ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.983.54

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЕКОНВОЛЮЦИИ В ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ[1]

В. В. Васин, Г. Г. Скорик

Задача деконволюции, которая возникает при описании процессов в скважине в ходе проведении тестов, формулируется в виде уравнения Вольтерра первого рода с разрывными входными данными (ядро — скорость потока, правая часть — изменение давления), которые характеризуются наличием больших ошибок измерения. Кроме того, решение этого уравнения имеет разномасштабный характер поведения на области определения. В этих условиях традиционные алгоритмы решения уравнения Вольтерра, как правило, не приводят к удовлетворительным результатам. Чтобы решить задачу, мы привлекаем вариационные методы регуляризации и строим функциональный базис (систему экспонент), позволяющий учесть в алгоритме все априорные ограничения, известные для искомого решения. Благодаря этому удалось сформировать семейство приближенных решений, удовлетворяющее условиям гладкости и точности, требуемым для интерпретации скважинных тестов. Формулируются теоремы сходимости приближенных решений и описываются детали численной реализации построенных регуляризующих алгоритмов.

Ключевые слова: задача деконволюции, скважинный тест, тихоновская регуляризация, метод квазирешений, система экспонент, априорные ограничения.

V. V. Vasin, G. G. Skorik. Solution of the deconvolution problem in the general statement.

The deconvolution problem, which arises in the description of well testing processes, is formulated in the form of a Volterra equation of the first kind with discontinuous input data (the kernel is the flow rate and the right-hand side is the pressure change) characterized by large measurement errors. In addition, the solution of this equation has multiscale behavior in its domain. In this situation, the traditional solution algorithms for Volterra equations, as a rule, do not provide satisfactory results. To solve the problem, we use the variational regularization methods and construct a function basis (a system of exponents), which allow us to take into account in the algorithms all a priori constraints known for the desired solution. As a result, we form a family of approximate solutions that satisfies the conditions of smoothness end exactness required for the interpretation of well tests. For the constructed regularizing algorithms, we formulate convergence theorems and describe the details of numerical implementation.

Keywords: deconvolution problem, well test, Tikhonov regularization, method of quasisolutions, system of exponents, a priori constraints.

MSC: 45D05, 65J20, 65R20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-79-90

1. Введение

С математической точки зрения задача деконволюции — решение уравнения Вольтерра первого рода [1]

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \Delta p(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

которое возникает при описании процессов, происходящих в скважине при проведении тестов. Уравнение вытекает из принципа Дюамеля, который гласит, что измеряемое изменение давления $\Delta p(t) = p_0 - p(t)$ есть свертка измеряемой скорости потока $q(t)$ жидкости с импульсной функцией $g(t)$ отклика резервуара. Здесь p_0 — начальное давление резервуара (в невозмущенном состоянии), $p(t)$ — давление, измеряемое, например, на поверхности ствола скважины. Искомая функция $g(t)$ подлежит определению из уравнения (1.1) по измеренным

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629).

с ошибками функциям $p(t)$ и $q(t)$. Известно, что полученные в результате решения уравнения (1.1) функции $v(t) = tg(t)$, $w(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$ в логарифмической шкале широко используются инженерами-исследователями при идентификации системы скважина — резервуар на основе интерпретации скважинных тестов [2–5].

Уравнение (1.1) применительно к скважинным тестам имеет существенную специфику, которая заключается в следующем:

1. Реальные экпериментальные данные $q(t)$, $p(t)$, p_0 содержат большие погрешности (от 5% до 15%).

2. Исходные данные $q(t)$, $p(t)$ и особенно решение $g(t)$ могут иметь значительные вариации на малых временных участках (разномасштабность).

3. Функции $q(t)$, $p(t)$ ограничены, но, как правило, разрывны.

В этих условиях традиционные алгоритмы не позволяют построить устойчивое приближенное решение некорректно поставленного уравнения (1.1), пригодного для адекватной интерпретации скважинных тестов, о чем свидетельствуют многочисленные публикации, посвященные этой проблеме (см. подробные обзоры в [5; 6]).

Одна из возможностей повышения устойчивости метода и улучшения качества решения заключается в использовании в алгоритме дополнительной априорной информации о решении. Эта информация, обычно записываемая в виде некоторых ограничений (равенств, неравенств, включений), позволяет локализовать приближенное решение и повысить ее аппроксимативные свойства. При определенных допущениях на систему скважина — резервуар искомая функция отклика резервуара $g(t)$ удовлетворяет следующей бесконечной системе неравенств [3–5]:

$$(-1)^k d^k g(t)/dt^k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Необходимо отметить, что во всех работах (см., например, [2–7] и ссылки в них), посвященных задаче деконволюции (1.1), привлекались в различных сочетаниях не более трех первых неравенств из (1.2):

$$g(t) \geq 0, \quad dg(t)/dt \leq 0, \quad d^2 g(t)/dt^2 \geq 0, \tag{1.3}$$

выражающих важные свойства решения: неотрицательность, монотонность и выпуклость. Так, например, разностные аппроксимации неравенств (1.3) использовались в [4] при построении алгоритма, основанного на сведении исходной постановки к задаче линейного программирования. Наиболее часто в алгоритмах учитывалось свойство неотрицательности решения. В этой связи следует отметить интересную работу [7], в которой тихоновская регуляризация использовалась не к уравнению (1.1), а к нелинейному уравнению

$$\bar{A}(z) = \int\limits_{\infty}^{\ln t} q(t - e^{\sigma}) e^{z(\sigma)}\,d\sigma = \Delta p(t),$$

