ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 519.62

# ТРАЕКТОРИЯ В $\mathbb{R}^3$, СКРЫТАЯ ОТ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ[1]

**В. И. Бердышев**

В задаче сопровождения движущегося в $\mathbb{R}^3$ объекта наблюдателями охарактеризована наиболее скрытая траектория объекта при условии, что в каждый момент времени объект находится в поле зрения не более чем двух наблюдателей.

Ключевые слова: навигация, задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. A trajectory in $\mathbb{R}^3$ concealed from observers.

In the problem of tracking by observers of an object moving in $\mathbb{R}^3$, the most concealed trajectory is characterized under the condition that the object is at any time visible to at most two observers.

Keywords: navigation, tracking problem, moving object, observer.

**MSC:** 00A05

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-2-47-54

## 1. Определения и постановка задачи

В пространстве $X = \mathbb{R}^3$ задано ограниченное, может быть, несвязное множество $G$, являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$, такое что $X \setminus G$ связно. Граница $bdG$ множества $G$ является кусочно гладкой поверхностью, в частности многогранной. Множество $G$ препятствует видимости и движению. Точки $x, y \in X$ видимы одна для другой, если

$$[x, y] \cap \overset{\circ}{G} = \varnothing.$$

В пространстве $X$ движутся объект $t$, $t \notin \overset{\circ}{G}$, и наблюдатели $f$, $f \notin \overset{\circ}{G}$, враждебные по отношению к $t$. Объект начинает движение из $\varepsilon$-окрестности $V_* = V_\varepsilon(t_*) = \{x\colon \|x - t_*\| \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, заданной точки $t_*$ и заканчивает движение в $\varepsilon$-окрестности $V^*$ другой точки $t^*$,

$$V_* \cap V^* = \varnothing, \quad \big(V_* \cup V^*\big) \cap G = \varnothing.$$

Движение объекта $t$ осуществляется внутри заданного односвязного “коридора” $Y$, $Y \cap G = \varnothing$, соединяющего $V_*$ и $V^*$ и являющегося окрестностью заранее рассчитанной гладкой траектории

$$\mathcal{T}_0 = \big\{t(\tau)\colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\big\}, \quad \mathcal{T}_0 \cap G = \varnothing.$$

Предполагается, что внутри коридора $Y$ наблюдателей нет.

Пусть

$v(t) = \{x \in X\colon [x, t] \cap \overset{\circ}{G} = \varnothing\}$ — множество видимых (освещенных) из $t$ точек пространства;

$\mathrm{sh}(t) = X \setminus (v(t) \cup G)$ — тень множества $G$ (при освещении из точки $t$);

$\overline{\mathrm{sh}}(t)$ — ее замыкание;

$\widetilde{T}(x) = \{t \in v(x), \overline{\mathrm{sh}}(t) \ni x\}$ — это множество не является замкнутым. Ясно, что $\widetilde{T}(x) = \{t\colon x \in v(t) \cap \overline{\mathrm{sh}}(t)\}$.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Точку $x \in bdG$ назовем теневой точкой для $t$, если

$$x \in v(t) \cap \overline{\mathrm{sh}}(t), \quad (t, x) \cap \overline{\mathrm{sh}}(t) = \varnothing.$$

Обозначим

$\mathrm{sh}^*(t)$ — совокупность теневых точек для точки $t$;

$\mathbb{T}$ — класс непрерывных траекторий $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \big\{t(\tau)\colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) \in V_*,\ t(1) \in V^*\big\} \subset Y.$$

Объект имеет возможность поразить наблюдателя посредством миниобъекта, способного двигаться в $X \setminus \overset{\circ}{G}$ прямолинейно с большой скоростью. Поэтому свобода передвижения наблюдателя ограничена. Он вынужден находиться вблизи множества $\mathrm{sh}(t)$, чтобы в случае опасности со стороны объекта он мог укрыться в тени. Объект стремится двигаться на возможно большем расстоянии от $f$ и, следовательно, от $\mathrm{sh}(t)$. Задача объекта состоит в поиске траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ из класса $\mathbb{T}$, для которой

$$M \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min_{t \in \mathcal{T}} \rho(t, \mathrm{sh}(t)) = \min_{t \in \widehat{\mathcal{T}}} \rho(t, \mathrm{sh}(t)). \tag{1.1}$$

Задача (1.1) рассматривалась в [1–3] для пространства $\mathbb{R}^2$ и в [4] для $\mathbb{R}^3$ в случае, когда множество $G$ является многогранником. В данной работе предполагается, что объект $t$ в каждый момент времени находится в поле зрения не более чем двух наблюдателей.

