ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ[1]

М. С. Близорукова

Для динамической системы с запаздыванием в управлении рассмотрена задача о гарантированном наведении системы на выпуклое целевое множество в фиксированный момент времени. Приведен критерий разрешимости задачи. Рассмотрен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы с запаздыванием.

M. S. Blizorukova. On a control problem for a linear system with delay in the control.

The problem of guaranteed guidance to a convex target system at a fixed time is considered for a linear system with delay in the control. A solvability criterion is given and an illustrating example is presented.

Keywords: control, incomplete information, linear systems with delay.

MSC: 49J35, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-55-62

1. Введение. Постановка задачи

Использование метода неупреждающих конструкций (квазистратегий) применительно к классу задач управления с неполной информацией привело к появлению нового метода, предложенного А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым, именно метода программных пакетов [1; 2]. Конструктивизм данного метода состоит в том, что программные пакеты трактуются как идеализированные процедуры управления. Исходной задаче о гарантирующем управлении в классе обратных связей сопоставляется аналогичная задача в классе программных пакетов. Устанавливается эквивалентность этих задач, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи значительно более простой. Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае конечного начального множества был получен критерий разрешимости задачи пакетного наведения [3]. Предложенный метод в дальнейшем был применен к решению задачи игрового наведения с неполной информацией для линейных систем [4; 5]. В данной работе указанный метод развивается для динамической системы с запаздыванием в управлении.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)u(t-\nu) + C(t), \tag{1.1}$$

$$u_{t_0}(s) = u_0(s) \in C([-\nu, 0]; \mathbb{R}^n), \quad x(t_0) = x_0,$$

где t — время из некоторого фиксированного отрезка $T = [t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < +\infty)$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы в момент t; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в момент t, $\nu > 0$ — постоянное запаздывание, символ $u_t(s)$ означает функции $u_t(s) = u(t+s)$ при $s \in [-\nu, 0]$; $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ — непрерывные матричные функции размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно, определенные на T, $C(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор-функция.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

Пусть $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий мгновенный ресурс управления. Под программным управлением (программой) будем понимать всякую измеримую по Лебегу на T функцию. Множество всех программ обозначим $\mathcal{U}$. Для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всякой программы $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения (1.1), определенное на отрезке T и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, $u(s) = u_0(s)$, назовем движением системы из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$ и будем обозначать его как $x(\cdot|x_0, u_0(s), u(\cdot))$. Пусть задано конечное множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$. Управляющей стороне априори известно, что начальное состояние системы содержится в этом множестве, но само это начальное состояние не известно. Множество X_0 назовем множеством допустимых начальных состояний. Начальную функцию $u_0(s)$ считаем известной. Пусть также заданы выпуклое замкнутое целевое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и матрица-функция наблюдения: кусочно-непрерывная слева функция $Q(\cdot)$ на T, принимающая значения в пространстве $q \times n$-матриц.

Перед управляющей стороной стоит задача гарантированного позиционного наведения, состоящая в формировании такого правила формирования управления, которое гарантирует попадание состояния $x(t)$ системы в конечный момент ϑ в заранее заданную сколь угодно малую окрестность целевого множества M. В процессе движения управляющая сторона формирует искомое управление позиционно (по принципу обратной связи), получая в каждый текущий момент времени t сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии системы в этот момент.

2. Метод построения наводящего пакета программ

Прежде чем перейти к описанию метода решения рассматриваемой задачи, приведем некоторые результаты из работ [2; 3], сформулировав их в удобной для нас форме. Наряду с системой (1.1) рассмотрим однородную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0.$$

Для каждого $x_0 \in X_0$ введем функцию $g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0$, называемую *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию x_0. Здесь $F(t, t_0)$ — фундаментальная матрица. Множество всех допустимых начальных состояний $x_0 \in X_0$, соответствующих данному однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in T$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 : g(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]}, \tau \in [t_0, \vartheta]\}$, где $g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0, \tau]$). Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ называем пакетом программ, удовлетворяющим *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний x_0', $x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$. Пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является *наводящим*, если для всякого допустимого начального состояния движение из x_0, соответствующее программе $u_{x_0}(\cdot)$, в момент ϑ принимает значение в целевом множестве M. Если наводящий пакет программ существует, то говорим, что разрешима задача пакетного наведения.

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для произвольного однородного сигнала $g(\cdot)$ введем множество $G_0(g(\cdot))$ исходно совместимых с ним однородных сигналов $\bar{g}(\cdot)$ и момент времени $\tau_1(g(\cdot)) = \max\{\tau \in [t_0, \vartheta]\colon \max_{\bar{g}(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in (t_0,\tau]} |\bar{g}(t) - g(t)| = 0\}$, называемый первым моментом расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$. (Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, то вводится множество всех однородных сигналов из $G_0(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента $\tau_1(g(\cdot))$, второй момент расслоения $\tau_2(g(\cdot))$ и т. д.) Затем для каждого однородного сигнала введем множество всех моментов расслоения однородного сигнала $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot))\colon j = 1, \ldots, k_{g(\cdot)}\}$ (см. [3]) и множество всех моментов расслоения всех однородных сигналов $T = \cup_{g(\cdot) \in G} T((g(\cdot))$. Ввиду конечности множества G для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что $\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$. Тогда $T = \{\tau_0, \ldots, \tau_K\}$, где $\tau_j < \tau_{j+1}$ $(j = 0, \ldots, K-1)$. Для каждого $k = 1, \ldots, K$ множество $\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot))\colon g(\cdot) \in G\}$ называется кластерной позицией в момент τ_k, а каждый его элемент — кластером начальных состояний в этот момент.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0\in X_0}$ векторов из P. Любую измеримую (по Лебегу) функцию $t\mapsto(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}:T\mapsto\mathcal{P}$ называем *расширенной программой.* Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ естественно (как это сделано в [3]) отождествлять с расширенной программой $t\mapsto(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$. Для каждого $k=0,\ldots,K$ вводим множество $\mathcal{P}_k$ всех семейств $(u_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_{0,k}\subset\mathcal{X}_0(\tau_k)$ и произвольных начальных состояний $x_0',x_0''\in X_{0,k}$ справедливо равенство $u_{x_0'}=u_{x_0''}$. Множество $\mathcal{X}_0(\tau_k)$ — кластерная позиция в момент τ_k. Расширенную программу $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ называем *допустимой*, если для каждого $k=0,\ldots,K$ выполняется включение $(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}\in\mathcal{P}_k$ при всех $t\in(\tau_{k-1},\tau_k]$ в случае $k>1$ и при всех $t\in[t_0,\tau_1]$ в случае $k=1$.

Введем *расширенное пространство* $\mathcal{R}_i$ $(i=1,2,\ldots)$ — конечномерное гильбертово пространство всех семейств $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}$ векторов из $\mathbb{R}^m$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{R}_i}$ вида

$$\langle l',l''\rangle_{\mathcal{R}_i}=\sum_{x_0\in X_0}(l'_{x_0},l''_{x_0})_{\mathbb{R}^m},\quad l'=(l'_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_i,\quad l''=(l''_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_k.$$

Здесь и далее $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^m}(|\cdot|_{\mathbb{R}^m})$ — скалярное произведение (норма) в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Для каждого непустого множества $\mathcal{E}\subset\mathcal{R}^k$ стандартным образом введем в рассмотрение его нижнюю $\varrho^-(\cdot|\mathcal{E}):\mathcal{R}_i\to\mathbb{R}^1$ и верхнюю $\varrho^+(\cdot|\mathcal{E}):\mathcal{R}_i\to\mathbb{R}^1$ опорные функции:

$$\varrho^-(l_{x_0})_{x_0}|\mathcal{E})=\inf_{(e_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{E}}\langle(l_{x_0})_{x_0\in X_0},(e_{x_0})_{x_0\in X_0}\rangle_{\mathcal{R}_i},$$

$$\varrho^+(l_{x_0})_{x_0}|\mathcal{E})=\sup_{(e_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{E}}\langle(l_{x_0})_{x_0\in X_0},(e_{x_0})_{x_0\in X_0}\rangle_{\mathcal{R}_i},\quad(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}^i.$$

Трактуем расширенные программы как отображения из T в пространство $\mathcal{R}_m$.

Рассмотрим *расширенную систему*, которая состоит из экземпляров системы (1.1), параметризованных начальными состояниями $x_0\in X_0$; экземпляр системы, отвечающий параметру x_0, исходит из начального состояния x_0 под действием программного управления $u_{x_0}(\cdot)$. Запишем расширенную систему в виде

$$\dot x_{x_0}(t)=A(t)x_{x_0}(t)+B_1(t)u_{x_0}(t)+B_2(t)u(t-\nu)+C(t),\tag{2.2}$$

$$x_{x_0}(t_0)=x_0,\quad x_0\in X_0,\quad u_{t_0}(s)=u_0(s),\quad s\in[t_0-\nu,t_0].$$

За фазовое пространство расширенной системы принимаем $\mathcal{R}_n$. Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Для каждой допустимой расширенной программы $t\to(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ под соответствующим ей *движением* расширенной системы понимаем функцию $t\mapsto(x(t;t_0,x_0,u_0(s),u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0}:T\mapsto\mathcal{R}_n$. *Расширенным целевым множеством* назовем множество $\mathcal{M}$ всех семейств $(x_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_n$ таких, что $x_{x_0}\in M$ для всех $x_0\in X_0$. Считаем, что допустимая расширенная программа $t\to(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы,* если для движения $(x(\cdot;t_0,x_0,u_0(s),u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $t\to(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$, выполняется условие $(x(\vartheta;t_0,x_0,u_0(s),u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0}\in\mathcal{M}$. Будем говорить, что разрешима *расширенная задача программного наведения*, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.

Следующая теорема приведена в работах [2; 3] для конечномерной управляемой системы вида $\dot x=Ax+Bu$. Аналогичным образом она может быть доказана и в рассматриваемом случае.

Теорема 1. 1) *Расширенная программа* $t\to(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ *является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.* 2) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.* 3) *Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда,* *когда разрешима расширенная задача программного наведения.* 4) *Задача гарантированного позиционного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения.*

Пусть $\mathcal{A} = \big\{(x(\vartheta|x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)))_{x_0\in X_0} \colon (u_{x_0}(\cdot)_{x_0\in X_0} \in \mathcal{U}\big\}$ — *область достижимости* расширенной системы в момент T, где $\mathcal{U}$ — множество всех допустимых расширенных программ.

Имеет место

Теорема 2. *Задача пакетного наведения для системы* (1.1) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{S}} \gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) \le 0, \tag{2.3}$$

где

$$\gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}) = \Big[\sum_{x_0\in X_0}\langle l_{x_0}, F(\vartheta,t_0)x_0\rangle + \int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}\big\langle l_{x_0}, F(\vartheta, s+\nu)B_2(s+\nu)u_0(s)\big\rangle\,ds\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{X_{0k}\in\mathcal{X}_0(\tau_k)}\rho^-\Big(\sum_{x_0\in X_{0k}} D_2(t)l_{x_0}\mid P\Big)dt$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\Big\langle\sum_{x_0\in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta,t)C(t)\Big\rangle dt - \sum_{x_0\in X_0}\varrho^+(l_{x_0}|\mathcal{M}); \tag{2.4}$$

$$D_1(s) = \begin{cases} 0, & s\in(\vartheta-\nu,\vartheta],\\ F(\vartheta,s+\nu)B_2(s), & s\in[t_0,\vartheta-\nu],\end{cases}$$

$D_2(t) = (F(\vartheta,t)B_1(t)+D_1(t))^T$, $\varrho^-(\cdot|P)$ — *нижняя опорная функция множества* P *и* $\varrho^+(\cdot|\mathcal{M})$ — *верхняя опорная функция множества* M.

Здесь $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}$ — параметризованное допустимыми начальными состояниями семейство векторов, S — множество, обладающее свойством: для произвольного семейства $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}$ такого, что $\sum_{x_0\in X_0}|l_{x_0}|^2 = 1$, существует $\lambda > 0$ такое, что $(\lambda l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in S$.

Доказательство. Задача разрешима тогда и только тогда, когда непусто пересечение области достижимости $\mathcal{A}$ и расширенного целевого множества $\mathcal{M}$. Поскольку множество $\mathcal{M}$ выпукло и замкнуто в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{R}_n$ и область достижимости $\mathcal{A}$ есть выпуклый компакт в $\mathcal{R}_n$, то пересечение $\mathcal{A}\cap\mathcal{M}$ непусто тогда и только тогда, когда для каждого $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_n$ справедливо неравенство

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{X}}\big[\rho^-((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{M})\big]\le 0.$$

В силу положительной однородности нижней опорной функции $\rho^-(\cdot|\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ и верхней опорной функции $\rho^+(\cdot|\mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$ записанное выше неравенство равносильно неравенству

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{S}}\big[\rho^-((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{M})\big]\le 0. \tag{2.5}$$

Для системы (1.1) справедлива формула представления решения

$$x(t) = F(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t,\tau)\big[B_1(\tau)u(\tau) + B_2(\tau)u(\tau-s) + C(\tau)\big]\,d\tau.$$

Вычислим функции $\rho^-(\cdot|\mathcal{A})$ и $\rho^+(\cdot|\mathcal{M})$. Возьмем произвольный элемент $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_n$. Из определения области достижимости $\mathcal{A}$ имеем

$$\rho^-((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{A}) = \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}\in\mathcal{U}} \sum_{x_0\in X_0} \big\langle l_{x_0}, x(\vartheta;t_0,x_0,u_0(s),u_{x_0}(\cdot))\big\rangle$$

$$= \sum_{x_0\in X_0}\langle l_{x_0}, F(\vartheta,t_0)x_0\rangle + a + \Big\langle \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \sum_{x_0\in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta,t)C(t)dt\Big\rangle, \tag{2.6}$$

где

$$a = \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}\in\mathcal{U}} \sum_{x_0\in X_0} \Big\langle \int\limits_{t_0}^{\vartheta} l_{x_0}, F(\vartheta,t)\big[B_1(t)u(t)+B_2(t)u(t-\nu)\big]\,dt\Big\rangle.$$

Представим последний интеграл как сумму. Сделав замену переменной $t-\nu=s$ во втором интеграле и учитывая, что функция $u_0(s)$ известна при $s\in[-\nu,t_0]$, приведем его к следующему виду:

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} l_{x_0}, F(\vartheta,t)B_2(t)u(t-\nu)\,dt = \int\limits_{t_0-\nu}^{t_0} l_{x_0}, F(\vartheta,s+\nu)B_2(s+\nu)u_0(s)\,ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\vartheta-\nu} l_{x_0}, F(\vartheta,s+\nu)B_2(s+\nu)u(s)\,ds.$$

Тогда

$$a = \int\limits_{t_0-\nu}^{t_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta,s+\nu)B_2(s+\nu)u_0(s)\rangle\,ds + \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}\in\mathcal{U}} \sum_{x_0\in X_0}\Big\langle\int\limits_{t_0}^{\vartheta} D_2(t)l_{x_0}u(t)\Big\rangle\,dt.$$

Принимая во внимание, что значения допустимых расширенных программ на $(\tau_{k-1},\tau_k]$ при $k>1$ и на $[\tau_0,\tau_1]$ при $k=1$ ограничены допустимым расширенным ресурсом $\mathcal{P}_k$ $(k=1,\ldots,K)$, и используя лемму [3, лемма 4], подставляем полученное выражение в (2.6):

$$\rho^-((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{A}) = \Big[\sum_{x_0\in X_0}\langle l_{x_0}, F(\vartheta,t_0)x_0\rangle + \int\limits_{t_0-\nu}^{t_0}\big\langle l_{x_0}, F(\vartheta,t+\nu)B_2(t+\nu)u_0(t)\big\rangle\,dt\Big]$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\sum_{X_{0k}\in\mathcal{X}_0(\tau_k)}\rho^-\Big(\sum_{x_0\in X_{0k}} D_2(t)l_{x_0}\mid P\Big)dt + \Big\langle\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\sum_{x_0\in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta,t)C(t)dt\Big\rangle. \tag{2.7}$$

Далее, воспользуемся определением расширенного целевого множества $\mathcal{M}$ (см. выше). Тогда

$$\rho^+\left((l_{x_0})_{x_0\in X_{0k}}\mid\mathcal{M}\right) = \sup_{(z_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{M}}\sum_{x_0\in X_0}\langle l_{x_0}, z_{x_0}\rangle = \sum_{x_0\in X_0}\rho^+(l_{x_0}|M).$$

Сопоставляя (2.7) и (2.6), видим, что

$$\rho^-((l_{x_0})_{x_0\in X_0}|\mathcal{A}) - \rho^+\left((l_{x_0})_{x_0\in X_0}\mid\mathcal{M}\right) = \gamma((l_{x_0})_{x_0\in X_0}).$$

Поскольку данное равенство справедливо при произвольном $(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in\mathcal{R}_n$, записанный выше критерий (2.5) разрешимости расширенной задачи программного наведения имеет вид (2.3). Теорема доказана.

Приведем метод построения наводящего пакета программ. Аналогично [6] доказываются следующие утверждения.

Лемма. *Пусть выполнено условие*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in S}\gamma_a((l_{x_0})_{x_0\in X_0}))\leq 0 \tag{2.8}$$

и нулевой пакет программ не является наводящим для расширенной системы. Тогда существует $a^*\in(0,1]$ *такое, что*

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0\in X_0}\in S}\gamma_{a^*}((l_{x_0})_{x_0\in X_0}))=0. \tag{2.9}$$

Теорема 3. *Пусть множество* P *строго выпуклое и содержит в себе нулевой элемент, а также выполнено условие* (2.8) *и вектор* $(l^*_{x_0})_{x_0\in X_0}\in S$ *доставляет максимум в выражении* (2.9), *причем вектор* $D_2(t)\sum_{x_0\in X_{0k}}l^*_{x_0}\neq 0$, $t\in[t_0,\vartheta]$. *Пусть, кроме того, пакет программ* $(u_{x_0}(t))_{x_0\in X_0}$ *такой, что* $u_{x_0}(t)\in a^*P$, *(*$x_0\in X_0$, $t\in[t_0,\vartheta]$*), где* a^* *— корень уравнения* (2.9), *и для всех* $k=1,2\dots$ *и для всех кластеров* $X_{0k}\in\mathcal{X}(\tau_k)$ *выполняется равенство*

$$\Big\langle D_2(t)\sum_{x_0\in X_{0k}}l^*_{x_0},u_{X_{0k}}(t)\Big\rangle=\varrho^-\Big(D_2(t)\sum_{x_0\in X_{0k}}l^*_{x_0}\,|a^*P\,\Big).$$

Тогда пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ *является наводящим.*

3. Пример

Рассмотрим динамическую систему следующего вида:

$$\begin{array}{l}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u(t-\nu).\end{array} \tag{3.1}$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t)$. Значения воздействий $u(t)$ ограничены отрезком $[-1;1]$. Система (1.1) принимает вид (3.1) при следующих значениях: $n=2$, $m=1$, $P=[-1,1]$. Система рассматривается на отрезке времени $T=[0,3]$, $\nu=1$, $u(s)\equiv 1$, $s\in[-1,0]$. Матрица-функция наблюдения имеет вид

$$Q(t)=\left\{\begin{array}{ll}\Theta, & t\in[0,1],\\ I, & t\in(1,3],\end{array}\right.$$

где Θ — нулевая, а I — единичная (2×2)-матрицы. Множество начальных состояний состоит из двух точек: $X_0=\{x_0',x_0''\}$. Первый момент расслоения — $\tau_1=1$. Кластерная позиция $\mathcal{X}_0(\tau_1)$ в момент τ_1 содержит единственное множество X_0, а кластерная позиция $\mathcal{X}_0(t_2)$ в момент $\tau_2=2$ содержит два одноэлементных множества $\{x_0'\}$, $\{x_0''\}$.

Цель управляющей стороны состоит в том, чтобы, используя наблюдаемые значения сигнала, сформировать программу управления материальной точкой, которая обеспечивала бы в конечный момент времени попадание ее координаты в отрезок $[-m,m]$, где $m\geq 0$. Таким образом, целевое множество M имеет вид

$$M=\left\{(x_1\ x_2)^T\in\mathbb{R}^2,\ |x_1|\leq m\right\}.$$

Конкретизируем критерий разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении. В данной задаче фундаментальная матрица $F(t,s)$ будет иметь вид

$$F(t,s)=\begin{pmatrix}1 & t-s\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

матрицы A, B_1, B_2, C представим в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$D_2(s) = (F(\vartheta, t)B_1(t) + D_1(t))^T = \begin{cases} 0, \ s \in (2, 3], \\ (2 - s, 1), \ s \in [0, 2]. \end{cases}$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям x_0' и x_0'', имеют вид

$$g_{x_0'} = Q(t)F(t, 0)x_0' = \begin{cases} (0, \ 0)^T, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} x_{01}' + t x_{02}' \\ x_{02}' \end{pmatrix}, & t \in (1, 3]; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$g_{x_0''} = Q(t)F(t, 0)x_0'' = \begin{cases} (0, 0)^T, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} x_{01}'' + t x_{02}'' \\ x_{02}'' \end{pmatrix}, & t \in (1, 3]. \end{cases}$$

Пусть S есть множество всех двуэлементных семейств $((l_{x_{01}'}, l_{x_{02}'})^T, (l_{x_{01}''}, l_{x_{02}''})^T) \in \mathbb{R}^2$ таких, что выполняется одно из соотношений

$$|l_{x_{01}'}| = 1, \quad |l_{x_{01}''}| \le 1 \text{ или } |l_{x_{02}'}| \le 1, \quad |l_{x_{02}''}| = 1.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — такое множество в S, что $l_{x_{02}'} = l_{x_{02}''} = 0$. (Далее, для простоты: $l' = l_{x_{01}'}$, $l'' = l_{x_{01}''}$.) Учитывая, что множество M — цилиндрическое с ограниченным основанием, принимая во внимание, что при произвольном $l \in \mathbb{R}$

$$\varrho^+((l, 0)^T | M) = m|l|, \quad \varrho^-(l|aP) = -a|l|, \quad \text{где } a \in (0, 1],$$

и используя представление (2.4), выпишем функцию $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'': $\gamma_a((l', 0)^T, (l'', 0)^T) = l'z' + l''z'' - 1.5a|l' + l''| - (m + 0.5a)|l'| - (m + 0.5a)|l''|$, где $z' = x_{01}' + 3x_{02}' - 2.5$, $z'' = x_{01}'' + 3x_{02}'' - 1$.

Положим для определенности $x_{01}' = 1.5, \ x_{02}' = 1, \ x_{01}'' = 1, \ x_{02}'' = 0, \ m = 1$. Тогда

$$z' = 2, \quad z'' = 1.$$

Решая задачу максимизации, при $a = 1$ получим $\max \gamma_1(l', l'') = -1 < 0$, следовательно, критерий разрешимости выполняется. Покажем, что нулевой пакет не является наводящим: $x_1(3|x_0', 0) = (1, 25, 0)^T \notin M$. Найдем коэффициент сжатия мгновенного ресурса управления P, при котором $\gamma_{a^*} = 0$. Получим, $a^* = 0.5$. Максимизирующие векторы (см. (2.3)) вычисляются как

$$l_{x_0'}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_{x_0''}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем наводящий пакет. Для построения наводящего пакета с помощью теоремы 3 вычислим сначала

$$\sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем находим элементы пакета программ:

$$u_{x_0' x_0''}^*(t) = a^* \mathrm{sign} D_2(t)(l_{x_0'}^* + l_{x_0''}^*) = -0.5, \quad t \in [0, 1],$$

$$u_{x_0'}^*(t) = a^* \mathrm{sign} D_2(t) l_{x'}^* = -0.5, \quad t \in (1, 2],$$

но для $u_{x_0''}(t)$ условия теоремы 3 не выполняются из-за того, что $l^*_{x_0''} = 0$. В этом случае примем $u_{x_0''}(t) = 0.5$. В результате получим следующий пакет программ:

$$u_{x_0'}(t) = -0.5,\ t \in [0,2], \quad u_{x_0''} = \begin{cases} -0.5, & t \in [0,1], \\ 0.5, & t \in (1,2]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Воспользовавшись формулой Коши, вычислим $x_1(3|x', u_{x_0'}(\cdot)) = 1$, $x_1(3|x'', u_{x_0''}(\cdot)) = 0.5$. Обе координаты попадают в отрезок $[-m, m]$; таким образом, пакет программ $(u_{x_0'}(\cdot)), u_{x_0''}(\cdot))$ является наводящим.

Теперь перейдем к построению позиционных стратегий. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Приведем позиционный способ управления системой, стартующей в момент $t = 0$ из неизвестного начального состояния $\bar{x}_0 = (\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02})^T \in X_0 = \{x_0', x_0''\}$. До начала движения, руководствуясь наводящим пакетом и учитывая отсутствие наблюдений на отрезке $[0,1]$, принимаем решение применять к системе управление $u_1(t) = -0.5$ при $t \in [0, 1+\varepsilon)$. Затем начиная с $t = 1$ уже доступны наблюдения состояния системы. Рассматривая $y(t_1) = Q(t_1)x(t_1)$, где $t_1 \in (1, 1+\varepsilon)$, и используя формулу Коши, нетрудно найти вектор $w(t_1) = y(t_1) - Q(t_1)\int_0^{t_1} F(t_1, s)B_2(s)u_1(s)\,ds$. Очевидно (см. (3.2)), что $w(t_1) = Q(t_1)F(t_1, 0)\bar{x}_0 = g_{\bar{x}_0}(t_1)$. Так как $x_0' \neq x_0''$, то $g_{x_0'}(t_1) \neq g_{x_0''}(t_1)$ и, следовательно, либо $w(t_1) = g_{x_0'}(t_1)$, либо $w(t_1) = g_{x_0''}(t_1)$. Соответственно применяем к системе в каждый момент $t \in [1+\varepsilon, 2]$ управляющее воздействие $u_{x_0'}(t) = -0.5$ в первом случае, когда $w(t_1) = g_{x_0'}(t_1)$, либо $u_{x_0''}(t) = 0.5$ — во втором при $w(t_1) = g_{x_0''}(t_1)$.

В результате такого способа управления получаем следующее управление:

$$u(t) = \begin{cases} -0.5, & t \in [0, 1+\varepsilon), \\ u_x(t), & t \in [1+\varepsilon, 2]. \end{cases}$$

В случае, когда $\bar{x}_0 = x_0'$, получаем $u_x(t) = u_{x_0'}(t)$ для всех $t \in [0,2]$, а в случае $\bar{x}_0 = x_0''$ — $u_x(t) = u_{x_0''}(t)$ для всех $t \in [0,2] \setminus [1, 1+\varepsilon)$. Так как пакет программ (3.3) является наводящим и $x_1(3|x_0')$, $x_1(3|x_0'') \in [-1, 1]$, то, значит, $x_1(3) \in [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ и описанный позиционный способ управления с неполной информацией гарантирует наведение рассматриваемой системы в момент $\vartheta = 3$ на ε-окрестность целевого множества M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
3. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
4. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1676–1685.
5. **Григоренко Н.Л., Кондратьева Ю.А., Лукьянова Л.Н.** Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 41–49.
6. **Стрелковский Н.В.** Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вестн. МГУ. Вычислит. математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 65–72.

Близорукова Марина Сергеевна Поступила 11.03.2016
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: msb@imm.uran.ru