полученному из (1.1) с помощью замены $\sigma = \ln \tau$, $z(\sigma) = \ln(\tau g(\tau))$. Этот подход позволяет не только автоматически учитывать свойство неотрицательности решения, но и несколько нивелировать его разномасштабность. Так же в работе [6] неравенства (1.3) учитывались при построении алгоритмов на основе вариационных методов, но здесь учет ограничений осуществлялся с помощью разложения решения по системе кусочно-линейных функций, удовлетворяющих конечно-разностным аналогам неравенств (1.3). Эти методы в численных расчетах дают вполне удовлетворительные результаты, но вследствие кусочно-линейности базисных функций приближенные решения не обладают достаточной гладкостью, что несколько снижает эффективность алгоритмов.

Этот недостаток преодолен в работе [8], где для тех же методов регуляризации искомое решение строилось в виде разложения по системе степенных функций $\{e^{-\lambda_i t},\ \lambda_i \geq 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j\}$. Это позволило построить бесконечно дифференцируемые приближенные решения, удовлетворяющие всем ограничениям (1.2). При этом основные результаты (теоремы сходимости регуляризованных решений) были получены в предположении, что искомое решение уравнения (1.1) представимо в форме конечной суммы

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i e^{-\lambda_i t}, \tag{1.4}$$

где каждая функция $h_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, очевидно, удовлетворяет ограничениям (1.2). Было показано, что в этом случае для построения приближенного решения уравнения (1.1) достаточно ограничиться в разложении (1.4) по системе h_i с неотрицательными коэффициентами $\hat{c}_i$, что автоматически влечет выполнение всей совокупности неравенств (1.2) для приближенного решения.

В данной работе не предполагается, что искомое решение стеснено условием (1.4), т. е. допускается представление решения в виде бесконечной суммы. Статья организована следующим образом. В разд. 2 приводятся некоторые факты, касающиеся экспоненциальной системы, и доказывается важная лемма 2.2 об аппроксимации по этой системе функции, удовлетворяющей априорным ограничениям (1.2). Исследованию сходимости вариационных методов регуляризации с ограничениями в виде бесконечной системы линейных неравенств (1.2) посвящен разд. 3. В разд. 4 дается обоснование сходимости конечномерных аппроксимаций. В разд. 5 излагаются численные алгоритмы минимизации при построении регуляризованного семейства приближенных решений.

2. Свойства системы экспонент

В теории приближения функций хорошо известна теорема Мюнтца [9] об аппроксимации функции полиномами.

Теорема 2.1 [9]. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_i \to \infty$, $0 < a < b$. Для того чтобы для любой функции $f \in C[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ нашлась линейная комбинация $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{\lambda_i}$ такая, что $\|f - P_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i = \infty. \tag{2.1}$$

В случае отрезка $[0,b]$ условия (2.1) необходимо и достаточно для замкнутости системы $1 \cup \{x^{\lambda_i t}\}$, $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ на $[0,b]$ в метрике пространства $L_p[0,b]$, $p \geq 1$.

Непосредственным следствием теоремы 2.1 является следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть для функций $\{h_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$, $h_0(t) = 1$, $h_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lambda_i \to \infty$, выполнено условие (2.1). Тогда система функций $\{h_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$, замкнута в пространстве $C[0,T]$.*

Пусть $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ и выполнено условие (2.1). Тогда система функций $1 \cup \{e^{-\lambda_i t}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $t \in [0,T]$, замкнута в пространстве $L_p[0,T]$.

Доказательство. Используя замену $x = e^{-t}$, приходим к системе $\{e^{-\lambda_i t}\}$ и утверждению, сформулированному в лемме. □

Из леммы 2.1 непосредственно следует, что решение уравнения (1.1) может быть приближено с любой точностью отрезками ряда по системе экспонент $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i=0}^{\infty}$ в пространствах $L_p[0,T]$, $C[0,T]$.

Предположим, что решение уравнения (1.1) представимо в виде ряда по системе $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i=0}^{\infty}$

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i e^{-\lambda_i t}, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Если ряд (2.2) допускает почленное дифференцирование, т. е.

$$\hat{g}^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t},$$

то при $\hat{c}_i \geq 0$ функция $\hat{g}(t)$ удовлетворяет всем априорным ограничениям (1.2). Как показывается в следующей лемме, из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i < \infty$$

и выполнимости априорных ограничений (1.2) вытекает, что все коэффициенты $\hat{c}_i$ неотрицательны, и это позволяет аппроксимировать решение конечными суммами ряда (2.2) с $\hat{c}_i \geq 0$.

Лемма 2.2. *Пусть функция $g(t)$ имеет представление*

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}, \tag{2.3}$$

где $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ абсолютно сходящийся и $g(t)$ удовлетворяет бесконечной системе априорных неравенств (1.2).

Тогда все коэффициенты $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Предположим противное, что существует коэффициент $c_k < 0$. Если λ_k — предельная точка, тогда из абсолютной сходимости ряда следует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{i\colon 0<|\lambda_i-\lambda_k|<\varepsilon} |c_i| < \frac{|c_k|}{2}. \tag{2.4}$$

В случае, когда λ_k не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_i\}_0^{\infty}$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $i \neq k$, $|\lambda_i - \lambda_k| > \varepsilon$ для всех $i \neq k$ и условие (2.4) также выполнено.

Пусть $\lambda_k = 0$, тогда для $\bar{t} = \dfrac{1}{\varepsilon} \ln \dfrac{4\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|}{|c_k|}$ имеем

$$\begin{aligned} g(\bar{t}) = c_k + \sum_{i\colon 0<\lambda_i<\varepsilon} c_i e^{-\lambda_i \bar{t}} + \sum_{i\colon \lambda_i \geq \varepsilon} c_i e^{-\lambda_i \bar{t}} &\leq c_k + \sum_{i\colon 0<\lambda_i<\varepsilon} |c_i| + \sum_{i\colon \lambda_i \geq \varepsilon} |c_i| e^{-\lambda_i \bar{t}} \\ &\leq c_k + \frac{|c_k|}{2} + \sum_{i\colon \lambda_i \geq \varepsilon} |c_i| e^{-\varepsilon \bar{t}} \leq \frac{c_k}{2} + e^{-\varepsilon \bar{t}} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| \\ &= \frac{c_k}{2} + \frac{|c_k|}{4\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| = \frac{c_k}{2} + \frac{|c_k|}{4} = \frac{c_k}{4} < 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию (1.2).

Пусть теперь $\lambda_k > 0$, тогда для $t_m = \dfrac{m}{\lambda_k}$ и последовательности $\Big\{(-1)^m g^{(m)}(t_m) \dfrac{e^m}{\lambda_k^m}\Big\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, где $g^{(m)}(t) = \dfrac{d^m}{dt^m} g(t)$, имеем следующие соотношения:

$$(-1)^m g^{(m)}(t_m) \frac{e^m}{\lambda_k^m} = (-1)^m \frac{e^m}{\lambda_k^m} \sum_{i=0}^{n} c_i (-\lambda_i)^m e^{-\lambda_i t_m} = \sum_{i=0}^{n} c_i \Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\Big)^m e^{\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)m} = \sum_{i=0}^{n} c_i \left(z_i e^{1-z_i}\right)^m.$$

Здесь $z_i = \lambda_i/\lambda_k$. Функция $\phi(z) = z e^{1-z}$ имеет максимум при $z = 1$. Следовательно, существует $0 < b < 1$ такое, что для всех номеров i, для которых $|\lambda_i - \lambda_k| \geq \varepsilon$ или $|1 - z_i| \geq \varepsilon/\lambda_k$, выполнено неравенство $0 < z_i e^{1-z_i} < b < 1$. Если $i = k$, тогда $z_k = 1$ и $z_k e^{1-z_k} = 1$. Поэтому

$$(-1)^m g^{(m)}(t_m) \frac{e^m}{\lambda_k^m} \leq c_k + \sum_{i\colon 0<|\lambda_i-\lambda_k|<\varepsilon} |c_i| + \sum_{i\colon |\lambda_i-\lambda_k|\geq\varepsilon} |c_i| b^m \leq \frac{c_k}{2} + \sum_{i\colon |\lambda_i-\lambda_k|\geq\varepsilon} |c_i| b^m \xrightarrow{m\to\infty} \frac{c_k}{2} < 0.$$

Следовательно, существует такое число $\bar{m}$, что $(-1)^m g^{(m)}(t_m) < 0$ для $m \geq \bar{m}$, а это противоречит (1.2). □

Таким образом, согласно лемме 2.2 приближенное решение для уравнения (1.1) можно строить в виде конечных сумм ряда (2.3) с неотрицательными коэффициентами, что автоматически гарантирует выполнение априорных ограничений (1.2) и упрощает численную реализацию алгоритмов.

Замечание 2.1. В отличие от теоремы Мюнтца в лемме 2.2 не предполагается выполнение условий

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_i \to \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Замечание 2.2. Если $t \in [\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$, то возможно почленное дифференцирование ряда $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}$, т. е. $g^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t}$. Это вытекает из того, что

$$(-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t} \leq e^{k(\ln(k/\varepsilon)-1)} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|, \tag{2.5}$$

т. е. ряд из производных равномерно сходится.

3. Методы, учитывающие априорные ограничения

3.1. Метод квазирешений

Предположим, что оператор A, определяемый интегральным соотношением (1.1), действует из пространства $L_p[0,T]$ в пространство $L_2[0,T]$. Оператор $A\colon L_p \to L_2$ — компактный на данной паре пространств, следовательно, обратный оператор A^{-1} разрывен, что означает некорректность задачи (1.1). Реальные данные о скорости потока и изменении давления содержат ошибки измерения, поэтому предполагается, что вместо точных $q(t)$, $\Delta p(t)$ заданы некоторые их приближения $q_\nu(t)$, $\Delta p_\delta(t)$, удовлетворяющие условиям аппроксимации

$$\|q - q_\nu\| \leq \nu, \quad \|\Delta p - \Delta p_\delta\| \leq \delta. \tag{3.1}$$

Обозначим через A_ν оператор, определяемый соотношением (1.1), в котором функция $q(t)$ заменена на $q_\nu(t)$.

Рассмотрим метод квазирешений [10; 11] в следующей форме:

$$\min\left\{\|A_\nu g - \Delta p_\delta\|^2_{L_2} \colon 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m < \infty,\ m = 0,1,2,\dots\right\} = \Phi^*, \tag{3.2}$$

причем для точного решения $\hat{g}(t)$ уравнения (1.1) выполнено соотношение $0 \leq (-1)^m \hat{g}^{(m)}(t) \leq d_m$, т. е. $\hat{g}(t)$ принадлежит допустимому множеству.

Теорема 3.1. *Пусть $A, A_\varepsilon\colon L_p[0,T] \to L_2[0,T]$ — взаимнооднозначные операторы и выполнены условия аппроксимации* (3.1). *Тогда существует единственное решение $g_{\nu,\delta}(t)$ задачи* (3.2) *и имеет место сходимость*

$$\lim_{\nu,\delta\to 0} \|g_{\nu,\delta} - \hat{g}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0,1,2,\dots,$$

где $\hat{g}(t)$ — точное решение уравнения (1.1), *$W_p^{(m)}[0,T]$ — пространство Соболева при $p \geq 1$.*

Доказательство. Обозначим через $\Phi(g)$ целевой функционал в задаче минимизации (3.2). Пусть g_n — минимизирующая последовательность, т. е. $\Phi(g_n) \to \Phi^*$ при $n \to 0$. Поскольку

$$\sup_{n,t} g_n(t) = \sup_{n,t} |g_n(t)| \leq d_0 \tag{3.3}$$

и, кроме того,

$$V_0^T[g_n] = \int\limits_0^T |g_n^{(1)}(t)|\,dt \le Td_1,$$

то по теореме Хелли существует поточечно сходящаяся подпоследовательность, которую можно считать совпадающей с g_n:

$$g_n(t) \to \bar{g}_0(t), \quad t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (3.4) вместе с (3.3) влекут сходимость в $L_p[0,T]$, $p \ge 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T |g_n(t) - \bar{g}_0(t)|^p\,dt = 0. \tag{3.5}$$

В силу тех же причин из соотношений

$$\sup_{n,t} |g_n^{(1)}| \le d_1, \quad V_0^T[g_n^{(1)}] = \int\limits_0^T |g_n^{(2)}(t)|\,dt \le Td_2$$

вытекает существование подпоследовательности $g_{n_1}^{(1)}$, сходящейся в $L_p[0,T]$:

$$\lim_{n_1\to\infty} \int\limits_0^T |g_{n_1}^{(1)}(t) - \bar{g}_1(t)|^p\,dt = 0, \tag{3.6}$$

где $\{n_1\} \subseteq \{n\}$. Из полноты пространства $W_p^{(1)}[0,T]$ и соотношений (3.5) и (3.6) следует равенство $\bar{g}_1(t) = \bar{g}_0^{(1)}$, и имеет место сходимость в $W_p^{(1)}$

$$\lim_{n_1\to\infty} \int\limits_0^T \Big[|g_{n_1}(t) - g_0(t)|^p + |g_{n_1}^{(1)}(t) - g_0^{(1)}|^p\Big]\,dt = 0.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что для произвольного натурального $m > 1$ также существует подпоследовательность $g_{n_m}(t), n_m \subseteq n_{m-1}$, такая, что

$$\lim ||g_{n_m} - \bar{g}_0||_{W_p^{(m)}} = 0, \quad n_m \subseteq n_{m-1}, \quad m = 0,1,2,\dots\,. \tag{3.7}$$

Ввиду теорем вложения соотношение (3.7) влечет равномерную сходимость производных любого порядка

$$\lim_{n_m\to\infty} \max |g_{n_m}^{(m)} - \bar{g}_0^{(m)}(t)| = 0, \quad m = 0,1,2,\dots,$$

откуда следует выполнимость соотношений

$$(-1)^m \bar{g}_0^{(m)}(t) = \lim_{n_m\to\infty} (-1)^{(m)} g_{n_m}^{(m)}(t) \ge 0,$$
$$(-1)^m \bar{g}_0^{(m)}(t) = \lim_{n_m\to\infty} (-1)^{(m)} g_{n_m}^{(m)}(t) \le d_m, \quad m = 0,1,2,\dots,$$

т. е. $\bar{g}_0(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи минимизации (3.2).

Из (3.5) и очевидных соотношений

$$\Phi^* \le \Phi(\bar{g}_0) = \lim_{n\to\infty} ||A_{\nu,\delta} g_n - \Delta p_\delta|| = \Phi^*$$

вытекает, что $\bar{g}_0$ реализует минимум целевого функционала в (3.2). В силу строгой выпуклости функционала $\Phi(g)$ такая функция единственная.

Переобозначим $\bar{g}_0(t)$ через $g_{\nu,\delta}(t)$. Очевидно, что для $g_{\nu,\delta}(t)$ справедливы рассуждения, проведенные для минимизирующей последовательности. Поэтому вместо $\bar{g}_0$ для некоторой функции $\bar{g}(t)$ и для любого $m \geq 0$ найдутся подпоследовательности g_{ν_m,δ_m}, для которых выполнены соотношения, аналогичные (3.7). Тогда, в частности, для некоторых $\nu_{n_0} \to 0, \delta_{n_0} \to 0$ при $n_0 \to \infty$ имеет место сходимость в $L_p = W_p^{(0)}$

$$g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}(t) \to \bar{g}(t). \tag{3.8}$$

Ввиду того, что точное решение $\hat{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи (3.2) и оператор $A\colon L_p \to L_2$ непрерывен, имеем соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A\bar{g} - \Delta p\| = \lim_{n_0\to\infty} \|Ag_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - \Delta p\| \leq \limsup_{n_0\to\infty} \|Ag_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - A_{\nu_{n_0}} g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}\| \\ + \limsup_{n_0\to\infty} \|A_{\nu_{n_0}} g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - \Delta p_{\delta_{n_0}}\| + \limsup_{i\to\infty} \|\Delta p_{\delta_{n_0}} - \Delta p\| \\ \leq \limsup_{n_0\to\infty} \Big[\nu_{n_0} T(\|g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}\| + ||\hat{g}||) + 2\delta_{n_0})\Big] = 0, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{g}(t) = \hat{g}(t)$ — единственное решение задачи (1.1). Поскольку все предельные функции последовательности $g_{\nu,\delta}(t)$ относительно сходимости в L_p совпадают с $\hat{g}(t)$, то соотношение (3.8) будет выполнено и для всей последовательности $g_{\nu,\delta}(t)$ при $\nu, \delta \to 0$. В силу тех же причин также будут выполнены соотношения (3.7). □

3.2. Метод Тихонова

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова [12; 13] в следующей форме:

$$\min\big\{\|A_\nu g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g]\colon 0 < \kappa \leq g(t) \leq d_0,\ 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m,\ m = 1, 2, \ldots\big\} = \Psi^*, \tag{3.9}$$

где точное решение $\hat{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям в задаче (3.9) и стабилизирующий функционал $\Omega[g]$ имеет вид

$$\Omega[g] = \int\limits_0^T \Big[\tau g^{(2)}(t)/g(t) + g^{(1)}/g(t) - (\tau g^{(1)}/g(\tau))^2\Big]^2 \frac{d\tau}{\tau}. \tag{3.10}$$

Аргументацию по поводу того, почему именно в виде (3.10) целесообразно использовать функционал $\Omega[g]$, можно найти в работе [8]. Введение дополнительного ограничения $0 < \kappa \leq g(t)$ по сравнению с методом квазирешений связано с тем, что подынтегральное выражение в $\Omega[g]$ содержит слагаемые, имеющие в знаменателе функцию $g(t)$. Поэтому ограниченность снизу для функции $g(t)$ необходима, чтобы гарантировать непрерывность функционала $\Omega[g]$ относительно равномерной сходимости функций и их производных.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* (3.1) *и параметры* ν, δ, α *связаны соотношениями*

$$\alpha(\nu, \delta) \to 0, \quad \nu, \delta \to 0.$$

Тогда задача (3.9) *имеет решение* $g_\alpha(t)$*, возможно, неединственное, при этом имеет место соотношение*

$$\lim_{\nu,\delta\to 0} ||g_{\alpha(\nu,\delta)} - \hat{g}||_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

где $\hat{g}(t)$ *— решение уравнения* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в случае метода квазирешений для минимизирующей последовательности $g_n(t)$ существуют подпоследовательности, сходящиеся по норме $W_p^{(m)}$ к некоторой функции $\bar{g}_0$ из допустимого множества задачи (3.9), т. е. выполнены соотношения (3.7), что влечет равномерную сходимость производных любого порядка и тот факт, что функция $\bar{g}_0$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (3.9). Обозначим через $\Psi(g)$ целевой функционал, а через $g_{\alpha(\nu,\delta)}$ — решение этой задачи. Учитывая непрерывность целевого функционала относительно нормы $C^2[0,T]$ и переходя к пределу при $n_3 \to \infty$, имеем

$$\Psi^* \le \Psi(\bar{g}_0) = \lim_{n_3\to\infty} \Psi(g_{n_3}) = \Psi^*,$$

т. е. $\bar{g}_0(t) = g_{\alpha(\nu,\delta)}(t)$ — некоторое решение задачи (3.9).

Поскольку $g_{\alpha(\nu,\delta)}(t)$ удовлетворяет ограничениям в (3.9), то, как и в случае минимизирующей последовательности, можно выделить подпоследовательности

$$g^{(m)}_{\alpha(\nu_{n_m},\delta_{n_m})}(t) \to \bar{g}^{(m)}(t), \quad n_m \subseteq n_{m-1}, \quad m = 0,1,2,\dots, \tag{3.12}$$

сходящиеся в L_p, где $\bar{g}$ — некоторая функция из допустимого множества. Тогда из соотношений

$$\begin{gathered}
0 \le ||A\bar{g} - \Delta p|| = \lim_{n_3\to\infty} ||Ag_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})} - \Delta p|| \\
\le \limsup_{n_3\to\infty} ||Ag_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})} - A_{\nu_{n_3}} g_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})}|| + \limsup_{n_3\to\infty} \{||A_{\nu_{n_3}} g_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})} - \Delta p_{\delta_{n_3}}|| \\
+ \alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})\Omega(g_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})}\} + \delta_{n_3} \le \limsup_{n_3\to\infty} ||Ag_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})} - A_{\nu_{n_3}} g_{\alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})}|| \\
+ \limsup_{n_3\to\infty} \{||A_{\nu_{n_3}}\hat{g} - \Delta p_{\delta_{n_3}}|| + \alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})\Omega(\hat{g})\} + \delta_{n_3} \\
\le \limsup_{n_3\to\infty} \big[\nu_{n_3} T(||g_{n_3}|| + ||\hat{g}||) + 2\delta_{n_3} + \alpha(\nu_{n_3},\delta_{n_3})\Omega[\bar{g}]\big] = 0
\end{gathered}$$

следует, что $\bar{g}(t)$ — решение уравнения (1.1). По условию оператор A обратим, поэтому $\bar{g}(t) = \hat{g}(t)$ — единственное решение. Это означает, что в действительности вместо (3.12) при любых $\nu,\delta \to 0$ имеет место сходимость производных, следовательно, выполнены соотношения (3.11). □

4. Конечномерная аппроксимация методов

4.1. Рассмотрим конечномерный вариант метода квазирешений в форме

$$\min\Big\{||A_\nu^\varepsilon g - \Delta p_\delta||^2 \colon g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i^n e^{-\lambda_i t},\ c_i^n \ge 0,\ \sum_{i=0}^{n} c_i^n \le d_0\Big\} = \Phi_n^*, \tag{4.1}$$

т. е. приближенное решение в методе квазирешений строится в виде конечного отрезка ряда по системе $\{e^{-\lambda_i t}\}$. Кроме того, в отличие от предыдущих разделов рассматривается интегральное уравнение

$$A_\nu^\varepsilon g \equiv \int\limits_\varepsilon^T q_\nu(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = \Delta p_\delta(t), \tag{4.2}$$

где ε — сколь угодно малый параметр. Переход от отрезка интегрирования $[0,T]$ к отрезку $[\varepsilon,T]$ связан с тем, что в разложении $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}$ на отрезке $[0,T]$ при численном дифференцировании получаем ряд

$$g^{(m)}(t) = (-1)^m \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_i^m e^{-\lambda_i t}, \quad m = 0,1,2,\dots,$$

в котором из-за наличия точки $t = 0$ возникает необходимость предполагать весьма ограничительное условие на убывание коэффициентов ввиду $\lambda_i^m \to \infty$ при $\lambda_i \to \infty, m \to \infty$. Важно отметить, что любая гладкая экстраполяция решения g_ε уравнения (4.2) на $[0, T]$ аппроксимирует решение исходного уравнения (1.1) с точностью порядка ε, что позволяет избежать потери точности. Более того, в численных процедурах, которые строятся на основе рассматриваемых методов, используется полный промежуток $[0, T]$. Таким образом, переход от (1.1) к уравнению (4.2) осуществляется ради разумного упрощения исходной постановки при теоретическом исследовании конечномерной аппроксимации предлагаемых методов решения и не касается численных алгоритмов.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* (3.1) *и решение* $g_{\nu,\delta}(t)$ *задачи*

$$\min\left\{\|A_\nu^\varepsilon g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 : 0 \le (-1)^m g^{(m)}(t) \le d_m < \infty,\ m = 0, 1, 2, \dots\right\} = \Phi^*$$

представимо в виде

$$g_{\nu,\delta}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{\nu,\delta} e^{-\lambda_i t}, \quad c_i^{\nu,\delta} \ge 0. \tag{4.3}$$

Тогда существует единственное решение $\hat{g}^n(t)$ *задачи* (4.1) *и имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{g}^n - g_{\nu,\delta}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть $g_k^n(t)$ — минимизирующая последовательность в (4.1), т. е. $\Phi(g_k^n) \to \Phi_n^*$ при $k \to \infty$, для которой имеем (см. соотношение (2.5))

$$g_k^n(t) = \sum_{i=0}^{n} c_{i,k}^n e^{-\lambda_i t} \le \sum_{i=0}^{n} c_{i,k}^n \le d_0, \quad c_{i,k}^n \ge 0,$$

$$(-1)^m g_k^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_{i,k}^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} \le e^{-m(\ln\frac{m}{\varepsilon} - 1)} d_0 = d_m.$$

Таким образом, как и в задаче (3.2), для минимизирующей последовательности g_k^n выполнены неравенства $0 \le (-1)^m g_k^{(m)}(t) \le d_m, m = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому существует подпоследовательность $g_{k_1}^n$, $k_1 \subseteq k$, такая, что при $k_1 \to \infty$ имеем сходимость в пространстве W_p^1

$$g_{k_1}^n(t) = \sum_{i=0}^{n} c_{i,k_1}^n e^{-\lambda_i t} \to \hat{g}^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i^n e^{-\lambda_i t}.$$

Так как $0 \le c_i^n \le d_0$, то можно считать, что $c_{i,k_1}^n \to \bar{c}_i^n$, $0 \le i \le n$, при $k_1 \to \infty$. Это влечет равенства $\bar{c}_i = \hat{c}_i$ и сходимость в L_p

$$g_{k_1}^{(m)}(t) = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} c_{i,k_1}^n \lambda_i^k e^{-\lambda_i t} \to (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i^n \lambda_i^k e^{-\lambda_i t} = (\hat{g}^n(t))^{(m)},$$

при этом справедливы оценки

$$\sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i^n = \lim_{k_1\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c_{i,k_1}^n \le d_0, \quad \hat{c}_i^n \ge 0, \tag{4.5}$$

$$(-1)^m (\hat{g}^n(t))^{(m)} = (-1)^m \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_i^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} = \lim_{k_1\to\infty} (-1)^m \sum_{i=0}^{n} \hat{c}_{i,k_1}^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} \le d_m. \tag{4.6}$$

Из соотношения (4.5), непрерывности целевого функционала и определения минимизирующей последовательности следует, что функция $\hat{g}^n$ реализует минимум в задаче (4.1). Ввиду сильной выпуклости целевого функционала такая функция единственная.

Поскольку выполнены соотношения (4.5), (4.6), то, как и в теореме (3.1), найдутся подпоследовательности номеров n_m, для которых при $n_m \to \infty$ имеет место сходимость в $W_p^{(m)}, m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\hat{g}^{n_m}(t) \to \bar{g}(t), \quad n_m \subseteq n_{m-1}. \tag{4.7}$$

Более того, предельная функция $\bar{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям в задаче (3.2) для d_m, определенным в (4.5), (4.6). Имеем цепочку неравенств

$$\Phi^* = \Phi(g_{\nu,\delta}) \le \Phi(\bar{g}) = \lim_{n_1 \to \infty} \Phi(\hat{g}^{n_1}) \le \limsup_{n_1 \to \infty} \Phi(P_{n_1} g_{\nu,\delta}) = \Phi^*,$$

где $P_{n_1} g_{\nu,\delta} = \sum_{i=0}^{n_1} c_i^{\nu,\delta} e^{-\lambda_i t}$, и $g_{\nu,\delta}$ задана формулой (4.3). Это означает, что $\bar{g}(t)$ — решение задачи (3.2), а в силу единственности решения $\bar{g}(t) = g_{\nu,\delta}(t)$. Поскольку предельная функция в (4.7) единственная, то справедливы соотношения (4.4). □

4.2. В методе Тихонова поставим в соответствие задаче

$$\min\{\|A_\nu^\varepsilon g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g] \colon 0 < \kappa \le g(t) \le d_0,\ 0 \le (-1)^m g^{(m)}(t) \le d_m,\ m = 1, 2, \ldots\}, \tag{4.8}$$

последовательность конечномерных задач

$$\min\Big\{\|A_\nu^\varepsilon g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha\Omega[g] \colon 0 < \kappa \le g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i^n e^{-\lambda_i t},\ c_i^n \ge 0,\ \sum_{i=0}^{n} c_i^n \le d_0\Big\}. \tag{4.9}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* (3.1), *решение* $g_\alpha(t)$ *задачи* (4.8) *единственно и представимо в виде*

$$g_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^\alpha e^{-\lambda_i t}.$$

Тогда существует решение $\hat{g}^n(t)$ *задачи* (4.9) *и имеет место сходимость*

$$\lim_{n \to \infty} \|\hat{g}^n - g_\alpha\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. С учетом аргументации при доказательстве теоремы (3.2) схема рассуждений с несущественными изменениями вполне аналогична реализованной в теореме (4.1). □

5. Численные алгоритмы минимизации

Алгоритм 1. При численной реализации метода квазирешений оператор A задачи (1.1) (аналогично оператор A^ε задачи (4.2)) аппроксимируется матрицей, определяемой формулой

$$(A_{mn}c)_i = \int_0^{t_i} q_\nu^k(t_i - \tau) g^n(\tau)\, d\tau = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_0^{t_i} q_\nu^k(t_i - \tau) e^{-\lambda_i \tau}\, d\tau,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$, $n = 100$, $q_\nu^k(t)$ — кусочно-линейная функция, которая строится на сетке $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ со значениями $\{q_\nu(\tau_i)\}_{i=1}^k$. Параметры λ_i выбираются из условия $e^{-\lambda_i \bar{\tau}_i} = \gamma$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\lambda_0 = 0$, $\gamma = 0.01$, где $\bar{\tau}_i$ — равномерная сетка в логарифмической шкале:

$$\ln \bar{\tau}_i = \ln \bar{\tau}_1 + \frac{i-1}{n-1}(\ln \bar{\tau}_n - \ln \bar{\tau}_1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь задача минимизации (4.1) сводится к задаче

$$\min\Big\{||A_{mn}c - \Delta p^m||^2_{R^m} : c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} c_i \leq d_0\Big\}. \tag{5.1}$$

Обозначим целевую функцию в (5.1) через $\Phi(c)$. Допустимая область в (5.1) представляет собой симплекс с $n+1$ вершиной. Для нахождения вектора $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$ привлекается метод условного градиента [14, гл. 5, § 4]. На каждой итерации алгоритма выполняются следующие шаги:

1. В текущей точке c^k вычисляется градиент $\Delta\Phi(c^k)$.

2. Выбирается вершина симплекса v^k, для которой минимально скалярное произведение $\min\limits_{v}\langle v - c^k, \Delta\Phi(c^k)\rangle$.

3. Выполняется шаг одномерной минимизации $t^k = \arg\min\limits_{t=[0,1]} \Phi((1-t)c^k + tv^k)$.

4. Для $c^{k+1} = (1-t^k)c^k + t^k v^k$ выполняется следующий шаг алгоритма.

Остановка итерационного алгоритма выполняется по принципу обобщенной невязки [15].

А л г о р и т м 2. Дискретная аппроксимация метода Тихонова (4.9) проводится аналогично методу квазирешений. В качестве численного алгоритма минимизации нелинейной функции $n+1$ переменных используется метод активных ограничений [16, гл. 16, разд. 5] с итерационными шагами на основе регуляризованного метода Ньютона. Кратко опишем основные его этапы.

Перед первым шагом алгоритма множество активных ограничений задается пустым $S = \varnothing$. Также выбирается дополнительный параметр регуляризации $\beta > 0$ и параметр $e > 0$ для условия останова.

Рассмотрим k-й шаг итерации алгоритма.

1. Для текущей точки c^k вычисляются градиент f^k и гессиан H^k минимизируемой функции Ψ в задаче (4.9). Имеем следующее приближение для функции Ψ:

$$\Psi(c^k + \Delta c) \approx \Psi(c^k) + \Delta c^T f + \Delta c^T H^k \Delta c.$$

2. Для $i \in S$, т. е. для коэффициентов $c_i = 0$ с активными ограничениями, устанавливаем $\bar{f}_i^k = 0$, $\bar{H}_{ij}^k = 0$, $\bar{H}_{ji}^k = 0$. Для $i, j \notin S$ $\bar{f}_i^k = f_i^k$, $\bar{H}_{ij}^k = H_{ij}^k$.

3. Проверяем, является ли оператор $\bar{H}^k + \beta I$ положительно определенным. Если нет, то удваиваем β до тех пор, пока $\bar{H}^k + \beta I$ не станет положительно определенным.

4. Находим Δc^k из условия минимума квадратичного функционала $\Delta c^T \bar{f}^k + \Delta c^T(\bar{H}^k + \beta I)\Delta c$:

$$\Delta c^k = -(\bar{H}^k + \beta I)^{-1}\bar{f}^k.$$

5. Выполняем шаг одномерной минимизации с ограничениями

$$t^k = \arg\min_t\big\{\Psi(c^k + t\Delta c^k)\colon c_i^k + t\Delta c_i^k \geq 0\big\},$$
$$c^{k+1} = c^k + t^k \Delta c^k.$$

6. Если $t > 0$ и $\|f^k\| \leq e$, то удаляем одно из активных ограничений $S = S \setminus \{\bar{i}\}$, где $\bar{i} = \arg\min\limits_{i \in S}\{f_i^k\colon f_i^k < 0\}$. Если для всех $i \in S$, $f_i^k \geq 0$, то алгоритм завершается и искомая функция строится по найденным коэффициентам: $g(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i^{k+1} e^{-\lambda_i t}$.

7. Если $t = 0$, тогда существует такой коэффициент c_i, что $c_i^k = 0$, $\Delta c_i^k < 0$. К множеству активных ограничений добавляем еще одно $S = S \cup \{\bar{i}\}$, где $\bar{i} = \arg\min\limits_{i} \Delta c^k$.

8. Повторяем шаг итерации для c^{k+1} и, возможно, нового набора активных ограничений.

Если функция $q(t)$ известна с большой погрешностью $\|q - q_\nu\| \leq \nu$, тогда приходится выполнять коррекцию по $q(t)$ для вычисления $g(t)$ с приемлемой точностью. Как показали численные эксперименты, достаточно 10–20 шагов коррекции $q(t)$. Описание алгоритма коррекции, а также результаты численных экспериментов можно найти в [6; 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Everdinger A.F. von, Hurst W.** The application of the Laplace transformation to flow problem in reservoir // Trans. AIME. 1949. Vol. 186. P. 305–324.
2. **Bourdet D., Ayoub J.A., Pirard Y.M.** Use of pressure derivative in well-test interpretation // SPE Formation Evaluation. 1989. SPE Paper 12777. P. 293–302.
3. **Pimonov E.A., Onur M., Kuchuk F.J.** A new robust algorithm for solution of pressure/rate deconvolution problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2009. Vol. 17, iss. 6. P. 611–627.
4. Determination of aquifer influence functions from field data / K.H. Coats, L.A. Rapport, J.R. McCord, W.P. Drews // Trans. AIME. 1964. Vol. 231. P. 1417–1424.
5. **Kuchuk F.J., Onur M., Hollander F.** Pressure transient formation and well testing: Convolution, deconvolution and nonlinear estimation. Amsterdam: Elsevier, 2010. 387 p.
6. New regular algorithms for solution of the convolution problem in well test interpretation / V. Vasin, G. Skorik, E. Pimonov, F. Kuchuk // Appl. Math. 2010. Vol. 1, no. 5. P. 387–399.
7. **Schroeter T. von, Hollander F., Gringarten A.** Deconvolution of well-test data analysis as a nonlinear total least squares problem // SPE J. 2004. Vol. 9, no. 4. P. 375–390.
8. **Vasin V.V., Skorik G.G.** Pressure/rate deconvolution problem and reconstruction of solution satisfying to all a priori constraints // Proc. 8^{th} Intern. Conf. on Inverse Problems in Engineering / eds. I. Szczygiel, A.J. Novak, M. Rojchyk; Inst. Thermal Technology Silesian University of Technology. Gliwice; Krakow, 2014. P. 343–352.
9. **Müntz H.** Über den Approximationssatz von Weierstrass // H. A. Schwarz's Festschrift. Berlin, 1914. P. 303–312.
10. **Иванов В.К.** О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.
11. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear Ill-posed problems and its applications. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: USP, 2002. 281 p.
12. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задачах и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
13. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 285 с.
14. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.
15. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука; Физматлит, 1995. 307 с.
16. **Nocedal J. and Wright S.J.** Numerical optimization. 2nd ed. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2006. 664 p.

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 15.01.2016

Скорик Георгий Григорьевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: skorik@imm.uran.ru