## 2. Теневые точки

Отметим, что

$$\rho(t, \mathrm{sh}(t)) = \rho(t, \overline{\mathrm{sh}}(t)) = \rho(t, \mathrm{sh}^*(t))$$

и длина кратчайшей непересекающейся с $\overset{\circ}{G}$ кривой, соединяющей $t$ и $\overline{\mathrm{sh}}(t)$, совпадает с $\rho(t, \mathrm{sh}(t))$ (см. [2]). Функция $\rho(t, \mathrm{sh}(t))$ и отображение, сопоставляющее точке $t$ множество ближайших из $\overline{\mathrm{sh}}(t)$ точек, вообще говоря, не являются непрерывными (см. пример [3]).

Обозначим через $L(t) = \{l\}$ множество всех лучей $l$ с вершиной $t$. Имеет место

**Предложение 1.** *Для любой точки* $t \in X \setminus G$ *множество* $\mathrm{sh}^*(t)$ *теневых точек непусто.*

Доказательство. Если существует луч $l \in L(t)$, не пересекающийся с $\overset{\circ}{G}$, то теневая точка для $t$ найдется на границе максимального кругового конуса с вершиной $t$ и осью $l$, не пересекающегося с $\overset{\circ}{G}$. Пусть $l \in L(t)$, $l \cap \overset{\circ}{G} \ne \varnothing$, $x \in l \cap \overset{\circ}{G}$ и $O(x)$ — окрестность точки $x$, содержащаяся в $\overset{\circ}{G}$. Поскольку множество $G$ ограничено и множество $X \setminus G$ связно, то найдутся точка $y \in l$ такая, что $y \notin G$, $x \in [t, y]$ и непрерывная кривая $\gamma = \{\gamma(\tau), 0 \le \tau \le 1, \gamma(0) = t, \gamma(1) = y\}$, соединяющая точки $t$, $y$ и не пересекающаяся с $G$. Рассмотрим множество отрезков $[t, \gamma(\tau)]$. Тогда $[t, \gamma(\tau)] \cap G = \varnothing$ при малых $\tau$, а при $\tau$, близких к единице, имеем $[t, \gamma(\tau)] \cap O(x) \ne \varnothing$, и, значит, $[t, \gamma(\tau)] \cap G \ne \varnothing$. Пусть $\tau_0$ — наименьшее из чисел $\tau$, при которых $[t, \gamma(\tau)] \cap G \ne \varnothing$. Поскольку $\gamma(\tau_0) \notin G$, $t \notin G$, то множество $[t, \gamma(\tau_0)] \cap G$ лежит на интервале $(t, \gamma(\tau_0))$. Легко видеть, что ближайшая к $t$ точка из $\overline{\mathrm{sh}}(t) \cap [t, \gamma(\tau_0)]$ является теневой для точки $t$. □

## 3. Позиции на $bdG$, удобные для наблюдения

Местоположение наблюдателя $f \in bdG$ должно обеспечивать обзор окружающей местности и видимость точки $t$. К примеру, должны существовать плоскость $P$ и окрестность $V(f)$

точки $f,\ f \in P$, такие, что множество $G \cap V(f)$ и $t$ лежат по разные стороны от $P$. Естественно предположить, что наблюдатель займет позицию вблизи участка локальной выпуклости границы $bdG$. В связи с этим будем рассматривать в качестве возможных мест базирования наблюдателей вершины, гребни и выпуклые гладкие фрагменты границы множества $G$.

**Вершины**. Точка $a \in bdG$ называется вершиной, если существуют тройка линейно независимых линейных функционалов $\varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varphi_i(x) \leq \varphi_i(a)\ \forall\ x \in G \cap V_\varepsilon(a), \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее

$\mathbb{A} = \{a\}$ — совокупность всех вершин множества $G$;

$$K_a = \big\{l \in L(a)\colon \rho(x, G) = o(\|x - a\|),\ x \in l\big\} \tag{3.1}$$

— касательный конус к множеству $G$ в точке $a \in A$;

$K'_a = -K_a + 2a$ — вертикальный по отношению к $K_a$ конус.

**Лемма.** *Если множество $K_a \backslash a$ связно, то*

$$\widetilde{T}(a) = X \backslash \big(\overset{\circ}{K}_a \cup \overset{\circ}{K'_a} \cup (\mathrm{sh}(a)) \cup G\big), \tag{3.2}$$

*если $K \backslash a$ не является связным, то*

$$\widetilde{T}(a) = X \backslash \big(\overset{\circ}{K}_a \cup (\mathrm{sh}(a)) \cup G\big).$$

Доказательство. Конус $K_a$ является телесным. Если

$$x \in \overset{\circ}{K}_a, \quad x_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda x + (1 - \lambda)a, \quad \lambda > 0,$$

то $x_\lambda \in \overset{\circ}{K}_a$ и в силу определения конуса $K_a$ при достаточно малом $\lambda$ выполняется включение $x_\lambda \in \overset{\circ}{G}$. Поэтому

$$x \notin v(a) \quad \text{и} \quad x \notin \widetilde{T}(a).$$

Если $K_a \backslash a$ — связное множество, $x \in K'_a$, то $a \notin \mathrm{sh}(x)$ и значит $x \notin \widetilde{T}(a)$. Если $x \in bdK_a$, то $a \in \overline{\mathrm{sh}}(x)$ и $x \in \widetilde{T}(a)$. Пусть $z \notin (\overset{\circ}{K}_a) \cup (\overset{\circ}{K'_a}) \cup\ (\mathrm{sh}(a)) \cup G$, в частности $z \in v(a)$, и пусть $x \in \overset{\circ}{K}_a$. Найдем точку $\overline{x}_\lambda \in bdG$, ближайшую к $x_\lambda$ на луче $\{z + \alpha(x_\lambda - z)\colon \alpha \geq 0\}$, такую что $x_\lambda \in [\overline{x}_\lambda, z]$. Тогда $\overline{x}_\lambda \in \mathrm{sh}(z)$ и $\overline{x}_\lambda \to a$ $(\lambda \to 0)$. Поскольку $a \in v(z)$, то $a \in \overline{\mathrm{sh}}(z)$ и, значит, $z \in \widetilde{T}(a)$. Итак, установлены соотношения:

$$(x \in bdK_a) \Rightarrow (x \in \widetilde{T}(a));$$

$$(x \in \overset{\circ}{K}_a) \Rightarrow (x \notin \widetilde{T}(a));$$

$$(x \in K'_a) \Rightarrow (x \notin \widetilde{T}(a)), \quad \text{если множество} \quad K_a \backslash a \quad \text{связно};$$

$$\Big(z \notin \big(\overset{\circ}{K}_a \cup \overset{\circ}{K'_a} \cup (\mathrm{sh}(a)) \cup G\big)\Big) \Rightarrow (z \in \widetilde{T}(a)).$$

Из этих соотношений следует первое утверждение леммы.

Если множество $K_a \backslash a$ не является связным, то оно содержит, по крайней мере, две связных непересекающих компоненты $K_1,\ K_2$. Пусть $K'_1,\ K'_2$ — вертикальные к ним конусы, и $z \in K'_2$. Для точки $x \in \overset{\circ}{K}_1$ найдем при достаточно малом $\lambda > 0$ точки $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)a \in \overset{\circ}{G},\ \overline{x}_\lambda \in bdK_1$ такие, что $x_\lambda \in [z, \overline{x}_\lambda]$. Поскольку $\overline{x}_\lambda \to a$ при $\lambda \to 0$, то $a \in \overline{\mathrm{sh}}(z)$ и вместе с тем $a \in v(z)$. Поэтому $z \in \widetilde{T}(a)$. Лемма установлена. □

**Гребни**. Здесь гребнем будем называть гладкую плоскую выпуклую (без концевых точек) кривую $B \subset bdG$, в каждой точке $b \in B$ которой существуют опорный двугранный угол $K_b$, раствор которого меньше, чем $\pi$, и окрестность $O_\varepsilon(b)$ такая, что множество $G \cap O(b)$ лежит внутри этого угла. Далее считаем, что через $K_b$ обозначен опорный угол минимального раствора, а отображение $b \mapsto K_b \cap O_\varepsilon(b)$ непрерывно по Хаусдорфу.

Легко видеть, что

$$\widetilde{T}(b) = X \backslash \big( \overset{\circ}{K}_b \cup \overset{\circ}{K'_b} \cup (\mathrm{sh}(b)) \cup G \big). \tag{3.3}$$

Положим

$$\widetilde{T}(B) = \bigcup_{b \in B} \widetilde{T}(b).$$

Множество всех гребней $B \subset bdG$ обозначим через $\mathbb{B}$.

**Выпуклые (гладкие) фрагменты границы множества** $G$. Выпуклым фрагментом будем называть максимальное по включению, связное, открытое относительно $bdG$ множество $C \subset bdG$, для каждой точки $c \in C$ которого имеются единственная плоскость $P = P_c$ $(c \in P)$ и окрестность $V(c)$ такие, что множество $G \cap V(c)$ лежит по одну сторону относительно $P$. Здесь $K_c$ — полупространство с границей $P_c$ (см. (3.1)), содержащее множество $G \cap V(c)$. Если множество $G \cap P_c$ одноточечно, $G \cap P_c = c$, то $\widetilde{T}(c) = P \backslash c$. Пусть $G \cap P_c$ не является одноточечным. Если точка $c' \in C \cap P_c$ является граничной относительно $P$ точкой множества $G \cap P_c$, то $\widetilde{T}(c') \neq \varnothing$ и $\widetilde{T}(c') \subset P_c$, если же $c'$ является внутренней, то $\widetilde{T}(c) = \varnothing$.

Совокупность всех выпуклых фрагментов $C$ из $bdG$ будем обозначать через $\mathbb{C}$. Для выпуклого фрагмента $C \in \mathbb{C}$ положим

$$\widetilde{T}(C) = \bigcup_{c \in C} \widetilde{T}(c). \tag{3.4}$$

Далее будем обозначать

$$\mathbb{S} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}, \quad \mathbb{S} = \{S\},$$

и элементы $S$ этого множества будем называть фрагментами поверхности $bdG$. Предполагается, что число фрагментов конечно. Для $S \in \mathbb{S}$ множество $\widetilde{T}(S)$ в окрестности $V(S)$ имеет простую структуру: оно образовано пучком плоскостей $H$, который далее обозначается через $\mathcal{H}(S) = \{H\}$. Для $S = a \in \mathbb{A}$ это пучок плоскостей $H = H_a$ (см. (3.1), (3.2)), содержащих точку $a$ (см. лемму), в случае $S = B \in \mathbb{B}$ — это совокупность пучков плоскостей $H_b$, содержащих точки $b \in B$ (см. (3.3)), а в случае $S = C \in \mathbb{C}$ — совокупность плоскостей $H_c$, опорных к $C$ в точках $c \in C$ (см. (3.4)).

Наблюдателю целесообразно занимать позицию в окрестности одного из указанных фрагментов. Величину обзора для наблюдателя, находящегося в точке $s \in S$ $(s = a, b, c)$, можно характеризовать коэффициентом обзора

$$k(s) = \frac{\mu V_1(s)}{2\mu(K_s \cap V_1(s))}, \tag{3.5}$$

где $\mu$ — объем множества. Очевидно, что для $c \in C,\ b \in B,\ a \in \mathbb{A}$ выполняется неравенство

$$1 = k(c) < k(b) < k(a).$$

## 4. Тактика движения объекта

Поскольку наблюдатель $f$ враждебен по отношению к объекту $t$, то объект стремится преодолеть множество $\widetilde{T}(f) \cap Y$ на возможно большем расстоянии от $f$.

Если $t \in \widetilde{T}(S)$, то $f$, находясь на $S$, наблюдает за $t$. Если же $t \notin \widetilde{T}(S)$, т. е. $S$ не содержит теневых для $t$ точек, то $f$ себя не обнаруживает, поскольку не может скрыться в тени, и, значит, не осуществляет наблюдение за $t$. Формализуем это обстоятельство, определив "расстояние" от $t$ до $S$ следующим образом:

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \min\{\|t - s\| \colon s \in S,\ t \in \widetilde{T}(s)\}, & \text{если } t \in \widetilde{T}(S), \\ +\infty, & \text{если } t \notin \widetilde{T}(S). \end{cases} \tag{4.1}$$

Далее символ $\rho$ будем использовать в указанном в (4.1) значении. В частности, при $s = a \in \mathbb{A}$ имеем равенство $\rho(t, a) = \|t - a\|$ при $t \in \widetilde{T}(a)$. Естественно предположить, что вероятность присутствия наблюдателя в окрестности точки $s$, $s \in S \in \mathbb{S}$, определяется величиной коэффициента (3.5) обзора $k(s)$. Поэтому возможен другой вариант "расстояния":

$$\rho_k(t, S) = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\|t - s\|}{k(s)} \colon s \in S,\ t \in \widetilde{T}(s)\right\}, & \text{если } t \in \widetilde{T}(S), \\ +\infty, & \text{если } t \notin \widetilde{T}(S). \end{cases}$$

В дальнейшем понадобится множество

$$\mathcal{B}(S, S') = \left\{x \in \widetilde{T}(S) \cap \widetilde{T}(S') \colon \rho(x, S) = \rho(x, S')\right\}. \tag{4.2}$$

При движении внутри коридора $Y$ по траектории $\mathcal{T}$ объект в каждый момент времени может находиться в одном или нескольких множествах $\widetilde{T}(S)$, т. е. быть в поле зрения нескольких наблюдателей. Мы далее считаем, что любая точка $t \in V$ принадлежит не более чем двум множествам $\widetilde{T}(S)$.

Предполагая, что наблюдатели могут базироваться только в окрестности фрагментов $s \in \mathbb{S}$, задачу (1.1) запишем в виде

$$M = \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min_{t \in \mathcal{T}, S \in \mathbb{S}} \rho(t, S) = \min_{t \in \widehat{\mathcal{T}}, S \in \mathbb{S}} \rho(t, S). \tag{4.3}$$

Плоскость $H$, $H \cap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$, назовем секущей (разделяющей точки $t_*$, $t^*$), если любая траектория из $\mathbb{T}$ пересекается с $H$.

Для фрагмента $S \in \mathbb{S}$ через $\mathcal{H}_Y(S)$ обозначим множество секущих плоскостей из $\mathcal{H}(S)$, и пусть

$$\mathbb{Z} = \{S \in \mathbb{S} \colon \mathcal{H}_Y(S) \neq \varnothing\}.$$

С целью поиска характеристических свойств наилучшей в задаче (4.3) траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ предварительно рассмотрим частные случаи. Сперва для $S \in \mathbb{S}$, $\mathcal{H}_Y(S) \neq \varnothing$, сформулируем задачу

$$M(S) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S)} \max\left\{\rho(y, S) \colon y \in H \cap Y\right\}. \tag{4.4}$$

Пусть $\mathcal{H}^*(S)$ — множество плоскостей из $\mathcal{H}_Y(S)$, доставляющих минимум в (4.4), и $\mathcal{P}_{S,H}$ — множество точек $p \in H \cap bdY$ $(H \in \mathcal{H}^*(S))$, доставляющих в (4.4) максимум.

**I.** Рассмотрим случай, когда множество $\mathbb{S}$ таково, что

$$\widetilde{T}(S) \cap \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S') \cap Y = \varnothing \quad \forall\, S, S' \in \mathbb{Z}, \quad S \neq S'.$$

В этом случае имеет место

**Предложение 2.** *Выполняется равенство*

$$M = \min\{M(S) \colon S \in \mathbb{Z}\}.$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ является наилучшей тогда и только тогда, когда для любого фрагмента $S^*$, реализующего указанный минимум, выполняются условия

$$\widehat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{P}_{S^*,H} \neq \varnothing \quad \forall\, H \in \mathcal{H}^*(S^*) \tag{4.5}$$

и

$$\rho(t,S) \geq M \quad \forall\, t \in \widehat{\mathcal{T}},\ \forall\, S \in \mathbb{S}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно, так как если $\widehat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{P}_{S^*,H} = \varnothing$ для некоторой плоскости $H \in \mathcal{H}^*(S^*)$, то траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ пересечет $H$ в точке, расположенной к $S^*$ ближе, чем $P_{S^*,H}$. $\square$

Множество $\widetilde{T}(S)$ $(S \in \mathbb{S})$ назовем секущим, по аналогии с секущей плоскостью, если любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекается с $\widetilde{T}(S)$. Для такого фрагмента $S$ на границе множества $\widetilde{T}(S) \cap Y$ выделим левую $\mathcal{L}(S)$ и правую $\mathcal{R}(S)$ части: при движении по $\mathcal{T}$ от $V_*$ к $V^*$ точка $t$ сперва встречается с $\mathcal{L}(S)$ и выходит из множества $\widetilde{T}(S) \cap Y$ в точке, принадлежащей множеству $\mathcal{R}(S)$.

**II.** Пусть пара $S_1,\ S_2$ фрагментов из $\mathbb{Z}$ такова, что

$$\mathring{\widetilde{T}}(S_1) \cap \mathring{\widetilde{T}}(S_2) \neq \varnothing.$$

Обозначим через $\Delta_{\mathcal{R}} = \Delta_{\mathcal{R}}(S_1,S_2)$ “двугранный угол” (см. рис. 1) с гребнем $\mathcal{L}(S_1) \cap \mathcal{L}(S_2)$, ограниченный частью границы $\mathcal{L}(S_1)$ и частью границы $\mathcal{L}(S_2)$ и содержащий множество $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$, и аналогично через $\Delta_{\mathcal{L}}$ — “двугранный угол” с гребнем $\mathcal{R}(S_1) \cap \mathcal{R}(S_2)$, образованный частями границ $\mathcal{R}(S_1),\ \mathcal{R}(S_2)$ и содержащий множество $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$. Множества $\Delta_{\mathcal{L}},\ \Delta_{\mathcal{R}}$ являются секущими.

Возможны два случая:

$S_1$ и $S_2$ принадлежат одному из углов $\Delta_{\mathcal{L}},\ \Delta_{\mathcal{R}}$;

$S_1$ и $S_2$ принадлежат разным углам $\Delta_{\mathcal{L}},\ \Delta_{\mathcal{R}}$.

В первом случае пару $(S_1,S_2)$ назовем четной, во втором — нечетной.

Пусть пара $S_1,S_2$ нечетная. Обозначим (см. (4.4))

$$M(S_1,S_2) = \min\{M(S_1), M(S_2)\}. \tag{4.6}$$

Если $M(S_1,S_2) = M$ (см. (4.3)), то для фрагмента $S \in \{S_1,S_2\}$, доставляющего минимум в (4.6), должно выполняться соотношение (4.5). Обозначим

$$\mathcal{P}_{S_1,S_2,H} = \begin{cases} \mathcal{P}_{S,H}, & \text{если минимум (4.6) достигается на одном из фрагментов} \\ & S \in \{S_1,S_2\},\ H \in \mathcal{H}^*(S); \\ \mathcal{P}_{S_1,H_1} \cup \mathcal{P}_{S_2,H_2}, & \text{если } M(S_1) = M(S_2) = M(S_1,S_2),\ H_i \in \mathcal{H}^*(S_i),\ i=1,2, \\ & H = (H_1,H_2). \end{cases} \tag{4.7}$$

Предположим, что пара $S_1,S_2$ четная и для определенности будем считать, что $S_1,S_2 \subset \Delta_{\mathcal{L}}$. Обозначим

$$Q = \widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2) \cap \mathcal{B}(S_1,S_2). \tag{4.8}$$

Предположим сначала, что $Q = \varnothing$, и пусть

$$\rho(y,S_1) < \rho(y,S_2) \quad \forall\, y \in \widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2). \tag{4.9}$$

Части траектории $\widehat{\mathcal{T}}$, содержащиеся в $\widetilde{T}(S_1)$ и в $\widetilde{T}(S_2)$ должны располагаться возможно дальше от $S_1$ и $S_2$ (см. рис. 2) соответственно.

Для поиска точек пересечения наилучшей траектории с множествами $\widetilde{T}(S_2)$ и $\widetilde{T}(S_1)$ рассмотрим задачи $M(S_1)$ (см. (4.4)) и

$$m(S_1,S_2) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S_2)} \max\bigl\{\rho(y,S_2) \colon y \in H \cap Y \cap \mathcal{L}(S_1)\bigr\}. \tag{4.10}$$

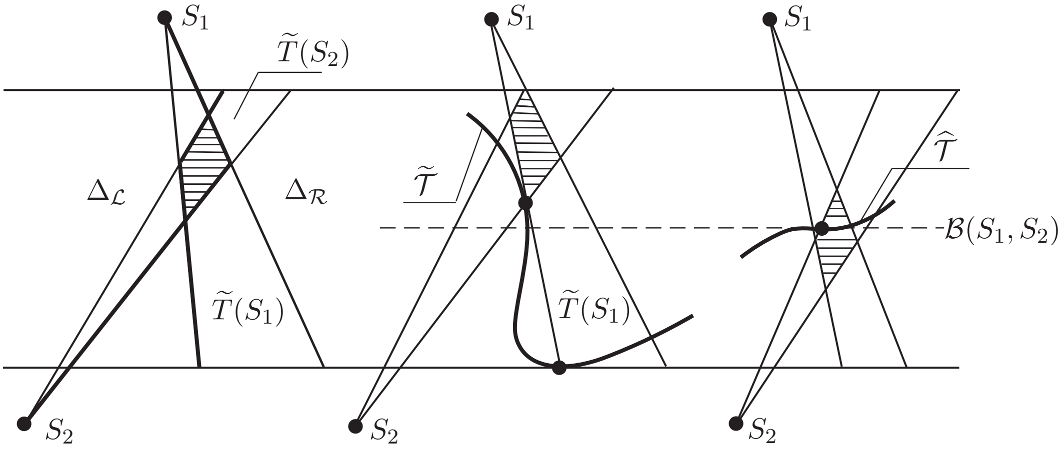


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Пусть $\mathcal{H}^*(S_2)$ — множество плоскостей из $\mathcal{H}_Y(S_2)$, доставляющих минимум в (4.10), $\mathcal{P}_{S_2,H,\mathcal{L}}$ — множество точек из $H \cap Y \cap \mathcal{L}(S_1)$ $(H \in \mathcal{H}^*(S_2))$, доставляющих максимум в (4.10). Положим

$$M(S_1, S_2) = \min\{m(S_1, S_2), M(S_1)\} \tag{4.11}$$

и построим множество $\mathcal{P}_{S_1,S_2,H}$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{S_1,S_2,H} = \begin{cases} \mathcal{P}_{S_2,H,\mathcal{L}}, & \text{если минимум (4.11) достигается на } m(S_1,S_2),\ H \in \mathcal{H}^*(S_2); \\ \mathcal{P}_{S_1,H}, & \text{если минимум в (4.11) достигается на } M(S_1),\ H \in \mathcal{H}^*(S_1); \\ \mathcal{P}_{S_2,H_2,\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{S_1,H_1}, & \text{если } m(S_1,S_2) = M(S_1) = M(S_1,S_2),\ H_1 \in \mathcal{H}^*(S_1), \\ & H_2 \in \mathcal{H}^*(S_2),\ H = (H_1, H_2). \end{cases} \tag{4.12}$$

Если $M = M(S_1, S_2)$, то наилучшая траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна пересечься с множествами $\mathcal{P}_{S_1,S_2,H}$ (см. рис. 2). В случае, когда минимум (4.11) достигается на $m(S_1, S_2)$, в окрестности точек $\mathcal{P}_{S_2,H_2,\mathcal{L}}$ траектория не должна пересекаться с внутренностью множества $\widetilde{T}(S_1)$.

Если в (4.9) неравенство поменять на обратное, то в соотношениях (4.10)–(4.12) следует поменять $S_1$, $S_2$ местами.

В случае, когда $S_1, S_2 \subset \Delta_{\mathcal{R}}$, в формуле (4.10) следует заменить $\mathcal{L}(S_1)$ на $\mathcal{R}(S_1)$.

Теперь предположим, что $Q \neq \varnothing$ (см. (4.8) и рис. 3). Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна соединить внутренности множеств $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \setminus (\widetilde{T}(S_1) \cup \widetilde{T}(S_2))$, $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{R}} \setminus (\widetilde{T}(S_1) \cup \widetilde{T}(S_2))$, пересекаясь с $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$. В самом деле, если $\widehat{\mathcal{T}} \cap (\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)) = \varnothing$ и, к примеру, $\widehat{\mathcal{T}} \cap \overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \cap \widetilde{T}(S_1) \neq \varnothing$, но $\widehat{\mathcal{T}} \cap \overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \cap \widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2) = \varnothing$, тогда в окрестности пересечения $\widehat{\mathcal{T}} \cap \widetilde{T}(S_1)$ траекторию можно подправить, сдвинув ее в сторону множества $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$, увеличив тем самым ее расстояние от $S_1$. Аналогично устанавливается, что $\widehat{\mathcal{T}} \cap Q \neq \varnothing$. Таким образом, для поиска точек, претендующих на принадлежность оптимальной траектории, следует решить задачу

$$M(S_1, S_2) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S_i)} \max\bigl\{\rho(y, S_i) \colon y \in Q \cap H\bigr\}, \quad i = 1, 2. \tag{4.13}$$

Ясно, что величина $M(S_1, S_2)$ одинакова для $i = 1, 2$. Если $M(S_1, S_2) = M$, $\mathcal{H}^*(S_i)$ — совокупность плоскостей, доставляющих минимум в (4.13), а $\mathcal{P}_{S_1,S_2,H}$ — множество точек, доставляющих максимум в (4.13), то траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна содержать точку из $\mathcal{P}_{S_i,H}$ для каждой плоскости $H \in \mathcal{H}^*(S_i)$ и удовлетворять неравенству $\rho(y, S_i) \geq M(S_1, S_2)$ при $y \in \widehat{\mathcal{T}}$.

Пусть совокупность фрагментов $S \in \mathbb{Z}$ составлена из пар $(S_1, S_2), \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_1) \cap \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_2) \neq \varnothing$ и одиночных фрагментов $S$ так, что множества $(\overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_1) \cup \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_2)), \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S)$ попарно не пересекаются для любых пар фрагментов и одиночных фрагментов. Из предложения 2 и рассуждений п. II следует, что справедлива

**Теорема.** *Выполняется* (*см.* (4.6), (4.11), (4.13), (4.4)) *равенство*

$$M = \min\{M(S_1, S_2), M(S)\colon (S_1, S_2),\ S \in \mathbb{Z}^*\}. \tag{4.14}$$

*Траектория* $\widehat{\mathcal{T}}$ *является наилучшей тогда и только тогда, когда она пересекается с каждым из множеств* (см.(4.7), (4.12))

$$\mathcal{P}_{S_1,S_2,H}(H_i \in \mathcal{H}^*(S_i),\ i = 1, 2), \quad \mathcal{P}_{S,H}(H \in \mathcal{H}^*(S))$$

*для всех пар* $(S_1, S_2)$ *и фрагментов, доставляющих минимум в* (4.14), *и выполняется условие*

$$\rho(t, S) \geq M \quad \forall\ t \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad \forall\ S \in \mathbb{Z}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Характеристики скрытости движущегося объекта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 110–119.
2. **Бердышев В.И.** К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.
3. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатели в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладким затеняющим множеством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 95–101.
4. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатель // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 411–413.

Бердышев Виталий Иванович
Поступила 01.03.2016
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru