ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОГО ОТСЛЕЖИВАНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. С. Близорукова, В. И. Максимов

В статье рассматривается задача отслеживания решения эталонного параболического уравнения решением другого уравнения. Конструируется устойчивый алгоритм решения задачи, основанный на методе экстремального сдвига. Алгоритм ориентирован на достаточно большой промежуток времени, в течение которого функционируют оба уравнения.

Ключевые слова: параболическое уравнение, задача слежения.

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On the stable tracking problem for a solution of a differential equation in a Hilbert space.

We consider the problem of tracking a solution of a reference parabolic equation by a solution of another equation. A stable algorithm based on the extremal shift method is proposed for this problem. The algorithm is designed to work on a sufficiently large time interval where both equations operate.

Keywords: parabolic equation, tracking problem.

MSC: 93C20, 35K90

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-63-70

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается параболическое уравнение в гильбертовом пространстве $(X, |\cdot|_X)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где A — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t)\colon X \to X$ $(t \in T)$, $f(\cdot) \in L_2(T; X)$ — заданное возмущение, B — линейный непрерывный оператор $(B \in \mathcal{L}(U; X))$, U — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_U$.

Слабым решением уравнения (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ и начальному состоянию $x(0) = x_0$, называется непрерывная функция $x(t):\ T \to X$, определяемая равенством

$$x(t) = \mathcal{X}(t)x_0 + \int\limits_0^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bu(\tau) + f(\tau)\}\,d\tau. \tag{1.2}$$

Как известно, для любых $x_0 \in X$, $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ существует единственное слабое решение $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) \in C(T; X)$ уравнения (1.1).

Рассматриваемая в работе задача может быть сформулирована следующим образом. Уравнение (1.1) подвержено влиянию некоторого управления $u(t) \in P$. Здесь $P \subset U$ — ограниченное замкнутое множество — некоторый "ресурс" управления. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$ $(i = 1, 2 \ldots)$ измеряется с ошибкой состояние $x(\tau_i)$ уравнения (1.1). Результаты этих измерений — элементы $\xi_i^h \in X$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_X \le \nu_i^h, \tag{1.3}$$

где $\nu_i^h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i, число $h \in (0,1)$ характеризует точность измерения. Более подробно свойства величин ν_i^h будут указаны ниже. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t) + f(t), \quad t \in T, \quad y(0) = y_0. \tag{1.4}$$

Это уравнение назовем эталонным. Решение эталонного уравнения $y(t)$ порождено некоторым управлением $v(\cdot) \in P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T;U) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}$. Управление $v(\cdot)$, а также отвечающее ему решение $y(\cdot) = y(\cdot;0,y_0,v(\cdot))$ уравнения (1.4) заранее не известны. В дискретные моменты времени $\tau_i \in T$ $(i = 1,2\ldots)$ наряду с $x(\tau_i)$ измеряются состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i;0,y_0,v(\cdot))$ уравнения (1.4). Состояния $y(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\psi_i^h \in X$, $i = 1,2,\ldots,$ — удовлетворяют неравенствам

$$|y(\tau_i) - \psi_i^h|_X \le \nu_i^h. \tag{1.5}$$

Будем предполагать, что начальные состояния

$$|y_0 - x_0|_X \le h. \tag{1.6}$$

Требуется указать устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм, который в режиме реального времени по результатам измерений ξ_i^h и ψ_i^h формирует управление $u = u^h(\cdot)$, позволяющее отслеживать решение $y(\cdot)$ уравнения (1.4) решением $x(\cdot)$ уравнения (1.1) так, что равномерное отклонение $y(\cdot)$ от $x(\cdot)$ на промежутке T сколь угодно мало при достаточной малости измерительной погрешности h. В дальнейшем решение уравнения (1.1), порожденное управлением $u = u^h(\cdot)$, обозначим символом $x^h(\cdot) = x(\cdot;0,x_0,u^h(\cdot))$.

В случае, когда промежуток T функционирования системы ограничен, рассматриваемая задача может быть решена на основе конструкций работ [1–6]. Следует отметить, что предложенные в указанных выше работах алгоритмы ориентированы именно на конечный промежуток времени. С возрастанием длины этого отрезка происходит накопление вычислительных и измерительных ошибок. Алгоритмы, свободные от этого недостатка для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, были предложены в работах [7; 8], для параболического уравнения — в работе [9]. При этом в [9] использовалось функционально-аналитическое представление решения. В настоящей работе мы используем полугрупповое представление решений.

Пусть для каждого $h \in (0,1)$ зафиксировано семейство Δ_h разбиений полуоси $[0,+\infty)$ контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h), \quad \delta_i(h) \in (0,1), \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h) = +\infty \quad \forall h \in (0,1).$$

Символом $\Xi(x(\cdot),h)$ обозначим множество кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot) : [0,+\infty) \mapsto X$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i},\tau_{h,i+1})$, $i \ge 0$, $\xi_0^h = x_0$, удовлетворяющих неравенствам (1.3). В свою очередь символом $\Xi(y(\cdot),h)$ обозначим множество кусочно-постоянных функций $\psi^h(\cdot) : [0,+\infty) \mapsto X$, $\psi^h(t) = \psi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i},\tau_{h,i+1})$, $i \ge 0$, $\psi_0^h = y_0$, удовлетворяющих неравенствам (1.5).

Пусть выполнено следующее

Условие 1. В пространстве X введена эквивалентная норме $|\cdot|_X$ норма $|\cdot|_2$, в которой полугруппа $\mathcal{X}(t)$ ω-диссипативна

$$|\mathcal{X}(t)x|_2 \le \exp(\omega t)|x|_2 \quad \text{для любых} \quad x \in X, \tag{1.8}$$

где ω — некоторая положительная постоянная величина. Норма $|\cdot|_2$ порождена некоторым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_2$.

В дальнейшем, как это часто принято, мы отождествляем пространство X с сопряженным к нему пространством X^*.

Введем критерий отклонения $x^h(\cdot)$ от $y(\cdot)$ на ограниченном отрезке времени $[0,\vartheta]$:

$$W(x^h(\cdot),y(\cdot)|\vartheta)=\max_{0\le\tau_i\le\vartheta}\exp(-2\omega\tau_i)\left|y(\tau_i;0,y_0,v(\cdot))-x^h(\tau_i;0,x_0,u^h(\cdot))\right|_X^2,\quad \tau_i=\tau_{h,i}.$$

2. Алгоритм решения

Введем условия.

У с л о в и е 2. Семейство разбиений Δ_h (1.7) и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что имеют место соотношения

$$\nu_0^h\le c_*h\quad (c_*=\text{const}>0),\quad \nu_i^h\in(0,1)\ \text{при всех}\ i=0,1,\dots\ \text{и всех}\ h\in(0,1),$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\delta_i(h)\nu_i^h\le\varphi_1(h)\to 0+\quad \text{при}\ h\to 0+\,.$$

У с л о в и е 3. Выполняется неравенство $\sum_{i=0}^{+\infty}\delta_i^2(h)\le\varphi_2(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Условие 2 по существу означает, что на помехи, реализуемые в канале наблюдения, накладываются ограничения “малости” их средних значений за весь промежуток времени функционирования системы.

До начала работы алгоритма фиксируются величина $h\in(0,1)$ и разбиение Δ_h (см. (1.7)). Работа алгоритма разбивается на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент $t=\tau_i$ измеряются фазовые состояния $x^h(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$, т.е. находятся элементы $\xi_i^h\in X$ и $\psi_i^h\in X$ со свойствами (1.3) и (1.5). Затем вычисляется измеримая (по Лебегу) функция $u^h(\cdot)$

$$\exp(-2\omega\tau_{i+1})(B^*\mathcal{X}^*(\tau_{i+1}-\tau)\tilde s_i,u^h(\tau))_2 \tag{2.1}$$

$$\le\inf\left\{\exp(-2\omega\tau_{i+1})(B^*\mathcal{X}^*(\tau_{i+1}-\tau)\tilde s_i,u)_2\colon u\in P\right\}+d\nu_i^h\quad \text{при п.в.}\quad \tau\in[\tau_i,\tau_{i+1}),$$

где $d=\text{const}>0$, B^* — сопряженный оператор,

$$\tilde s_i=\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)s_i,\quad s_i=\xi_i^h-\psi_i^h.$$

После этого управление $u^h(t)$ подается на вход уравнения (1.1) при $t\in[\tau_i,\tau_{i+1})$. Под действием этого управления фазовая траектория (1.1) переходит из состояния $x^h(\tau_i)$ в состояние $x^h(\tau_{i+1})=x(\tau_{i+1};\tau_i,x^h(\tau_i),u^h(\cdot))$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Тогда при всех* $\vartheta\ge 0$

$$W(v(\cdot),u^h(\cdot)|\vartheta)\le\nu(h), \tag{2.2}$$

где $\nu(h)=b_1(h^2+\varphi_1(h)+\varphi_2(h))$, b_1 *— постоянная, которая может быть выписана в явном виде.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi^h(\cdot)\in\Xi(x(\cdot),h)$, $\psi^h(\cdot)\in\Xi(y(\cdot),h)$. Оценим изменение функционала

$$\varepsilon_h(t)=\exp(-2\omega t)|x^h(t)-y(t)|_2^2. \tag{2.3}$$

При $t \in \delta_i$ имеют место соотношения (см. (1.2))

$$x^h(t) = \mathcal{X}(t-\tau_i)x^h(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \mathcal{X}(t-\tau)\{Bu^h(\tau) + f(\tau)\}\, d\tau,$$

$$y(t) = \mathcal{X}(t-\tau_i)y(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \mathcal{X}(t-\tau)\{Bv(\tau) + f(\tau)\}\, d\tau.$$

Поэтому в силу (1.8) при всех $i = 0, 1, \ldots$ верна оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \le \exp(-2\omega\tau_{i+1})|\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)(x^h(\tau_i) - y(\tau_i))|_2^2 + \lambda_i + \mu_i, \tag{2.4}$$

где

$$\lambda_i = 2\biggl(S_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{u^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau\biggr)_2, \tag{2.5}$$

$$\mu_i = c_1\delta_i(h)\exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{v(\tau) - u^h(\tau)\}|_2^2\, d\tau, \quad \delta_i(h) = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad \tau_i = \tau_{h,i},$$

$$S_i = \exp(-2\omega\tau_{i+1})\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)(x^h(\tau_i) - y(\tau_i)).$$

Здесь и всюду ниже символы c_i означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Нетрудно видеть, что

$$\mu_i \le c_2\delta_i^2(h), \tag{2.6}$$

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})\biggl(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)B\{u^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau\biggr)_2 + c_3\nu_i^h\delta_i(h). \tag{2.7}$$

Объединяя (2.3)–(2.7) и учитывая правило определения управления $u^h(\cdot)$ (см. (2.1)), будем иметь

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \le \varepsilon_h(\tau_i) + c_2\delta_i^2(h) + c_3\nu_i^h\delta_i(h) \le \varepsilon_h(\tau_i) + c_4\delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h)), \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, при всех $i = 1, 2, \ldots$ верны неравенства

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le \varepsilon_h(0) + c_4\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h)), \tag{2.8}$$

где в силу (1.6) $\varepsilon_h(0) \le c_5h^2$. Из (2.8), учитывая условия 2, 3, получаем при всех $i = 0, 1, \ldots$

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le b_1(h^2 + \varphi_1(h) + \varphi_2(h)).$$

Отсюда следуют неравенства (2.2). Теорема доказана.

Пусть множество P имеет вид

$$P = \sum_{j=1}^{m} \omega_j u_j, \quad \omega_j \in U, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

где $u = \{u_1, \ldots, u_m) \in P_1 \subset \mathbb{R}^m$, P_1 — ограниченное и замкнутое множество, управление $v(t)$ в правой части уравнения (1.4) имеет следующую структуру: $v(t) = \sum_{j=1}^m \omega_j v_j(t)$. В этом случае естественно выбирать управления $u^h(\cdot)$ той же структуры. Именно, по правилу

$$u^h(t) = \sum_{j=1}^{m} u_{ji}^h\omega_j \quad \text{при п. в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Здесь

$$u_i^h = \{u_{1i}^h, \dots, u_{mi}^h\}, \quad \sum_{j=1}^m u_{ji}^h \big(\mathcal{X}^*(\delta_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], B\omega_j\big)_2$$

$$\le \inf\Big\{\sum_{j=1}^m v_j(\mathcal{X}^*(\delta_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], B\omega_j)_2 \colon v = \{v_1, \dots, v_m\} \in P_1\Big\} + d\nu_i^h, \ \delta_i = \delta_i(h).$$

Пусть решение уравнения (1.4) остается в ограниченной области, т. е. выполнено следующее

Условие 4. $\sup\big\{|y(t; 0, y_0, v(\cdot))|_X \colon t \in T\big\} < \infty$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условие* 4. *Пусть также*

$$\varphi_3(h) = \sum_{i=0}^\infty \delta_i(h)\mu(\delta_i(h)) \to 0 \quad \textit{при} \quad h \to +0,$$

где

$$\mu(\delta) = \sup_{t \in [0,\delta]} \Big|\mathcal{X}(t)\sum_{j=1}^m B\omega_j - \sum_{j=1}^m B\omega_j\Big|_X.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1. *При этом*

$$\nu(h) = b_2(h^2 + \varphi_1(h) + \varphi_2(h) + \varphi_3(h)),$$

где b_2 *— постоянная, которая может быть выписана в явном виде.*

Доказательство. Учитывая условие 4, заключаем, что верно неравенство

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bu^h(\tau)\Big)_2 d\tau$$

$$- \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)Bv(s)\Big)_2 d\tau \le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], Bu^h(\tau)\Big)_2 d\tau$$

$$- \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], Bv(\tau)\Big)_2 d\tau + K^{(0)}\mu(\delta_i)\delta_i,$$

где $\delta_i = \delta_i(h)$. Здесь и ниже $K^{(i)} = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, вместо неравенства (2.7) будем иметь

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})\bigg(\tilde{s}_i, \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B\{u^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau\bigg)_2 + K^{(1)}(\nu_i^h + \mu(\delta_i))\delta_i.$$

Поэтому вместо (2.8) получаем

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le \varepsilon_h(0) + K^{(2)}\sum_{i=0}^\infty \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h) + \mu(\delta_i(h))), \quad i = 0, 1, \dots .$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

При некоторых дополнительных требованиях к полугруппе $\mathcal{X}(t)$ процедура вычисления $u^h(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, может быть упрощена. Перейдем к описанию этих требований. Введем

Условие 5. Полугруппа $\mathcal{X}(t)$ обладает свойством: каково бы ни было ограниченное множество $X_* \subset X$, найдутся такие числа $\delta_* \in (0,1)$ и $k_0 = k_0(X_*) \in (0,+\infty)$, при которых равномерно по всем $x \in X_*$, $\delta \in (0,\delta_*)$, $\delta_1 \in [0,\delta]$, $v(\delta_1) \in P$ п. в. на $[0,\delta]$ выполняются неравенства

$$|(\mathcal{X}(\delta)x, \mathcal{X}(\delta_1)Bv(\delta_1))_2 - (x, Bv(\delta_1))_2| \le k_0\gamma(\delta),$$

где $\gamma(\cdot) : [0,\delta_*) \to \mathbb{R}$ — непрерывная в нуле неотрицательная функция, $\gamma(0) = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 4, 5, *а также условия теоремы* 1. *Пусть функция* $u^h(\cdot)$ *находится по правилу*

$$u^h(t) = u_i^h \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{2.9}$$

где

$$\exp(-2\omega\tau_{i+1})(\xi_i, Bu_i^h)_2 \le \inf\big\{\exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu)_2 \colon u \in P\big\} + d\nu_i^h.$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 2, *если*

$$\varphi_3(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)\gamma(\delta_i(h)) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to +0.$$

Доказательство. Действительно, в силу условия 5 верно неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bu^h(\tau)\Big)_2\, d\tau$$

$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1}-\tau)Bv(s)\Big)_2\, d\tau$$

$$\le \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\xi_i^h - \psi_i^h, Bu^h(\tau)\Big)_2\, d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\xi_i^h - \psi_i^h, Bv(\tau)\Big)_2\, d\tau + K_0\gamma(\delta_i)\delta_i,$$

где $\delta_i = \delta_i(h)$. Здесь и ниже $K_i = \mathrm{const} > 0$. Следовательно, вместо (2.7) будем иметь

$$\lambda_i \le 2\exp(-2\omega\tau_{i+1})\Big(\tilde{s}_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B\{u^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau\Big)_2 + K_1(\nu_i^h + \gamma(\delta_i))\delta_i.$$

Поэтому, учитывая (2.9), получаем

$$\varepsilon_h(\tau_i) \le \varepsilon_h(0) + K_2\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h) + \gamma(\delta_i(h)), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Пример

Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i y(t-\nu_i) + \int_{-\nu_l}^{0} A_*(s)y(t+s)\, ds, + B_0u(t), \quad t \in T, \tag{3.10}$$

с начальным условием $y(t_0)=\varphi^0$, $y(t_0+s)=\varphi^1(s)$ при п. в. $s\in[-\nu_l,0]$.

Здесь $y(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^m$, $\varphi^0\in\mathbb{R}^n$, $\varphi^1(\cdot)\in L_2([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n)$, $0=\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_l$, $y_t\colon s\to y(t+s)$, $-\nu_l\le s\le 0$, A_i и B_0 — постоянные матрицы размерности $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, элементы матричной функции $s\to A_*(s)$, $s\in[-\nu_l,0]$, принадлежат пространству $L_\infty([-\nu_l,0];\mathbb{R})$, $U=\mathbb{R}^m$.

Обозначим через $X=\mathbb{R}^n\times L_2([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n)$ гильбертово пространство пар $x=(x^0,x^1(s))$ со скалярным произведением

$$(x,y)_X=(x^0,y^0)_{\mathbb{R}^n}+\int\limits_{-\nu_l}^{0}(x^1(s),y^1(s))_{\mathbb{R}^n}\,ds$$

и нормой $|\cdot|_X$, индуцированной этим скалярным произведением.

Уравнение (3.10) (см. [10;11]) порождает C_0-полугруппу линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t)$, $t\ge 0$, определяемых следующим образом. Пусть $s_0(\cdot)$ — единственное решение на T матричного уравнения

$$\frac{ds_0(t)}{dt}=A_0s_0(t)+\sum_{i=1}^{l}A_is_0(t+\nu_i)+\int\limits_{-\nu_l}^{0}A_*(s)s_0(t+s)\,ds\quad\text{при п. в.}\quad t\in T,$$

с начальным условием $s_0(t)=E$ (единичная $n\times n$-матрица) при $t\le 0$; $B_*\colon L_2([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n)\to L_2([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n)$ — оператор вида

$$(B_*\varphi)(\tau)=\sum_{i=1}^{l}A_i\chi_{[-\nu_i,0]}(\tau)\varphi(-\nu_i-\nu)+\int\limits_{-\nu_l}^{0}A_*(\xi)\varphi(\xi-\tau)\,d\xi\quad\text{при п. в.}\quad\tau\in[-\nu_l,0],$$

$\chi_{[a,b]}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[a,b]$; оператор $F:X\to X$ определен для всех $(F\varphi)^0=\varphi^0$, $(F\varphi)^1=B_*\varphi^1$ $(\varphi=(\varphi^0,\varphi^1(s))\in X)$. Тогда [11, с. 903]

$$\mathcal{X}(t)\varphi=G_tF\varphi+S(t)\varphi,\tag{3.11}$$

где $G_t:X\to X$, $S(t):X\to X$,

$$(S(t)\varphi)^0=0,\quad (S(t)\varphi)^1(\tau)=\varphi(t+\tau)\chi_{[-\nu_l,-t)}(\tau),$$

$$(G_t\varphi)^0=(G_t\varphi)^1(0),\quad (G_t\varphi)^1(\tau)=s_0(t+\tau)\varphi^0+\int\limits_{-\nu_l}^{0}s_0(t+\tau+\xi)\varphi^1(\xi)\,d\xi,\quad \tau\in[-\nu_l,0].$$

При этом оператор A задается соотношениями [11, предложение 2.1] $D(A)=\bigl\{\varphi=(\varphi^0,\varphi^1(s))\in X:\varphi^1(\cdot)\in W^{1,2}([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n),\ \varphi^1(0)=\varphi^0\bigr\}$, $A(\varphi)=(L(\varphi^1),\dot\varphi^1)$, $\varphi=(\varphi^0,\varphi^1(\cdot))\in D(A)$. Здесь $W^{1,2}([a,b];\mathbb{R}^n)$ означает пространство n-мерных абсолютно непрерывных функций, производные которых являются элементами пространства $L_2([a,b];\mathbb{R}^n)$. Пусть оператор $B\in\mathcal{L}(U;X)$ имеет вид

$$Bu=(B_0u,\mathcal{O})\in X\quad(u\in U,\ \mathcal{O}\in L_2([-\nu_l,0];\mathbb{R}^n)).$$

Пусть $y(\cdot;0,(\varphi^0,\varphi^1(\cdot)),u(\cdot))$ — единственное решение уравнения (3.10) в смысле Каратеодори, $x(\cdot;0,x_0,u(\cdot))$ — слабое решение абстрактного дифференциального уравнения (1.1), где $x_0=(\varphi^0,\varphi^1(\cdot))\in X$. Тогда для любых $x_0=(\varphi^0,\varphi^1(\cdot))\in X$, $u(\cdot)\in L_\infty(T;U)$ и $t\in T$ справедливо равенство $x(t;0,x_0,u(\cdot))=\bigl(y(t;0,(\varphi^0,\varphi^1(\cdot)),u(\cdot)),y_t(\cdot;0,(\varphi^0,\varphi^1(\cdot)),u(\cdot))\bigr)$. В пространстве X норму $|\cdot|_2$ зададим следующим образом:

$$|(\varphi^0,\varphi^1(\cdot))|_2=\left(|\varphi^0|^2_{\mathbb{R}^n}+\int\limits_{-\nu_l}^{0}|\varphi^1(\tau)|^2_{\mathbb{R}^n}g(\tau)\,d\tau\right)^{1/2},\ (\varphi^0,\varphi^1(\cdot))\in X,$$

где $g(\tau) = j$ при $j \in (-\nu_{l-j+1}, -\nu_{l-j})$, $j \in [1 : l]$. Скалярное произведение, отвечающее этой норме, имеет вид

$$\big((\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), (\overline{\varphi}^0, \overline{\varphi}^1(\cdot))\big)_2 = (\varphi^0, \overline{\varphi}^0)_{\mathbb{R}^n} + \int\limits_{-\nu_l}^{0} g(\tau)(\varphi^1(\tau), \overline{\varphi}^1(\tau))_{\mathbb{R}^n}\, d\tau.$$

В таком случае [11, лемма 2.3] полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, (3.11) ω-диссипативна. При этом

$$\omega = \frac{l+1}{2} + |A_0|_* + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} |A_i|_*^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{-\nu_l}^{0} |A_*(\tau)|_*^2\, d\tau.$$

Здесь символ $|\cdot|_*$ означает евклидову норму матрицы. Нетрудно проверить, что полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, вида (3.11) удовлетворяет условию 5 при $\gamma(\delta) = \delta^{1/2}$. Кроме того, в равенстве (2.9) $(s_i, Bu)_2 = (y(\tau_i) - \xi(\tau_i))' B_0 u$, где $s_i = (y(\tau_i) - \xi(\tau_i), \mathcal{O}) \in X$, $\mathcal{O} \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$. Здесь $\xi(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ — результат измерения состояния $y(\tau_i; (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), u(\cdot))$, $|y(\tau_i) - \xi(\tau_i)|_{\mathbb{R}^n} \le \nu_i^h$, штрих означает транспонирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. 456 с.
2. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 654 с.
3. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург, 2000. 305 с.
4. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011. 291 с.
5. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Из. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
6. **Maksimov V.I.** Regularized extremal shift in problems of stable control // System Modeling and Optimization. Berlin: Springer, 2013. P. 112–121. (IFIP Advances in Information and Communication Technology; vol. 391.)
7. **Maksimov V.I** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
8. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
9. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
10. **Banks H.T., Kappel F.** Spline approximation for functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1979. Vol. 34, no. 3. P. 406–522.
11. **Bernier C., Manitius A.** On semigroups in $R^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delays // Canad. J. Math. 1978. Vol. 14, no. 5. P. 897–914.

Поступила 10.12.2015

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, ВШЭМ
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, ВШЭМ
e-mail: msb@imm.uran.ru.