ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА[1]

А. О. Беляков, А. А. Давыдов

Здесь рассматривается периодический импульсный сбор возобновляемого ресурса, который распределен в области арифметического пространства и имеет логистический закон роста. Мы доказываем, что для заданного усилия сбора существует его подходящее стационарное распределение в области ресурса, которое доставляет на бесконечном горизонте максимальную эффективность сбора — максимум отношения дохода от сбора к суммарному приложенному усилию.

Ключевые слова: возобновляемый ресурс, логистический закон, усилие сбора, циклический процесс, оптимальная эксплуатация.

A. O. Belyakov, A. A. Davydov. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource.

We consider a periodic impulse harvesting of a renewable resource distributed in a domain of the arithmetic space and obeying the logistic growth low. We prove that for a given harvesting effort there exists an appropriate stationary distribution of the effort in the resource domain providing the maximum efficiency of the harvesting at infinite horizon, where the efficiency is the ratio of the harvesting profit to the total effort applied.

Keywords: renewable resource, logistic low, harvesting effort, cyclic process, optimal exploitation.

MSC: 34A37, 49K15, 91B32, 92D25, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46

Введение

Моделирование эксплуатации возобновляемых ресурсов и ее оптимизация по различным критериям качества не обделены вниманием исследователей ввиду широкого спектра возможных приложений получаемых результатов. Здесь мы рассматриваем циклическое использование такого ресурса с заданным периодом, определяемым спецификой извлечения ресурса, скажем, сезонностью сбора [7] или другими причинами, например, наличием циклических режимов использования ресурса среди оптимальных [1; 3; 4; 8].

Точнее, мы предполагаем, что ресурс распределен в ограниченной области D арифметического пространства с достаточно хорошей границей, например, с гладкой или гёльдеровой гиперповерхностью (без нарушения общности рассуждений можно считать, что наша область является шаром либо кубом), имеет начальную непрерывную (или измеримую) положительную, отделенную от нуля плотность распределения $p_0, p_0 = p_0(x)$, в этой области и возобновляется между последовательными сборами по логистическому закону

$$p_t(t,x) = (a(x) - b(x)p(t,x))p(t,x), \tag{0.1}$$

в котором $p(t,x)$ — это плотность популяции в точке $x \in D$ в момент времени t, а функции a и b характеризуют показатели роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно. Эти показатели зависят от точки области, но не зависят от времени и являются непрерывными (или измеримыми). К тому же, показатель конкуренции b будем считать положительным, отделенным от нуля некоторой величиной $b_0 > 0$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-08075а) и проекта 1.638.2016/ФПМ Программы Минобрнауки России.

Сбор ресурса осуществляется путем распределения в области D имеющегося положительного *усилия сбора* E — вещественной величины — или его части в виде измеримой неотрицательной интегрируемой функции h (= *плотности усилия*). Мы предполагаем, что плотность усилия не меняется от сбора к сбору (что в практическом плане выражается в постоянной организации сбора). В силу предположения имеем

$$\int\limits_D h(x)dx \leq E. \tag{0.2}$$

Такую плотность усилия будем называть *допустимой.*

Выгода от сбора определяется в натуральной форме в виде величины извлеченного ресурса

$$\int\limits_D p(t,x)(1-e^{-\gamma(x)h(x)})dx,$$

где t — момент сбора. Здесь коэффициент

$$1-e^{-\gamma(x)h(x)}$$

с неотрицательной измеримой функцией γ взят по аналогии с теорией поиска [6; 9] и может характеризовать сложность обнаружения (извлечения) ресурса в точке x при приложении в ней значения $h(x)$ плотности усилия (см. также [2]). Сразу после сбора плотность ресурса в точке x падает на величину

$$p(t,x)(1-e^{-\gamma(x)h(x)}) \tag{0.3}$$

и начинает восстанавливаться до следующего сбора по закону (0.1).

Эффективность сбора определяется пределом при $k \to \infty$ отношения собранного ресурса за k сборов к произведению числа сборов k на имеющееся усилие сбора E. Как мы увидим ниже, такой предел существует. Отметим, что в определении эффективности не учитывается величина периода сбора, на которую следовало бы делить результат при возможности вариации периода (сбор одного или нескольких урожаев за один и тот же промежуток времени). В силу предположения о постоянстве периода это не повлияет на выбор оптимальной плотности усилия сбора. К тому же, после замены времени $t = T\tau$ в (0.1), где τ — новое время, фиксированный период T становится равным единице.

В настоящей работе показано, что при сделанных предположениях для заданных положительных периода и усилия сбора существует допустимая плотность усилия, доставляющая его максимальную эффективность, и предложен алгоритм ее построения.

Всюду ниже показатель роста мы считаем неотрицательным. Это ограничение роста чисто техническое, поскольку всюду, где этот показатель отрицателен, популяция вымирает даже при отсутствии эксплуатации. В силу этого размещение какого-либо усилия в таких областях не будет повышать эффективность сбора (извлечения) ресурса. При нулевом значении показателя роста в этих областях будет наблюдаться тот же эффект в силу положительности показателя конкуренции. Следовательно, переопределение показателя роста как максимума из его значения и нуля не влияет на решение задачи поиска максимума эффективности сбора.

1. Существование эффективности сбора и задача ее оптимизации

Здесь мы показываем, что при заданных периоде и усилии сбора для любой допустимой плотности усилия эффективность сбора корректно определена. Сначала мы кратко повторяем аналогичные вычисления из [2], чтобы сделать изложение результатов этой работы более независимым.

Зафиксируем допустимую плотность сбора h, положительный период сбора T и рассмотрим последовательные сборы ресурса. Не нарушая общности, можно считать, что начальный момент t_0 анализа процесса сборов нулевой, а соответственно время первого сбора равно T. Если это не так, то добиться этого легко — достаточно за начальное распределение ресурса взять результат его восстановления по закону (0.1) от момента $t = t_0$ до $t = 0$ при исходной плотности p_0.

Таким образом, k-й сбор ресурса будет иметь место в момент времени $t = kT$. В силу (0.3) плотности ресурса до и после этого сбора в точке $x \in D$, скажем, $P_k(x)$ и $p_k(x)$ соответственно связаны соотношением

$$p_k(x) = P_k(x)e^{-\gamma(x)h(x)}.$$

В силу закона восстановления (0.1) величина $p_k(x)$ за время T до следующего сбора изменится до величины

$$P_{k+1}(x) = \frac{a(x)P_k(x)}{a(x)e^{\gamma(x)h(x)-a(x)T} + P_k(x)b(x)\left(1 - e^{-a(x)T}\right)} \quad \text{при } a(x) > 0$$

и величины

$$P_{k+1}(x) = \frac{P_k(x)}{e^{\gamma(x)h(x)} + P_k(x)b(x)T} \quad \text{при } a(x) = 0,$$

что нетрудно посчитать.

Во втором случае, при $a(x) = 0$, последовательность значений $P_k(x)$ монотонно убывает и стремится к нулю при $k \to \infty$ в силу неотрицательности γ и h, а также положительности T, и $p_0(x)$ и $b(x)$.

Последовательность $P_k(x)$ имеет нулевой предел при $k \to \infty$ и в первом случае, если $\gamma(x)h(x) - a(x)T \geq 0$, а если же $\gamma(x)h(x) - a(x)T < 0$, то предел последовательности $P_k(x)$ при $k \to \infty$ и $p_0(x) > 0$ ненулевой и равен

$$\frac{a(x)}{b(x)} \frac{e^{a(x)T} - e^{\gamma(x)h(x)}}{e^{a(x)T} - 1},$$

что нетрудно проверить.

Суммируя, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При заданных положительных периоде цикла сбора, усилии сбора E и начальном распределении ресурса p_0 для любой допустимой плотности усилия h корректно определена ее эффективность сбора $J(h, E)$, которая может быть вычислена по формуле*

$$J(h, E) = \frac{1}{E} \int\limits_D P_\infty(x)\left(1 - e^{-\gamma(x)h(x)}\right)dx, \tag{1.4}$$

где

$$P_\infty(x) := \max\left\{0,\, \frac{a(x)}{b(x)} \frac{e^{a(x)T} - e^{\gamma(x)h(x)}}{e^{a(x)T} - 1}\right\}. \tag{1.5}$$

Таким образом, задача повышения эффективности сбора возобновляемого ресурса сводится к задаче максимизации функционала (1.4) по всем допустимым плотностям усилия h, то есть неотрицательным распределениям усилия сбора, удовлетворяющим ограничению (0.2). Решение этой задачи мы будем называть *оптимальной* плотностью усилия сбора.

2. Существование оптимальной плотности усилия

Здесь дополнительно мы предполагаем, что показатель γ отделен от нуля в области D некоторой положительной величиной Γ_0 и доказываем существование оптимальной допустимой плотности сбора.

Обозначим через A множество допустимых плотностей усилия h, удовлетворяющих неравенству

$$0 \le \gamma(x)h(x) \le \frac{a(x)T}{2}, \tag{2.6}$$

а через A_γ — множество соответствующих функций γh.

Справедливо следующее утверждение (верное и без предположения $\gamma \ge \Gamma_0 > 0$).

Предложение 1. *Если при заданных положительных периоде цикла сбора, усилии сбора и начальном распределении ресурса существует оптимальная плотность усилия, то таковая обязательно есть и среди плотностей из множества A, т. е. удовлетворяющих условию* (2.6).

Доказательство. Действительно, пусть в условиях этого предложения существует оптимальная плотность усилия h_0. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,z) = \max\left\{0,\ \left(e^{a(x)T} - e^{z}\right)\left(1 - e^{-z}\right)\right\}$$

от $x \in D$ и $z \ge 0$. При любом $x \in D$ эта функция непрерывна на $z \ge 0$, равна нулю при $z = 0$ и $z \ge a(x)T$ и строго вогнута на интервале $(0, a(x)T)$, возможно, пустом.

По оптимальной плотности усилия построим функцию $z_0, z_0(x) := \gamma(x)h_0(x)$ и рассмотрим ее модификацию z, которая в каждой точке x из области D, где имеет место неравенство

$$z_0(x) > \frac{a(x)T}{2},$$

принимает значение $z(x) = a(x)T/2$, в котором значение функции f максимально возможное (при данном x). Соответствующую плотность усилия h оставим равной h_0 вне области изменения z_0, а в этой области определим по формуле

$$h(x) = \frac{z(x)}{\gamma(x)}.$$

Плотность усилия h всюду в области D удовлетворяет неравенствам (2.6) и $0 \le h(x) \le h_0(x)$, что нетрудно видеть, а также является измеримой как минимум из двух измеримых функций. Следовательно, h является допустимой плотностью усилия и лежит в A.

Но значение эффективности сбора для новой плотности усилия не меньшее, чем для исходной плотности h_0, поскольку по построению плотности h она доставляет не меньшее значение интеграла в функционале (1.4), чем h_0. Следовательно, построенная плотность усилия h также оптимальна.

Таким образом, предложение 1 справедливо.

Теорема 2. *При $\gamma \ge \Gamma_0 > 0$ для заданных положительных периоде цикла сбора, усилии сбора и начальном распределении ресурса существует оптимальная плотность усилия.*

Доказательство. Полезны

Лемма 1. *Множества функций A и A_γ выпуклые.*

Лемма 2. *Множество A_γ замкнуто в $L_2(D)$.*

Первая лемма очевидна, а вторая доказана в конце раздела.

Воспользуемся утверждениями лемм для доказательства теоремы 2. Заметим, что функционал (1.4) (как функционал от z!) ограничен и непрерывен на множестве A_γ, поэтому существует точная верхняя грань его значений на этом множестве. А в силу лемм 1 и 2 для любой максимизирующей этот функционал последовательности $\{z_k = \gamma h_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ существуют предельная функция z_∞ и соответственно в силу положительности γ предельная допустимая плотность усилия

$$h_\infty = \frac{z_\infty}{\gamma},$$

доставляющие максимальное значение этого функционала.

Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 2. Для доказательства леммы 2 отметим, что в силу ограниченности функций из A_γ из любой последовательности $\{z_k = \gamma h_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ таких функций можно выбрать слабо сходящуюся в $L_2(D)$, предел которой z_∞ обязан удовлетворять неравенству

$$0 \le z_\infty(x) \le \frac{a(x)T}{2}$$

почти всюду в D. Следовательно, после изменения предела z_∞ на множестве меры нуль ("срезка" по левой и правой частям этого неравенства) он будет удовлетворять этому неравенству всюду.

Далее, плотность усилия h_∞

$$h_\infty(x) := \frac{z_\infty(x)}{\gamma(x)}$$

неотрицательна и ограничена в силу неотрицательности и ограниченности функции z_∞, а также положительности и отделенности от нуля функции γ. Следовательно, эта плотность интегрируема в D. Для ее интеграла по D имеем

$$\int\limits_D h_\infty(x)dx = \int\limits_D \frac{z_\infty(x)}{\gamma(x)}dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_D \frac{z_k(x)}{\gamma(x)}dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_D h_k(x)dx \le E,$$

где E — заданное усилие сбора.

Следовательно, плотность h_∞ допустима, а z_∞ лежит в A_γ. Таким образом, множество A_γ замкнуто в $L_2(D)$.

Лемма 2 доказана.

3. О построении оптимальной плотности усилия

Здесь предложен путь построения оптимальной плотности усилия, использующий первую вариацию функционала эффективности.

Точнее, мы рассматриваем этот функционал на некоторой оптимальной плотности усилия h_0, удовлетворяющей ограничению

$$0 \le \gamma h_0 \le aT/2. \tag{3.1}$$

Предложение 2. *Если ограничение усилия неактивно, т. е.* $\int_D h_0(x)dx < E$, *то*

$$h_0(x) = \frac{a(x)T}{2\gamma(x)} \tag{3.2}$$

почти всюду, где $a\gamma > 0$.

Доказательство. Возьмем вариацию оптимальной плотности усилия

$$h_\epsilon = h_0 + \epsilon w,$$

оставляющую ее в классе допустимых, с некоторой функцией w и малым ϵ. В силу неактивности ограничения на усилие соответствующая вариация функционала эффективности (1.4) вычисляется лишь по изменению подынтегрального выражения в этом функционале и имеет вид

$$\frac{\epsilon}{E}\int\limits_{a\gamma>0}\Big[\frac{a(x)\gamma(x)e^{\gamma(x)h_0(x)}}{b(x)(e^{a(x)T}-1)}\big(e^{a(x)T-2\gamma(x)h_0(x)}-1\big)\Big]w(x)dx+o(\epsilon), \tag{3.3}$$

где последнее слагаемое — остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано. Взяв $w=h_0$ на шарах малых радиусов в D как с положительным, так и с отрицательным ϵ и с нулем вне этих шаров, получаем, что в области положительности h_0 с необходимостью должно быть равным нулю почти всюду выражение в квадратных скобках в последнем интегранте. Следовательно, необходимо $\gamma(x)h_0(x)=a(x)T/2$ почти всюду, где $a\gamma>0$.

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Если ограничение на усилие активно, т. е.* $\int_D h_0(x)dx = E > 0$, *то почти всюду, где* $a\gamma>0$, *оптимальная плотность усилия в области своей положительности вычисляется по формуле*

$$h_0(x)=\frac{1}{\gamma(x)}\left[\frac{a(x)T}{2}-\ln\left(\frac{C}{2F(x)}+\sqrt{\frac{C^2}{4F^2(x)}+1}\right)\right], \tag{3.4}$$

с некоторой неотрицательной константой C *и*

$$F(x)=\frac{a(x)\gamma(x)e^{a(x)T/2}}{b(x)(e^{a(x)T}-1)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. По сути, рассуждения аналогичны приведенным выше. Однако здесь мы будем брать вариацию плотности усилия, сохраняющую приложенное усилие. В этом случае вариация функционала эффективности будет вычисляться по той же формуле (3.3), однако функцию w уже нельзя брать произвольной в силу сохранения величины усилия E, для чего необходимо, чтобы $\int_D w(x)dx=0$.

Полезна

Лемма 3. *Для оптимальной плотности усилия* h_0, *удовлетворяющей ограничению* (3.1), *выражение в квадратных скобках из интегранта в приращении* (3.3) *почти всюду в области* $\{a\gamma>0\cap h_0>0\}$ *равно некоторой неотрицательной константе* C.

Эту лемму докажем ниже, а сейчас воспользуемся ей для доказательства предложения 3.

В силу леммы почти всюду в области $\{a\gamma>0\cap h_0>0\}$ для выражения в квадратных скобках из (3.3) имеем

$$\frac{a(x)\gamma(x)e^{\gamma(x)h_0(x)}}{b(x)(e^{a(x)T}-1)}\big(e^{a(x)T-2\gamma(x)h_0(x)}-1\big)=C$$

с некоторой неотрицательной константой C. Отсюда получаем уравнение на $z=e^{a(x)T/2-\gamma(x)h(x)}$

$$z^2-\frac{C}{F(x)}z-1=0$$

с F из (3.5) и само значение z :

$$z=\frac{C}{2F(x)}+\sqrt{\frac{C^2}{4F^2(x)}+1},$$

учитывая его положительность. Следовательно, при $a\gamma > 0$ почти всюду в области положительности оптимальной плотности усилия h_0 справедливо выражение (3.4), что и требовалось показать.

Предложение 3 доказано по модулю леммы 3.

Доказательство леммы 3. Допустим, что это не так, тогда существуют две различные точки в области $\{a\gamma > 0 \cap h_0 > 0\}$, для которых усредненное значение выражения в квадратных скобках в интегранте (3.3) по достаточно малым не пересекающимся окрестностям этих точек одинакового объема V (например, дискам одинакового достаточно малого радиуса) имеют различные (неотрицательные!) значения c_1 и c_2, $0 \le c_1 < c_2$. Выберем w, равное нулю вне этих окрестностей и некоторой достаточно малой величине $H < 0$ в первой из них и величине $-H > 0$ во второй (здесь малость H обусловливается возмущением плотности усилия в классе допустимых), что сохранит величину используемого усилия E. Это даст приращение функционала эффективности

$$\frac{\epsilon}{E} H(c_1 - c_2)V + o(\epsilon),$$

которое положительно при малых $\epsilon > 0$, что нетрудно видеть. Это противоречит оптимальности h_0. Следовательно, предположение ошибочно. Отсюда в силу произвольности окрестностей усреднения получаем справедливость утверждения леммы 3.

4. Пример

Учитывая полученные нами формулы (1.4), (1.5), (3.4), (3.5), при построении примера возьмем в изучаемой модели $a \equiv 1$, а функции b и γ — непрерывными положительными в замыкании области D (например, если D — окружность, как в работах [1; 2] или [5], а x — обычный угол на ней, то подойдут $b(x) = \gamma(x) = 2 + \sin x$).

Для так выбранных функций для плотности h_0, доставляемой необходимым условием оптимальности (3.4), имеем

$$h_0(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \left(T - \ln W\right),$$

где

$$W = \frac{C(e^T - 1)}{2} + \sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}.$$

Подставляя эту плотность в значение предельного распределения P_∞ из (1.5), после несложных преобразований находим

$$P_\infty(x) = \max\Big\{0, \quad \frac{e^T}{b(x)(e^T - 1)}\Big(1 - \frac{1}{W}\Big)\Big\}.$$

Нетрудно видеть, что при положительном периоде T и неотрицательной константе C это распределение положительно, оно всюду равно второму выражению в фигурных скобках. Следовательно, для интегранта в выражении (1.4) получаем следующее выражение:

$$\frac{e^T}{b(x)(e^T - 1)}\Big(1 - \frac{1}{W}\Big)(1 - e^{-T}W) = \frac{1}{b(x)(e^T - 1)}\left(e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}\right).$$

Учитывая теперь, что $b \equiv \gamma$, для эффективности плотности усилия h_0 получаем значение

$$\frac{\displaystyle\int_{h_0>0} \frac{1}{b(x)(e^T - 1)}\left(e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}\right)dx}{\displaystyle\int_{h_0>0} \frac{1}{\gamma(x)} \left(T - \ln W\right) dx} = \frac{e^T + 1 - 2\sqrt{\dfrac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}}{(e^T - 1)(T - \ln W)}.$$

Правая часть последнего выражения зависит дифференцируемо от периода $T > 0$ и константы $C \geq 0$, но не зависит от области интегрирования $\{h_0 > 0\}$. Следовательно, его максимум, если он существует, достигается или в концевом значении C, например, $C = 0$, или в некоторой точке, где производная этого выражения по C равна нулю. Простые вычисления дают следующее выражение этой производной:

$$\frac{-C(e^T-1)(T-\ln W)+e^T+1-2\sqrt{\dfrac{C^2(e^T-1)^2}{4}+e^T}}{2(T-\ln W)^2\sqrt{\dfrac{C^2(e^T-1)^2}{4}+e^T}}.$$

Знаменатель в этом выражении положителен при положительных периоде T и разности $T - \ln W$ (т. е. при положительной плотности усилия h_0). При этом числитель равен $(e^{T/2}-1)^2$ при $C = 0$ и также положителен, а производная числителя по C имеет значение

$$-(e^T-1)(T-\ln W)-\frac{C(e^T-1)^2}{2\sqrt{\dfrac{C^2(e^T-1)^2}{4}+e^T}},$$

которое, напротив, отрицательно при $C \geq 0$ и положительных плотности усилия и периоде сбора.

Следовательно, вычисленная выше первая производная убывает с ростом C, а эффективность плотности усилия растет, пока эта производная остается положительной. При этом рост эффективности прекратится при первом обращении в ноль разности $T - \ln W$, когда плотность усилия станет нулевой, и никакого сбора фактически не будет, что нетрудно видеть. Легко посчитать, что произойдет это при $C = 1$.

Таким образом, наибольшая эффективность сбора достигается в пределе, когда стремящееся к нулю усилие сбора распределяется “правильно” во всей области сбора в соответствии с формулой (3.4). Отметим, что в сделанных предположениях плотность распределения усилия выше там, где ниже конкуренция и возможность обнаружения (извлечения) ресурса.

З а м е ч а н и е 1. Следует отметить, что в реальной ситуации, как правило, усилие сбора (наличие машин, обслуживающего их персонала и т.п.) невозможно устремить к нулю. В этом случае в разобранном примере максимальная эффективность будет достигаться при минимально возможном положительном усилии сбора. Этот факт справедлив и при более общих предположениях, как показывают наши вычисления в других примерах.

З а м е ч а н и е 2. Таким образом, алгоритм отыскания оптимального усилия сбора состоит в поиске наибольшего C, начиная с $C = 0$, где выполнено ограничение (0.2). При этом оптимальное значение может не существовать, когда распределенное усилие сбора ограничено снизу лишь нулем, как в нашем примере.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе для рассматриваемого периодического сбора возобновляемого ресурса со стационарным распределением усилия сбора получено существование допустимой плотности, доставляющей максимум среднего временного дохода от сбора на единицу усилия. Мы также предъявили формулы (3.2) и (3.4) для вычисления такой плотности. Вне области действия этих формул, т. е. вне области $a\gamma > 0$, или предельная плотность собираемого ресурса нулевая, или ресурс неизвлекаем ($\gamma = 0$), поэтому приложение каких-либо усилий сбора вне этой области дает нулевой вклад и, следовательно, неэффективно. В силу этого вне этой области оптимальную плотность распределения усилия можно положить нулевой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его приложения. 2002. Т. 36, вып. 2. С. 1–11.
2. **Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M.** Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494.
3. **Давыдов А.А.** Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.
4. **Давыдов А.А., Мена Матош Е.** Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Мат. сб. 2007. Т. 198, вып. 1. С. 21–42.
5. **Давыдов А.А., Шуткина Т.С.** Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по средней временной выгоде // Успехи мат. наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 143–144.
6. **Koopman B.O.** The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // Operations Res. 1957. Vol. 5, no. 5. P. 613–626.
7. **Flaaten O.** The optimal harvesting of a natural resource with seasonal growth // The Canad. J. of Economics. 1983. Vol. 16, no. 3. P. 447–462.
8. Cyclical versus non-cyclical harvesting policies in renewable resource management / K. Erdlenbruch, A. Jean-Marie, M. Moreaux, M. Tidball // Presented at Monte Verita Conference on Sustainable Resource Use and Economic Dynamics (SURED 2008). Askona, 2008. P. 1–34. URL: http://prodinra.inra.fr/record/28290 .
9. **Жиков В.В.** Математические проблемы теории поиска // Тр. Владимир. политех. ин-та. 1968. С. 263–270.

Поступила 08.03.2016

Беляков Антон Олегович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
e-mail: a_belyakov@inbox.ru

Давыдов Алексей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ведущий науч. сотрудник
Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”
e-mail: davydov@vlsu.ru