Напомним, что M_1, M_2 — константы из условия $(***)$, величина $\bar\delta$ входит в определение полосы D.

Лемма. *Пусть $f \in D_x MW_2^1$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\bar\lambda_2 \le \min\{\bar\delta, 4M_1/M_2\}$ в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения*:

(a) *если $|x - x_k| \ge K, k = 1, 2, \ldots, l$, то для функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)$, определенной равенством* (1.3), *для всех $\vartheta \in [-\operatorname{arctg} M_1, \operatorname{arctg} M_1]$ имеет место оценка*

$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)| \le A_0\Big(\frac{\lambda_1}{\bar\lambda_2}\Big)^{1/2} + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar\lambda_2)^{1/2}},$$

где $A_0 = \|\phi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$;

(b) *если $\min\limits_{k\ne j}|x_j - x_k| \ge K$, то для всех $k = 1, 2, \ldots, l$ и всех x: $|x - x_k| \le \tau\lambda_1$, ϑ: $|\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta_k| \le \Delta t$ имеет место оценка*

$$|F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta)| \ge a\Delta^{\min} - A_0\Big(\frac{\lambda_1}{\bar\lambda_2}\Big)^{1/2} - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar\lambda_2)^{1/2}} - \frac{A_2^1\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{A_2^2\bar\lambda_2^2}{\lambda_1},$$

где $A_2^1 = 2CM_1\Delta^{\max}, A_2^2 = 2CM_2\Delta^{\max}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\bar\lambda_2 \le \bar\delta$ гарантирует, что пределы интегрирования в (1.3) не выйдут из полосы D. Напомним, что $\bar y^i = \bar y + 2i\lambda_2$, $\tau^i(x,\vartheta) = x + 2i\lambda_2\operatorname{tg}\vartheta$. Обозначим $\Delta f = f^\delta - f$. Тогда

$$F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x,\vartheta) = \sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy$$

$$+\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy. \tag{1.4}$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций ϕ'_{λ_1}, ψ_{λ_2} к функциям ϕ', ψ.

$$\Big|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} \Delta f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)d\xi dy\Big| \le \|\phi'_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\lambda_2}\|_{L_2}\delta \le \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}.$$

Покажем, что при условии $|x - x_k| \ge K$ область интегрирования в (1.3) не пересекается с линией разрыва γ_k, т. е. выполнено неравенство $|x - \gamma_k(y)| \ge \lambda_1 + 2M\lambda_2(M_1 + \Delta t) = \lambda_1 + M_1\bar\lambda_2$.

Объединение всех областей интегрирования для всевозможных углов ϑ не выходит за пределы полосы $D_{\bar\lambda_2} = \{(x,y)\colon -\infty < x < \infty,\ |y - \bar y| \le \bar\lambda_2\}$. Пусть точка $(\tilde x, \tilde y) \in \Gamma_k \cap D_{\bar\lambda_2}$. Тогда ввиду разложения $\tilde x - x_k = \gamma_k(\tilde y) - \gamma_k(\bar y) = \gamma'_k(\bar y)(\tilde y - \bar y) + \gamma''_k(\xi)(\tilde y - \bar y)^2/2$, где $\xi \in (\tilde y, \bar y)$, и условия $(***)$ имеем оценку $|\tilde x - x_k| \le (M_1 + M_2\bar\lambda_2/2)|\tilde y - \bar y|$. Это значит, что $\Omega_k = \{(x,y)\colon |y - \bar y| \le \bar\lambda_2,\ |x - x_k| \le (M_1 + M_2\bar\lambda_2/2)|y - \bar y|\} \supseteq \Gamma_k \cap D_{\bar\lambda_2}$. Обозначим через β угол, тангенс которого

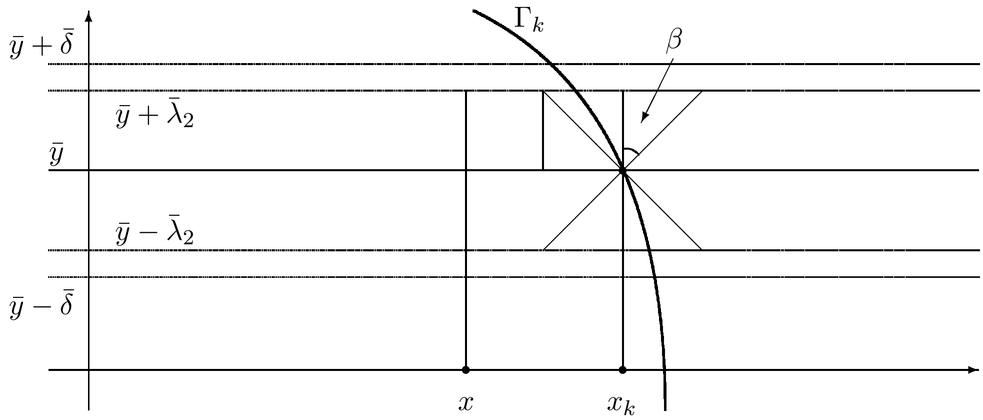

Рис. 3. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва функции f; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с линией Γ_k.

равен $M_1 + M_2\bar\lambda_2/2$ (см. рис. 3). Нам нужно, чтобы расстояние от x до Ω_k было не меньше $\lambda_1 + M_1\bar\lambda_2$. Для этого требуется выполнение неравенства

$$|x-x_k| \ge \lambda_1 + M_1\bar\lambda_2 + \bar\lambda_2\Big(M_1 + \frac{M_2\bar\lambda_2}{2}\Big) = \lambda_1 + \bar\lambda_2\Big(2M_1 + \frac{M_2\bar\lambda_2}{2}\Big).$$

Ввиду того, что $\bar\lambda_2 \le 4M_1/M_2$, достаточно потребовать $|x-x_k| \ge K = \lambda_1 + 3M_1\bar\lambda_2$.

Ясно, что для $x = x_m$ при условии $\min\limits_{m\ne k}|x_m - x_k| \ge K$ имеем $|x_m - \gamma_k(y)| \ge \lambda_1 + M_1\bar\lambda_2, m \ne k$.

Следовательно, в п. (a) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. Поскольку $K > \tau\lambda_1$, то в п. (b) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Получим оценки для первого слагаемого в правой части (1.4) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (a). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (1.4) к повторному и для внутреннего интеграла применим разложение (1.1). Поскольку в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов, то получаем оценку

$$\Big|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Big(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x d\xi\Big)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)dy\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Big(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f'_\xi(\xi,y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi)d\xi\Big)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)dy\Big| \le \|f'_x\|_{L_2}\|\phi_{\lambda_1}\|_{L_2}\|\psi_{\bar\lambda_2}\|_{L_2}.$$

Переходя от функций ϕ_{λ_1}, $\psi_{\bar\lambda_2}$ к функциям ϕ, ψ и учитывая условие $(*)$, получаем требуемую оценку.

Рассмотрим случай (b). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k, то, применяя разложение (1.1) для внутреннего интеграла в первом слагаемом (1.4), имеем равенство

$$\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Big(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f(\xi,y)(\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi))'_x d\xi\Big)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)dy$$

$$= \sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\gamma_k(y))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y - y)dy$$

$$+\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{\tau^i(x,\vartheta)-\lambda_1}^{\tau^i(x,\vartheta)+\lambda_1} f'_\xi(\xi,y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy. \tag{1.5}$$

Второй интеграл был рассмотрен выше при доказательстве случая (a). Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (1.5) можно представить в виде

$$\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\gamma_k(y))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy$$

$$=\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\tau^i(x_k,\vartheta))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy$$

$$+\sum_{i=-M}^{M}\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(\tau^i(x_k,\vartheta)-\gamma_k(y))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy, \tag{1.6}$$

где $\tau^i(x_k,\vartheta)=x_k+2i\lambda_2\mathrm{tg}\vartheta$, $\theta\in(\tau^i(x,\vartheta)-\tau^i(x_k,\vartheta),\tau^i(x,\vartheta)-\gamma_k(y))$. Поскольку функция $\Delta_k(y)$ непрерывна, то в силу $(**)$ она сохраняет знак для всех y таких, что $|y-\bar y|\le\bar\lambda_2$. Тогда в силу условия (c$'$) на функцию ψ и условия (b) на функцию ϕ, поскольку $|x-x_k|\le\tau\lambda_1$, имеем

$$\Bigg|\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\tau^i(x_k,\vartheta))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy\Bigg|\ge\Delta^{\min}a\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy.$$

Следовательно, в силу условия (b$'$) на функцию ψ, для первого слагаемого в правой части (1.6) имеем оценку

$$\sum_{i=-M}^{M}\Bigg|\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x,\vartheta)-\tau^i(x_k,\vartheta))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy\Bigg|\ge\Delta^{\min}a.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (1.6). Поскольку $x_k=\gamma_k(\bar y)$, $\mathrm{tg}\vartheta_k=\gamma'_k(\bar y)$, $|\,\mathrm{tg}\,\vartheta-\mathrm{tg}\,\vartheta_k|\le\Delta t$, то $|\tau^i(x_k,\vartheta)-\gamma_k(y)|\le\gamma'_k(\bar y)(2i\lambda_2+(\bar y-y))+2i\lambda_2\Delta t+\gamma''_k(\xi)(\bar y-y)^2/2$, $\xi\in(y,\bar y)$. Так как $|\bar y-y|\le(2i+1)\lambda_2$, то $|2i\lambda_2+(\bar y-y)|\le\lambda_2$ и $|\tau^i(x_k,\vartheta)-\gamma_k(y)|\le(M_1+2i\Delta t)\lambda_2+M_2|\bar y-y|^2/2$. Используя условие (a) на функцию ϕ и учитывая, что $\Delta t=M_1/(2M)$, для второго слагаемого в правой части (1.6) имеем оценку

$$\sum_{i=-M}^{M}\Bigg|\int\limits_{\bar y^i-\lambda_2}^{\bar y^i+\lambda_2}\Delta_k(y)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(\tau^i(x_k,\vartheta)-\gamma_k(y))\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy\Bigg|$$

$$\le\Delta^{\max}\frac{C}{\lambda_1}\Bigg(2M_1\lambda_2\int\limits_{\bar y-\bar\lambda_2}^{\bar y+\bar\lambda_2}\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy+\frac{M_2}{2}\int\limits_{\bar y-\bar\lambda_2}^{\bar y+\bar\lambda_2}|\bar y-y|^2\psi_{\bar\lambda_2}(\bar y-y)dy\Bigg)\le A_2^1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}+A_2^2\frac{\bar\lambda_2^2}{\lambda_1}.$$

Используя полученные выше оценки, имеем требуемую оценку сверху из п. (b). □

2. Метод локализации

Без ограничения общности считаем, что точки x_k, $k = 1, 2, \dots, l$, принадлежат отрезку $[-d, d]$, $d > 0$. Перейдем к дискретизации по переменным x и ϑ вспомогательной функции $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$, вычисляемой по формуле (1.3) Для этого введем узлы x^j равномерной сетки T на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx (величины h и Δx будут определены перед формулировкой теоремы). Для простоты рассмотрения выберем узлы ϑ^n так, чтобы $\tau^i(x^j, \vartheta^n)$ была точкой сетки T, т.е. вспомогательная функция $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n)$ будет вычисляться для ϑ^n таких, что $2\lambda_2 \operatorname{tg}\vartheta^n = n\Delta x$. Тогда $\tau^i(x^j, \vartheta^n) = x^j + in\Delta x$, $-N \le n \le N$, где $N = \lceil 2M_1\lambda_2/\Delta x \rceil$ (здесь $\lceil\cdot\rceil = [\,\cdot\,] + 1$, $[\,\cdot\,]$ — целая часть вещественного числа). Величина N выбрана таким образом, чтобы угол ϑ^N был наименьшим, для которого выполнено условие $\max\limits_k |\gamma'_k(\bar y)| \le \operatorname{tg}\vartheta^N$, причем $|\operatorname{tg}\vartheta^n - \operatorname{tg}\vartheta^{n-1}| = \Delta x/(2\lambda_2)$.

З а м е ч а н и е. Вычисление величин $F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j)$ по формуле (1.2) сводится к вычислению одномерных дискретных сверток, и с помощью быстрого преобразования Фурье эти величины могут быть вычислены экономичным образом. Затем формируются суммы $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n)$ по формуле (1.3).

Дискретизация вычисления интегралов в (1.2) в настоящей работе не проводится. Вместо этого вводится условие, что эти интегралы вычислены с достаточной точностью. Заметим, что сетка для вычисления интегралов в (1.2) не обязана совпадать с сеткой T.

Считаем, что величины $F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}$, $i = 0, \pm1, \pm2, \dots, \pm M$, по формуле (1.2) вычисляются приближенно в точках x^j, и выполнено условие аппроксимации интеграла (1.2)

$$\widetilde{F}^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) = F^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) + \Delta\widetilde{F}^i(x^j), \quad \text{где} \quad \max_{x^j} |\Delta\widetilde{F}^i(x^j)| \le \frac{P}{8(2M+1)},$$

где неотрицательный параметр P будет введен ниже. Тогда приближенное значение усреднения $F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}$ в точке (x^j, ϑ^n) вычисляется следующим образом:

$$\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n) = \sum_{i=-M}^{M} \widetilde{F}^{\delta,i}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j + in\Delta x).$$

Причем справедлива оценка точности приближения

$$\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n) = F^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n) + \Delta\widetilde{F}(x^j), \quad \text{где} \quad \max_{x^j} |\Delta\widetilde{F}(x^j)| \le \frac{P}{8}. \tag{2.1}$$

Введем функцию одной переменной

$$\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) = \max_{-N \le n \le N} |\widetilde{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j, \vartheta^n)|.$$

Положим параметр $P = a\Delta^{\min}/2$; эта величина имеет смысл порога в методе локализации (напомним, что величины a и $\Delta^{\min}$ введены соответственно в условии (b) на функцию ϕ и условии (**)). Приведенный ниже алгоритм локализации по величинам $\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j)$ определяет количество l точек x_k и находит приближения x^δ_k, $k = 1, 2, \dots, l$. Напомним, что $K = \lambda_1 + 3M_1\bar\lambda_2$. Алгоритм в своей работе использует параметры λ_1, λ_2 и Δx, которые позже будут связаны с уровнем погрешности входных данных δ.

А л г о р и т м ΠD_Δ. Положим $j := 0$, $m := 0$.
Шаг алгоритма: если $x^j \ge d$, то завершаем процесс;
иначе, если $\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) \ge P$, то положим $m{:=}m{+}1$, $a_m{:=}x^j$, $j{:=}j{+}\lceil 2K/\Delta x\rceil$, $x^\delta_m{:=}a_m{+}K/2$;
иначе $j := j + 1$;
повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм ΠD_Δ по значениям $\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j)$ вычисляет величину m, относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x_k^δ для аппроксимации положений особенностей x_k. Заметим, что точка x_k^δ может не быть точкой сетки T.

Напомним, что $P = a\Delta^{\min}/2$, $K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_2^1 = 2CM_1\Delta^{\max}$, $A_2^2 = 2CM_2\Delta^{\max}$. Введем константы

$$\omega = \frac{P}{5A_0}, \quad B = \frac{4A_1}{\omega P}\left(\omega^2 + 3M_1\right), \quad \delta_0 = \min\left\{\frac{\bar{\delta}\omega P}{4A_1}, \ \frac{\omega^3 P^2}{20 A_1 A_2^2}, \ \frac{\omega P M_1}{A_1 M_2}\right\}.$$

Величина M определяется как наименьшее положительное число, удовлетворяющее условию

$$2M + 1 \geq \frac{5A_2^1}{\omega^2 P}.$$

Введем зависимости параметров регуляризации и шага сетки от уровня погрешности δ входных данных. Напомним, что величина τ введена в условии (b) на функцию ϕ. Положим

$$\bar{\lambda}_2(\delta) = \frac{4A_1}{\omega P}\delta, \quad \lambda_2(\delta) = \frac{\bar{\lambda}_2(\delta)}{2M+1}, \quad \lambda_1(\delta) = \omega^2\bar{\lambda}_2(\delta),$$

$$\Delta x = \tilde{\tau}\lambda_1, \quad \text{где} \quad \tilde{\tau} = \min\left\{\tau, \ \frac{M_1}{\omega^2 M(2M+1)}\right\}, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x.$$

Заметим, что $K = B\delta$.

Теорема. *Пусть $f \in D_x MW_2^1$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ в условиях рассматриваемой задачи при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ и выполнении условия $\min\limits_{1\leq k,j\leq l,\, k\neq j}|x_k - x_j| \geq h(\delta)$ для алгоритма ΠD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \leq (B/2)\delta$.*

Доказательство. Используя оценки из леммы и условие аппроксимации (2.1) при данном выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$, для точек сетки x^j из окрестности точки разрыва x_k таких, что $|x^j - x_k| \leq \tilde{\tau}\lambda_1$, $k = 1, 2, \ldots, l$, получаем

$$\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) \geq a\Delta^{\min} - A_0\Big(\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}_2}\Big)^{1/2} - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar{\lambda}_2)^{1/2}} - \frac{A_2^1\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{A_2^2\bar{\lambda}_2^2}{\lambda_1} - \frac{P}{8} > P. \tag{2.2}$$

Отметим, что условие $\bar{\lambda}_2 \leq \min\{\bar{\delta}, 4M_1/M_2\}$ (см. формулировку леммы) выполнено за счет выбора δ_0. Поскольку $|\operatorname{tg}\vartheta^n - \operatorname{tg}\vartheta^{n-1}| = \Delta x/(2\lambda_2)$ и $\Delta t = M_1/(2M)$, то для любого k существует угол $\vartheta^n\colon |\operatorname{tg}\vartheta^n - \operatorname{tg}\vartheta_k| \leq \Delta t$ за счет выбора $\tilde{\tau}$.

Введем множество $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{l}\{x\colon |x - x_k| \leq K\}$. Для точек сетки $x^j \notin Q$, имеет место оценка

$$\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) \leq A_0\Big(\frac{\lambda_1}{\bar{\lambda}_2}\Big)^{1/2} + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\bar{\lambda}_2)^{1/2}} + \frac{P}{8}.$$

При данном выборе параметров для $x^j \notin Q$

$$\widehat{F}^\delta_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) < P. \tag{2.3}$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. алгоритм ΠD_Δ должен найти приближение x_k^δ для точки x_k, $k = 1, 2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод ΠD_Δ должен найти l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций f, для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \geq h(\delta) = 2K + \Delta x$.

Согласно (2.2) во всех точках сетки x^j таких, что $|x^j - x_k| \le \tilde{\tau}\lambda_1$, имеем $\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = \tilde{\tau}\lambda_1$, то для любого k на отрезке $[x_k - \tilde{\tau}\lambda_1, x_k + \tilde{\tau}\lambda_1]$ найдется точка сетки $x^j < x_k$. Следуя алгоритму ΠD_Δ, пусть x^j — первая точка сетки, в которой $\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) \ge P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^j < x_1$. Заметим, что x^j необязательно принадлежит отрезку $[x_1 - \tilde{\tau}\lambda_1, x_k + \tilde{\tau}\lambda_1]$, но $|x^j - x_1| \le K$ согласно оценке (2.3). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^j, x^j + K] =: [a_1, a_1 + K]$.

Далее, следуя алгоритму ΠD_Δ, положим $j := j + \lceil 2K/\Delta x \rceil$, т. е. $x^j = a_1 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x$. Ясно, что $x^j - x_1 > K$. Покажем, что $x^j < x_2$. Используя условие разделимости, имеем $x_2 - x^j \ge x_2 - a_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x \ge x_2 - x_1 - 2K - \Delta x \ge 0$. Следовательно, $x^j < x_2$. Далее согласно (2.2) найдется точка сетки x^j такая, что $\widehat{F}^{\delta}_{\lambda_1\lambda_2}(x^j) \ge P$. Следуя (2.3), $x_2 - x^j \le K$, т. е. $x_2 \in [x^j, x^j + K] =: [a_2, a_2 + K]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $x \in [a_k, a_k + K]$, $k = 1, 2$, имеем оценку $|x - x_k| \le K$, то для середины отрезков $x_k^\delta := a_k + K/2$ справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \le K/2$. Поскольку $K = B\delta$, получаем требуемую оценку точности аппроксимации для точек x_k. $\square$

Таким образом, оценки точности для дискретного метода, полученные в настоящей работе, при достаточно малом шаге дискретизации имеют тот же порядок по δ, что и оценки для непрерывного метода работы [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я.А. Фурман. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
4. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 с.
5. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 24–42. (Математика. Механика. Информатика. Вып. 11.)
6. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
7. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191.
8. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
10. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О дискретизации методов локализации особенностей зашумленной функции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 3–13.

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Поступила 15.01.2016

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru