ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.9

МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается вариант метода программных итераций для решения игровой задачи наведения на целевое множество при наличии фазовых ограничений. Исследуется процедура построения множества позиционного поглощения, соответствующего теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина, послужившей основой современной теории дифференциальных игр. Важные результаты об альтернативной разрешимости дифференциальных игр для систем с распределенными параметрами и последействием принадлежат Ю. С. Осипову. Эти результаты существенно дополняют основные идеи, связанные с альтернативой, для динамических задач бесконечномерной природы. Метод решения настоящей работы ориентирован на "конечномерный" случай дифференциальной игры сближения-уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, обобщенное программное управление, метод итераций.

A. G. Chentsov. The program iteration method in a game problem of guidance.

A variant of the program iteration method for solving a game problem of guidance to a target set under state constraints is considered. We study a procedure for the construction of a positional absorption set corresponding to N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin's theorem of alternatives, which underlies the modern theory of differential games. Important results on the alternative solvability of differential games for systems with distributed parameters and aftereffect belong to Yu.S. Osipov. These results are an essential complement to the ideas related to the alternative for dynamic problems of infinite-dimensional nature. The solution method from the present paper is intended for the "finite-dimensional" case of a differential game of approach–evasion.

Keywords: differential game, generalized program control, iteration method.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321

1. Введение

Используем далее следующие сокращения: в/з — вещественнозначная (функция), ДИ — дифференциальная игра, ИП — измеримое пространство, МПИ — метод программных итераций, МПП — множество позиционного поглощения, м/ф — мультифункция, НУ — начальное условие, ОПП — оператор программного поглощения, п/м — подмножество, п/п — подпространство, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, УПЗМ — упорядоченная пара замкнутых множеств.

Теория ДИ связана [1; 2] с исследованием задач динамики, возникающих в инженерных приложениях и связанных с управлением в условиях помех и возмущений различного характера. Настоящая статья посвящена одному из методов решения ДИ — МПИ. Вариант МПИ, рассматриваемый ниже, касается процедуры построения МПП, определяющего решение ДИ сближения-уклонения (см. [2]). Упомянутое решение связано с фундаментальным фактом — теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [2; 3]. Данная теорема во многом определила современное состояние теории ДИ. Последующее развитие данной теории было связано с разработкой программных конструкций [4; 5], построением теории обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби и, на этой основе, целого направления в негладком

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

анализе (работы А. И. Субботина и его учеников). В связи с упомянутой важной теоремой отметим глубокий результат А. В. Кряжимского [6], касающийся распространения альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина на ДИ, в которой правая часть управляемого дифференциального уравнения не удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной.

Создание МПИ в значительной мере было подготовлено построением вспомогательных программных конструкций для решения так называемых регулярных ДИ. Данные конструкции восходят, в свою очередь, к методам, разработанным Н. Н. Красовским и изложенным в [7] в связи со схемой экстремального прицеливания. Использование МПИ не требует условий, обеспечивающих регулярность ДИ (см. в этой части [8–12]). Применение МПИ в целом ряде исследований удачно связывалось [9;10] с формализацией ДИ в классе квазистратегий (см. [13;14]); однако в [9;10] использовались многозначные их варианты, действующие в пространствах мер. Данные конструкции отражены в [15, гл. IV–VI].

2. Обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки), $\varnothing$ — пустое множество, $\exists!$ заменяет фразу "существует и единственно", $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Для всякого объекта s через $\{s\}$ обозначаем синглетон, содержащий s. Через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м множества H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м H. Если $\mathcal{X}$ — семейство (множеств) и Y — множество, то $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y \colon X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ есть след $\mathcal{X}$ на множество Y. Если A и B — множества, то, следуя [16, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений, действующих из A в B (для $f \in B^A$ и $a \in A$ через $f(a)$, $f(a) \in B$, обозначается, как обычно, значение f в точке a). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f|C) \in B^C$ есть def сужение f на C, для которого $(f|C)(x) \triangleq f(x)$ при $x \in C$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$; при $r \in \mathbb{N}_o$ и $s \in \mathbb{N}_o$ полагаем $\overline{r,s} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_o \mid (r \leqslant j) \,\&\, (j \leqslant s)\}$. Кроме того, $\overrightarrow{m,\infty} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_o \mid m \leqslant j\}$ $\forall m \in \mathbb{N}_o$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то, как обычно, вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем H^k, полагая далее, что элементы $\mathbb{N}$, т. е. натуральные числа, не являются множествами. Ясно, что $H^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей в множестве H. Используем стандартное соглашение: если $\mathbb{H}$ — множество, $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, то

$$\big((H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \Big(\Big(H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i\Big) \,\&\, (H_{j+1} \subset H_j \ \ \forall j \in \mathbb{N})\Big).$$

Наконец, если (X,τ) есть ТП и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(Y,\tau)$ обозначаем замыкание Y в (X,τ); $(Y,\tau|_Y)$ есть ТП, называемое п/п (X,τ) (см. [17, гл. 2]).

Отметим некоторые часто используемые свойства ИП и их п/п. Если E — множество и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$, то через $\sigma^o_E(\mathcal{E})$ обозначаем σ-алгебру п/м E, порожденную семейством $\mathcal{E}$. Если X — множество, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X)\big)$ и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то $\sigma^o_Y(\mathcal{X}|_Y) = \sigma^o_X(\mathcal{X})|_Y$; если же $Y \in \sigma^o_X(\mathcal{X})$, то $\sigma^o_Y(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma^o_X(\mathcal{X}) \mid \Sigma \subset Y\}$ (см. [18, § 2.3]). Данное свойство применимо в случае, когда $(X,\mathcal{X})$ есть ТП. Заметим в этой связи, что произвольный конечномерный компакт далее оснащаем (метризуемой) топологией покоординатной сходимости; борелевские множества понимаются традиционно [19, с. 65]. Меры, определяемые на σ-алгебре борелевских п/м ТП, называем *борелевскими* (ниже используются только счетно-аддитивные неотрицательные меры). Если $(E,\mathcal{E})$ есть стандартное ИП, то через $(\sigma-\mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех неотрицательных в/з счетно-аддитивных мер на σ-алгебре $\mathcal{E}$.

3. Содержательная постановка задачи о сближении

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства конфликтно-управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \tag{3.1}$$

функционирующей на том или ином конечном промежутке времени $[t_*, \vartheta_o]$, где $t_* \in T \stackrel{\triangle}{=} [t_o, \vartheta_o]$, $t_o \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_o \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $t_o < \vartheta_o$. В (3.1) P и Q — непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$ (здесь и ниже, если не оговорено противное, предполагается, что пространства $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, оснащаются каждое топологией покоординатной сходимости), $f\colon T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ есть функция, непрерывная по совокупности переменных. В дальнейшем будут указаны дополнительные условия на систему (3.1), обеспечивающие, в частности, существование, единственность и продолжимость решений, понимаемых в смысле Каратеодори и реализуемых при воздействии борелевских управляющих функций со значениями в P и Q соответственно. Кроме того, будут введены обобщенные управления-меры, определяемые на σ-алгебрах борелевских п/м соответствующих произведений конечномерных компактов, а также движения, порождаемые управлениями-мерами. Основным ориентиром в дальнейшем является построение альтернативного разбиения пространства позиций (из $T \times \mathbb{R}^n$) с использованием МПИ. При этом фиксируются целевое множество (обозначаемое через M и, возможно, снабжаемое индексами) и множество, определяющее фазовые ограничения (используется обозначение N, также дополняемое по мере надобности теми или иными индексами).

Если $t_* \in T$, то через $C_n([t_*, \vartheta_o])$ обозначаем множество всех непрерывных отображений из $[t_*, \vartheta_o]$ в $\mathbb{R}^n$; в частности, используем обозначение $C_n(T)$. При $x(\cdot) = \big(x(t)\big)_{t \in T} \in C_n(T)$ в виде $(t, u, v) \longmapsto f\big(t, x(t), u, v\big)\colon T \times P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ имеем непрерывную n-вектор-функцию. В качестве $x(\cdot)$ могут использоваться непрерывные продолжения решений, определенных на промежутках вида $[t_*, \vartheta_o]$, где $t_* \in T$. Упомянутые решения могут соответствовать программным (в том числе и обобщенным) управлениям и процедурам управления по принципу обратной связи. В частности, могут использоваться чистые позиционные стратегии и контрстратегии [2]. Ограничимся сейчас обсуждением управления по принципу обратной связи при естественных условиях на правую часть (3.1) (т. е. на функцию f). Каждой контрстратегии

$$U\colon T \times \mathbb{R}^n \times Q \longrightarrow P \tag{3.2}$$

со свойством борелевости всех сечений $U(t, x, \cdot)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$, и каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ сопоставляется пучок $\mathcal{X}(t_*, x_*, U)$ [15, с. 239] движений, порожденных U из позиции (t_*, x_*) и определенных в виде равномерных пределов пошаговых движений, формируемых в дискретных схемах с измельчением разбиений промежутка $[t_*, \vartheta_o]$. В частности, допускается использование чистых позиционных стратегий, отвечающих варианту (3.2) с условием независимости от $v \in Q$, т. е. варианту $U\colon T \times \mathbb{R}^n \longrightarrow P$. Если заданы замкнутые в $T \times \mathbb{R}^n$ с топологией покоординатной сходимости множества M и N (содержащиеся каждое в $T \times \mathbb{R}^n$), то *успешной* для игрока I, распоряжающегося выбором контрстратегии (3.2), называем всякую позицию $(t_*, x_*) \in N$, для которой существует такая контрстратегия $U = U_*$ вида (3.2), что $\forall x(\cdot) = \big(x(t)\big)_{t \in [t_*, \vartheta_o]} \in \mathcal{X}(t_*, x_*, U)$

$$\exists\, \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon \big((\vartheta, x(\vartheta)) \in M\big) \,\&\, \big((t, x(t)) \in N \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta[\big). \tag{3.3}$$

Условие (3.3) соответствует гарантированной разрешимости задачи (M, N)-сближения в классе контрстратегий игрока I. Ограничиваясь сейчас условиями на f, подобными приводимым в [15, гл. IV, § 2], отметим, что множество $W(M, N) \in \mathcal{P}(N)$ всех успешных для игрока I позиций (т. е. множество успешной разрешимости) определяет альтернативное разбиение N: для $(t, x) \in N \setminus W(M, N)$ всякий раз существует чистая позиционная стратегия игрока II, гарантирующая ему разрешимость задачи уклонения. Этот замечательный факт — теорема об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина — определяет решение дифференциальной игры общего вида (см. более подробно в [2]). В настоящей работе рассматривается вопрос о построении и свойствах множеств $W(M, N)$. Исследуются некоторые вопросы, связанные с зависимостью $(M, N) \mapsto W(M, N)$. Центральную роль в упомянутом исследовании играет МПИ. При этом оказывается удобным трактовать (при естественных условиях на M и N) $W(M, N)$ как множество успешной разрешимости ДИ в классе многозначных квазистратегий (см. в этой связи [15, теоремы 4.4.3, 4.4.4]). Упомянутые квазистратегии определяются в виде (многозначных) отображений, действующих в пространствах обобщенных программных управлений-мер (см. [15, с. 172]), что соответствует естественной процедуре расширения, применяемой в общем случае нелинейной управляемой системы.

В своих построениях мы ослабляем ряд традиционных предположений. Так, в отношении системы (3.1) будут постулироваться условия А. В. Кряжимского [6] и, таким образом, не будет предполагаться выполненным традиционное условие Липшица по фазовой переменной. Кроме того, относительно N будет, как правило, предполагаться (в общей части) только свойство замкнутости сечений N гиперплоскостями $t = \text{const}$. Соответственно предметом исследования будут, в частности, топологические свойства $W(M, N)$ в упомянутом более общем случае.

4. Обобщенные программные управления и движения

Напомним, что в общем случае пучок траекторий системы (3.1) с фиксированным НУ не обладает (вообще говоря) компактностью в топологии равномерной сходимости. В этой связи, следуя [15, гл. IV, § 2], введем расширение пространства управлений, реализуемое в классе стратегических мер. При $t \in T$, где $T = [t_o, \vartheta_o]$, рассматриваем конечномерные компакты $[t, \vartheta_o]$, $Z_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times Q$, $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times P \times Q$, используя обычные топологии покоординатной сходимости. Упомянутые компакты оснащаем соответственно σ-алгебрами $\mathcal{T}_t$, $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ борелевских множеств, получая ИП $([t, \vartheta_o], \mathcal{T}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$ и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$. С учетом (3.1) имеем, конечно, что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ $\mathcal{T}_\theta = \{\Gamma \in \mathcal{T}_t \mid \Gamma \subset [\theta, \vartheta_o]\}$, $\mathcal{D}_\theta = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset Z_\theta\}$, $\mathcal{C}_\theta = \{C \in \mathcal{C}_t \mid C \subset \Omega_\theta\}$; при этом $\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_t|_{[\theta, \vartheta_o]}$, $\mathcal{D}_\theta = \mathcal{D}_t|_{Z_\theta}$ и $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_t|_{\Omega_\theta}$. Полагаем $Z \triangleq Z_{t_o}$, $\Omega \triangleq \Omega_{t_o}$, $\mathcal{T} \triangleq \mathcal{T}_{t_o}$, $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{D}_{t_o}$ и $\mathcal{C} \triangleq \mathcal{C}_{t_o}$. Пусть λ — след меры Лебега на $\mathcal{T}$. При $t \in T$ реализуются свойства (подробнее см. в [20, § 3]) $(\Gamma \times P \times Q \in \mathcal{C}_t \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t) \,\&\, \big(D \underline{\times} P \triangleq \{(t, u, v) \in \Omega_t \mid (t, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\big)$ (см. [21, добавление II]), характеризующие "цилиндры" в Ω_t. Полагаем при $t \in T$, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(\Gamma \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \tag{4.2}$$

получая непустые множества (регулярных борелевских) мер. Кроме того,

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \underline{\times} P) = \nu(D) \ \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \tag{4.3}$$

Множества, определяемые в (4.3), непусты и именуются программами игрока II. Пусть $\mathcal{H} \triangleq \mathcal{H}_{t_o}$, $\mathcal{E} \triangleq \mathcal{E}_{t_o}$ и $\Pi[\nu] \triangleq \Pi_{t_o}(\nu)$ $\forall \nu \in \mathcal{E}$. Легко видеть (см. [20]), что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$

$$\mathcal{H}_\theta = \{(\eta | \mathcal{C}_\theta) \colon \eta \in \mathcal{H}_t\}, \quad \mathcal{E}_\theta = \{(\nu | \mathcal{D}_\theta) \colon \nu \in \mathcal{E}_t\}. \tag{4.4}$$

Отметим свойства склеиваемости мер из множеств (4.1), (4.2). Если $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_t$ и $\eta_2 \in \mathcal{H}_\theta$, то

$$\eta_1 \perp \eta_2 \triangleq \Big(\eta_1\big(H \cap ([t, \theta[\times P \times Q)\big) + \eta_2(H \cap \Omega_\theta)\Big)_{H \in \mathcal{C}_t} \in \mathcal{H}_t. \tag{4.5}$$

Аналогичным образом, при $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $\nu_1 \in \mathcal{E}_t$ и $\nu_2 \in \mathcal{E}_\theta$

$$\nu_1 \bowtie \nu_2 \triangleq \Big(\nu_1\big(D \cap ([t, \theta[\times Q)\big) + \nu_2(D \cap Z_\theta)\Big)_{D \in \mathcal{D}_t} \in \mathcal{E}_t. \tag{4.6}$$

Заметим, что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ непременно $[t, \theta[\times P \times Q \in \mathcal{C}_t$ и

$$\mathcal{C}_t^{(\theta)} \overset{\triangle}{=} \mathcal{C}_t\big|_{[t,\theta[\times P\times Q} = \{H \in \mathcal{C}_t \mid H \subset [t, \theta[\times P \times Q\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{C}_t); \tag{4.7}$$

при $\eta \in \mathcal{H}_t$ определена мера $[\eta; \theta) \overset{\triangle}{=} (\eta|\, \mathcal{C}_t^{(\theta)}) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t^{(\theta)}]$ ($\mathcal{C}_t^{(\theta)}$ есть σ-алгебра п/м $[t, \theta[\times P \times Q)$. Кроме того, при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ $[t, \theta[\times Q \in \mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_t^{(\theta)} \overset{\triangle}{=} \mathcal{D}_t\big|_{t,\theta[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset [t, \theta[\times Q\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{D}_t)$; если $\nu \in \mathcal{E}_t$, то $[\nu; \theta\rangle \overset{\triangle}{=} (\nu|\, \mathcal{D}_t^{(\theta)}) \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t^{(\theta)}]$.

Заметим, что при $t \in T$ меры $\eta \in \mathcal{H}_t$ являются аналогами пар $\big(u(\cdot), v(\cdot)\big)$ борелевских управляющих функций на $[t, \vartheta_o]$ со значениями в P и Q соответственно, а меры $\nu \in \mathcal{E}_t$ — аналогами борелевских функций $v(\cdot)$ на $[t, \vartheta_o]$ со значениями в Q. Условимся при $t \in T$ через $C([t, \vartheta_o])$, $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ обозначать соответственно множества всех непрерывных в/з функций на $[t, \vartheta_o], \Omega_t$ и Z_t соответственно, получая при оснащении нормами равномерной сходимости банаховы пространства. Нам потребуются пространства $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$ линейных непрерывных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно. По теореме Рисса меры из $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ отождествимы с элементами $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$, что отражено в [15, гл. IV, § 2]. В этой связи при $t \in T$ оснащаем $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ относительными $*$-слабыми топологиями, которые метризуемы [22, с. 462], поскольку $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ — сепарабельные пространства (см. [19, теорема 1.5.1]). Поэтому в упомянутых $*$-слабых топологиях замкнутость множеств тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенцильной компактности. Эти обстоятельства используются ниже без дополнительных пояснений. Для обозначения $*$-слабой сходимости последовательностей в $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$, где $t \in T$, всякий раз используем символ $\rightharpoonup$, при этом $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{E}_t$ — суть множества сильно ограниченные и $*$-слабо замкнутые, а потому $*$-слабо компактные. Аналогичными свойствами обладает каждая программа (4.3). Более подробные сведения см. в [15, гл. IV, § 2].

С каждым отображением $x(\cdot) = \big(x(\xi)\big)_{\xi\in[t,\vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$ связываем непрерывную вектор-функцию $(\xi, u, v) \longmapsto f(\xi, x(\xi), u, v) \colon \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}^n$, для которой при $\eta \in \mathcal{H}_t$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ существует η-интеграл на $[t, \theta[\times P \times Q$, определяемый покомпонентно по схеме [23, гл. 3]. Варьируя $\theta \in [t, \vartheta_o]$, получаем вектор-функцию из множества $C_n([t, \vartheta_o])$. С учетом этого введем

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \overset{\triangle}{=} \Big\{x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \mid x(t) = x_* + \int\limits_{[t_*,t[\times P\times Q} f\big(\xi, x(\xi), u, v\big)\, \eta\big(d(\xi, u, v)\big) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_o]\Big\}$$

$$\forall t_* \in T \ \ \forall x_* \in \mathbb{R}^n \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}$$

(интегральная воронка). Действуя в духе [6], полагаем в дальнейшем, что

$$\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \ \ \exists!\, x^*(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \colon \Phi(t_*, x_*, \eta) = \{x^*(\cdot)\}. \tag{4.8}$$

Тем самым введено условие обобщенной единственности. В этой связи принимаем следующее обозначение: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = \big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\big)_{t\in[t_*,\vartheta_o]} \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \tag{4.9}$$

таково, что $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$. Вектор-функцию (4.9) называем *программным движением системы*, отвечающим триплету (t_*, x_*, η) ((4.9) является, вообще говоря, скользящим режимом). Учитывая (4.4), полагаем также, что

$$\tilde{\varphi}(\cdot, t_*, x_*, \eta) = \big(\tilde{\varphi}(t, t_*, x_*, \eta)\big)_{t\in[t_*,\vartheta_o]} \overset{\triangle}{=} \varphi\big(\cdot, t_*, x_*, (\eta|\, \mathcal{C}_{t_*})\big) \quad \forall \eta \in \mathcal{H} \ \ \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

В (4.10) введены обобщенные траектории, порожденные управлениями-мерами, соответствующими "полному" промежутку времени T. Через $\|\cdot\|$ обозначаем ниже евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. В дополнение к (4.8) полагаем далее, что $\forall a \in [0, \infty[\ \exists\, b \in [0, \infty[\ \forall x_* \in \mathbb{R}^n$

$$(\|x_*\| \leqslant a) \Longrightarrow \big(\|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| \leqslant b \ \ \forall t_* \in T \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta_o]\big). \tag{4.11}$$

С учетом (4.8) и (4.11) проверяется следующее свойство: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{H}_{t_*}$, $(x_*^{(i)})_{i\in\mathbb{N}} \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, то истинна импликация

$$(((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \,\&\, ((x_*^{(i)})_{i\in\mathbb{N}} \to x_*)) \Longrightarrow ((\varphi(\cdot, t_*, x_*^{(i)}, \eta_i))_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)),$$

где $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость. Отметим простые свойства динамического характера, проверяемые с учетом (4.8). Если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\eta_2 \in \mathcal{H}_{t_*}$ и $\theta \in [t_*, \vartheta_o]$, то

$$\big([\eta_1; \theta) = [\eta_2; \theta)\big) \Longrightarrow \big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) \ \ \forall t \in [t_*, \theta]\big) \tag{4.12}$$

(в (4.12) имеем свойство неупреждаемости). При $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\theta \in [t_*, \vartheta_o]$ и $\eta_2 \in \mathcal{H}_\theta$

$$\begin{gathered}\big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \eta_2) \ \ \forall t \in [t_*, \theta]\big) \,\& \\ \big(\varphi\big(t, \theta, \varphi(\theta, t_*, x_*, \eta_1), \eta_2\big) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \eta_2) \ \ \forall t \in [\theta, \vartheta_o]\big).\end{gathered} \tag{4.13}$$

5. Оператор программного поглощения

Введем естественную топологию $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости в $T \times \mathbb{R}^n$ (при этом $\mathbf{t} \subset \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$), порождаемую, в частности, метрикой ρ, имеющей вид

$$\big((t_1, x_1), (t_2, x_2)\big) \longmapsto \sup\big(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}\big) \colon (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty[. \tag{5.1}$$

Через $\mathcal{F}$ обозначаем семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$; последнее можно рассматривать как произведение T в обычной $|\cdot|$-топологии и $\mathbb{R}^n$ в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ покоординатной сходимости. Полагая $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$, введем также естественную топологию $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ произведения дискрета (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Семейство $\mathfrak{F}$ всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, допускает простое описание в терминах сечений: при

$$H\langle t\rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n |\, (t, x) \in H\} \ \ \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \ \ \forall t \in T \tag{5.2}$$

имеем следующее очевидное представление:

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t\rangle \in \mathbf{F} \ \ \forall t \in T\}, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{F}$ — семейство всех п/м $\mathbb{R}^n$, замкнутых в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$. Ясно, что (см. (5.1)–(5.3))

$$\mathbf{t} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}, \quad \mathcal{F} \subset \mathfrak{F}. \tag{5.4}$$

Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$, то $(M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ называем далее УПЗМ. Кроме того, нам потребуются случаи $(M, N) \in \mathcal{F} \times \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то ОПП $\mathbb{A}[M] \colon \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ (с целевым множеством M) определяем условиями

$$\begin{gathered}\mathbb{A}[M](S) \triangleq \Big\{(t, x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \ \exists \eta \in \Pi_t(\nu) \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon \\ \big(\big(\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)\big) \in M\big) \,\&\, \big(\big(\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)\big) \in S \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[\big)\Big\} \ \ \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n).\end{gathered} \tag{5.5}$$

Легко видеть (см. (5.4)), что

$$\begin{gathered}\mathbb{A}[M](F) = \Big\{(t, x) \in F \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \ \exists \eta \in \Pi_t(\nu) \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o] \colon \\ \big(\big(\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)\big) \in M\big) \,\&\, \big(\big(\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)\big) \in F \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta]\big)\Big\} \ \ \forall M \in \mathcal{F} \ \ \forall F \in \mathcal{F}.\end{gathered}$$

Ясно также, что $M \cap S \subset \mathbb{A}[M](S)$ $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $\forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Отметим также очевидное свойство изотонности каждого ОПП.

Предложение 5.1. *Если* $M \in \mathcal{F}$ *и* $F \in \mathfrak{F}$, *то* $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathfrak{F}$ и $t_* \in T$. Тогда $F\langle t_*\rangle \in \mathbf{F}$. Выберем последовательность $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$, для которых $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \to x_*$. Поскольку, в частности, $x_j \in F\langle t_*\rangle$ при $j \in \mathbb{N}$, то $x_* \in F\langle t_*\rangle$ и $(t_*, x_*) \in F$ (см. (5.2)). Пусть $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$. Используя (5.5) и (счетную) аксиому выбора, получаем для некоторых последовательностей

$$(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \Pi_{t_*}(\nu_*), \quad (\vartheta_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \longrightarrow [t_*, \vartheta_o] \tag{5.6}$$

следующие положения:

$$((\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_j, \eta_j)) \in M) \,\&\, ((t, \varphi(t, t_*, x_j, \eta_j)) \in F \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_j[) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Учитывая (секвенциальную) компактность $\Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $[t_*, \vartheta_o]$, полагаем последовательности (5.6) сходящимися: для некоторых $\eta_* \in \Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta_*\big) \,\&\, \big((\vartheta_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow \vartheta_*\big). \tag{5.8}$$

Тогда $\big(\varphi(\cdot, t_*, x_i, \eta_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)$, а потому (см. (5.7)), используя замкнутость M, имеем $\big(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*, \eta_*)\big) \in M$. Пусть $t^* \in [t_*, \vartheta_*[$. В силу (5.8) имеем для некоторого $k^* \in \mathbb{N}$, что $t^* \in [t_*, \vartheta_j[\;\; \forall j \in \overrightarrow{k^*, \infty}$. Тогда из (5.7) следует, что $\varphi(t^*, t_*, x_j, \eta_j) \in F\langle t^*\rangle \;\; \forall j \in \overrightarrow{k^*, \infty}$. Поскольку $F\langle t^*\rangle \in \mathbf{F}$ и $\big(\varphi(t^*, t_*, x_j, \eta_j)\big)_{j\in\mathbb{N}} \longrightarrow \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*)$, получаем, что $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*) \in F\langle t^*\rangle$, а тогда $\big(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*)\big) \in F$.

Коль скоро выбор t^* был произвольным, установлено, что $(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_*)) \in F \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_*[$. Получили, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \; \exists \eta \in \Pi_{t_*}(\nu) \; \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]\colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M) \,\&\, ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in F \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta[)$. Согласно (5.5) имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$ и, как следствие, $x_* \in \mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle$. Итак, $\mathbb{A}[M](F)\langle t_*\rangle \in \mathbf{F}$. Так как выбор t_* был произвольным, имеем из (5.3), что $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Предложение доказано.

Заметим, что при всяком выборе $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ и $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ непременно $\big((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M\big) \Rightarrow (M \in \mathcal{F})$. Аналогично, при $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ имеем $\big((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F\big) \Rightarrow (F \in \mathfrak{F})$.

Предложение 5.2. *Если* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ *и* $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, *то*

$$\big(((M_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow M) \,\&\, ((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F)\big) \implies \big((\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F)\big). \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (5.9). Из определений легко следует, что для проверки (5.9) достаточно установить вложение

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i) \subset \mathbb{A}[M](F). \tag{5.10}$$

Пусть (t_*, x_*) — элемент множества в левой части (5.10). Тогда, в частности, $(t_*, x_*) \in F$. Пусть $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$. Тогда можно указать последовательности (5.6), для которых

$$\big((\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_*, \eta_j)) \in M_j\big) \,\&\, \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_j)) \in F_j \;\; \forall t \in [t_*, \vartheta_j[\big) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Полагаем без потери общности, что каждая из последовательностей (5.6) сходится: $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \eta^*$, $(\vartheta_i)_{i\in\mathbb{N}} \to \vartheta^*$, где $\eta^* \in \Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$. Тогда

$$\big(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta^*). \tag{5.12}$$

По предположению M есть пересечение всех M_j, $j \in \mathbb{N}$. Фиксируем $l \in \mathbb{N}$. Тогда $M_j \subset M_l \;\; \forall j \in \overrightarrow{l, \infty}$. Из (5.12), используя замкнутость M_l, извлекаем (подобно предложению 5.1) свойство $\big(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^*)\big) \in M_l$. Поскольку выбор l был произвольным, $\big(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^*)\big) \in M$.

Выберем произвольно $t^* \in [t_*, \vartheta^*[$ и подберем $m_1 \in \mathbb{N}$ так, что $t^* \in [t_*, \vartheta_j[\ \forall j \in \overrightarrow{m_1, \infty}$. Тогда в силу (5.11) $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_j) \in F_j\langle t^*\rangle\ \ \forall j \in \overrightarrow{m_1, \infty}$. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Введем $m_2 \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{m_1; r\}) \in \mathbb{N}$. Тогда, как легко видеть, $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_j) \in F_r\langle t^*\rangle\ \ \forall j \in \overrightarrow{m_2, \infty}$. Поскольку $F_r\langle t^*\rangle \in \mathbf{F}$, имеем в силу (5.12), что $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*) \in F_r\langle t^*\rangle$, а потому (см. (5.2)) $\big(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*)\big) \in F_r$. Поскольку выбор r был произвольным, $\big(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*)\big) \in F$. Тем самым установлено, что $\big(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^*)\big) \in F\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta^*[$. Стало быть, получили, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}\ \exists \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\ \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$: $\big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M\big)\ \&\ \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in F\ \ \forall t \in [t_*, \vartheta[\big)$. Согласно (5.5) получаем включение $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$, чем и завершается доказательство (5.10).

Предложение доказано.

Из (4.10) и (5.5) легко следует, что $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{A}[M](S) = \Big\{(t, x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E}\ \ \exists \eta \in \Pi[\nu]\ \ \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon \\ \big((\vartheta, \tilde{\varphi}(\vartheta, t, x, \eta)) \in M\big)\ \&\ \big((\xi, \tilde{\varphi}(\xi, t, x, \eta)\big) \in S\ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[\big)\Big\}. \tag{5.13}$$

6. Метод итераций

Условимся о следующем достаточно традиционном определении: если X — непустое множество и $\alpha \in X^X$, то последовательность $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_o}\colon \mathbb{N}_o \longrightarrow X^X$ (степеней оператора α) определяем условиями $\big(\alpha^o(x) \stackrel{\triangle}{=} x\ \ \forall x \in X\big)\ \&\ (\alpha^{k+1} = \alpha \circ \alpha^k\ \ \forall k \in \mathbb{N}_o)$. Реализуем данное соглашение при $X = \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\alpha = \mathbb{A}[M]$, где $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ выступает в роли параметра. Итак, полагаем, что $W_k(M, N) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{A}[M]^k(N)\ \ \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall k \in \mathbb{N}_o$. Данное определение означает, что при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big(W_o(M, N) = N\big)\ \&\ \big(W_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](W_s(M, N))\ \ \forall s \in \mathbb{N}_o\big). \tag{6.1}$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что

$$W(M, N) \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}_o} W_k(M, N) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{6.2}$$

Согласно (5.5) $\forall M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall S_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall S_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1 \subset M_2)\ \&\ (S_1 \subset S_2)\big) \Longrightarrow \big(\mathbb{A}[M_1](S_1) \subset \mathbb{A}[M_2](S_2)\big). \tag{6.3}$$

В дальнейшем нам потребуется лишь тот случай, когда в (6.3) $M_1 \in \mathcal{F}$ и $M_2 \in \mathcal{F}$ (мы им и будем ограничиваться за редкими исключениями). Из (6.3) по индукции следует, что (см. (6.1)) $\forall M_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall M_2 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\big((M_1 \subset M_2)\ \&\ (N_1 \subset N_2)\big) \Longrightarrow \big(W_k(M_1, N_1) \subset W_k(M_2, N_2)\ \ \forall k \in \mathbb{N}_o\big). \tag{6.4}$$

В свою очередь, из (6.2) и (6.4) получаем следующее свойство: $\forall M_1 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall M_2 \in \mathcal{F}\ \ \forall N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \big((M_1 \subset M_2)\ \&\ (N_1 \subset N_2)\big) \Longrightarrow \big(W(M_1, N_1) \subset W(M_2, N_2)\big)$.

Далее из (6.1) и предложения 5.1 вытекает, что

$$W_s(M, N) \in \mathfrak{F}\ \ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall N \in \mathfrak{F}\quad \forall s \in \mathbb{N}_o. \tag{6.5}$$

В итоге из (6.2) и (6.5) получаем свойство $W(M, N) \in \mathfrak{F}\ \forall M \in \mathcal{F}\ \ \forall N \in \mathfrak{F}$.

Предложение 6.1. *Если* $M \in \mathcal{F}$ *и* $N \in \mathfrak{F}$, *то* $W(M, N) = \mathbb{A}[M]\big(W(M, N)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем сходимость $\big(W_k(M,N)\big)_{k\in\mathbb{N}}\downarrow W(M,N)$, а тогда из предложения 5.2 следует, что $\big(\mathbb{A}[M]\big(W_k(M,N)\big)\big)_{k\in\mathbb{N}}\downarrow \mathbb{A}[M]\big(W(M,N)\big)$. Как следствие

$$\mathbb{A}[M]\big(W(M,N)\big)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{A}[M]\big(W_k(M,N)\big)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}W_{k+1}(M,N)=W(M,N).$$

Предложение доказано.

Предложение 6.2. *Если* $M\in\mathcal{F},\ N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$ *и* $H\in\mathcal{P}(N)$, *то* $\big(H=\mathbb{A}[M](H)\big)\Longrightarrow\big(H\subset W(M,N)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (6.1)–(6.3).

Предложение 6.3. *Если* $M\in\mathcal{F},\ N\in\mathfrak{F}$ *и* $L\in\mathcal{P}(N)$, *то* $\big(W(M,N)\subset L\big)\Longrightarrow\big(W(M,N)=W(M,L)\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к комбинации (6.3) и предложения 6.1.

Предложение 6.4. *Если* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (N_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M\in\mathcal{F}$ *и* $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\big(((M_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow M)\,\&\,((N_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow N)\big)\Longrightarrow\big((W_k(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_k(M,N)\ \ \forall k\in\mathbb{N}_o\big). \tag{6.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (6.6). Тогда, в частности, $N\in\mathfrak{F}$ и (см. (6.1)) $\big(W_o(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_o(M,N)$. Пусть вообще число $m\in\mathbb{N}_o$ таково, что $\big(W_m(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_m(M,N)$. Тогда (см. (6.5), предложение 5.2) имеем сходимость

$$\big(\mathbb{A}[M_i](W_m(M_i,N_i))\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow \mathbb{A}[M](W_m(M,N)). \tag{6.7}$$

Из (6.1), (6.7) следует, что $\big(W_{m+1}(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_{m+1}(M,N)$. Поскольку выбор m был произвольным, имеем требуемое свойство $\big(W_k(M_i,N_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W_k(M,N)\ \ \forall k\in\mathbb{N}_o$.

Предложение доказано.

Теперь уже вполне очевидна следующая

Теорема 6.1. *Если* $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}},\ (N_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathfrak{F}^{\mathbb{N}},\ M\in\mathcal{F}$ *и* $N\in\mathcal{P}(T\times\mathbb{R}^n)$, *то*

$$\big(((M_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow M)\,\&\,((N_i)_{i\in\mathbb{N}}\downarrow N)\big)\Longrightarrow\big((W(M_i,N_i))_{i\in\mathbb{N}}\downarrow W(M,N)\big).$$

Теорема 6.1 означает, что отображение

$$(M,N)\longmapsto W(M,N)\colon \mathcal{F}\times\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{F} \tag{6.8}$$

секвенциально непрерывно сверху в любой точке своей области определения. Значения отображения (6.8) именуем МПП, что согласуется (см. [15, гл. IV]) с определениями [2; 3].

7. Инвариантность пространства относительно замкнутых множеств

В настоящем разделе фиксируем $M\in\mathcal{F}$ и $N\in\mathfrak{F}\setminus\{\varnothing\}$. Тогда

$$\mathbf{t}|_N=\{N\cap G\colon G\in\mathbf{t}\} \tag{7.1}$$

есть топология N, индуцированная [17, гл. 2] из $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$: $(N,\mathbf{t}|_N)$ является п/п $(T\times\mathbb{R}^n,\mathbf{t})$, и

$$\mathcal{F}|_N=\{N\cap F\colon F\in\mathcal{F}\}$$

является семейством всех п/м N, замкнутых в топологии (7.1). Заметим, что $\rho_N\overset{\triangle}{=}(\rho|\,N\times N)$ есть метрика N, порождающая топологию (7.1), а тогда

$$\mathrm{cl}(S,\mathbf{t}|_N)=\Big\{(t,x)\in N\mid\exists\,\big((t_i,x_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}\in S^{\mathbb{N}}\colon\big(\rho\big((t_i,x_i),(t,x)\big)\big)_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow 0\Big\}\quad\forall S\in\mathcal{P}(N). \tag{7.2}$$

Предложение 7.1. *Если* $F \in \mathcal{F}|_N$, *то* $\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}|_N$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть $F \in \mathcal{F}|_N$. Достаточно установить вложение

$$\mathrm{cl}\big(\mathbb{A}[M](F), \mathbf{t}|_N\big) \subset \mathbb{A}[M](F). \tag{7.3}$$

Фиксируем $(t_*, x_*) \in \mathrm{cl}\big(\mathbb{A}[M](F), \mathbf{t}|_N\big)$. Тогда $(t_*, x_*) \in N$ (см. (7.2)) и для некоторой последовательности $\big((t_*^{(i)}, x_*^{(i)})\big)_{i\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{A}[M](F)$ имеем сходимость $\big(\rho\big((t_*^{(i)}, x_*^{(i)}), (t_*, x_*)\big)\big)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$. В частности, $(t_*^{(j)}, x_*^{(j)}) \in F \ \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда по выбору F имеем из (7.2) свойство $(t_*, x_*) \in F$ и

$$\big(\forall m \in \mathbb{N} \ \exists j \in \overrightarrow{m, \infty}\colon t_*^{(j)} \leqslant t_*\big) \vee \big(\forall m \in \mathbb{N} \ \exists j \in \overrightarrow{m, \infty}\colon t_* < t_*^{(j)}\big). \tag{7.4}$$

Обе возможности в (7.4) по соображениям объема статьи рассмотрим в краткой форме.

1) Пусть $\forall m \in \mathbb{N} \ \exists j \in \overrightarrow{m, \infty}\colon t_*^{(j)} \leqslant t_*$. С учетом этого можно указать последовательность индексов $(j_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ со свойствами $(t_*^{(j_m)} \leqslant t_*) \,\&\, (m < j_m) \ \forall m \in \mathbb{N}$. Разумеется, при этом

$$\big((t_*^{(j_k)})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow t_*\big) \,\&\, \big((x_*^{(j_k)})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_*\big). \tag{7.5}$$

Далее используется (5.13). Пусть $\nu^o \in \mathcal{E}$, $\nu_o \in \mathcal{E}_{t_*}$ таково, что $\nu_o \triangleq (\nu^o|\,\mathcal{D}_{t_*})$. С учетом (счетной) аксиомы выбора имеем для некоторых последовательностей $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Pi[\nu^o]^{\mathbb{N}}$ и $(\vartheta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} [t_*^{(j_k)}, \vartheta_o]$ свойство:

$$\big((\vartheta_m, \tilde{\varphi}(\vartheta_m, t_*^{(j_m)}, x_*^{(j_m)}, \eta_m)) \in M\big) \,\&\, \big((t, \tilde{\varphi}(t, t_*^{(j_m)}, x_*^{(j_m)}, \eta_m)) \in F \ \forall t \in [t_*^{(j_m)}, \vartheta_m[\big) \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Пусть $\tilde{t}_*^{(k)} \triangleq t_*^{(j_k)}$ и $\tilde{x}_*^{(k)} \triangleq x_*^{(j_k)}$ при $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $(\tilde{t}_*^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \to t_*$ и $(\tilde{x}_*^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \to x_*$ в силу (7.5). Из (7.6) следует, что

$$\big((\vartheta_m, \tilde{\varphi}(\vartheta_m, \tilde{t}_*^{(m)}, \tilde{x}_*^{(m)}, \eta_m)) \in M\big) \,\&\, \big((t, \tilde{\varphi}(t, \tilde{t}_*^{(m)}, \tilde{x}_*^{(m)}, \eta_m)) \in F \ \forall t \in [\tilde{t}_*^{(m)}, \vartheta_m[\big). \tag{7.7}$$

С учетом компактности $\Pi[\nu^o]$ и T можно полагать без потери общности, что

$$\big((\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \tilde{\eta}\big) \,\&\, \big((\vartheta_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \tilde{\vartheta}\big), \tag{7.8}$$

где $\tilde{\eta} \in \Pi[\nu^o]$ и $\tilde{\vartheta} \in T$. Ясно, что $(\eta_k|\,\mathcal{C}_{t_*}) \in \Pi_{t_*}(\nu_o)$, а тогда (см. (7.8)) $(\tilde{\eta}|\,\mathcal{C}_{t_*}) \in \Pi_{t_*}(\nu_o)$, причем $\big((\eta_k|\,\mathcal{C}_{t_*})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ $*$-слабо сходится к $(\tilde{\eta}|\,\mathcal{C}_{t_*})$. Полагая при $k \in \mathbb{N}$, что $y_k \triangleq \tilde{\varphi}(\cdot, \tilde{t}_*^{(k)}, \tilde{x}_*^{(k)}, \eta_k)$, имеем, что (см. (4.10)) $(y_k|\,[t_*, \vartheta_o]) = \varphi\big(\cdot, t_*, y^{(k)}, (\eta_k|\,\mathcal{C}_{t_*})\big)$, где $y^{(k)} \triangleq y_k(t_*)$. Легко видеть (см. (7.8)), что $\tilde{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_o]$ и для некоторого $a \in]0, \infty[$ имеем $\|\tilde{x}_*^{(k)}\| \leqslant a \ \forall k \in \mathbb{N}$. С учетом этого нетрудно показать, используя (4.11), что $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \to x_*$, а потому

$$\big(\varphi\big(\cdot, t_*, y^{(k)}, (\eta_k|\,\mathcal{C}_{t_*})\big)\big)_{k\in\mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi\big(\cdot, t_*, x_*, (\tilde{\eta}|\,\mathcal{C}_{t_*})\big). \tag{7.9}$$

Учитывая (7.7)–(7.9), устанавливаем, что

$$\big((\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}(\tilde{\vartheta}, t_*, x_*, \tilde{\eta})) \in M\big) \,\&\, \big((t, \tilde{\varphi}(t, t_*, x_*, \tilde{\eta})) \in F \ \forall t \in [t_*, \tilde{\vartheta}[\big) \tag{7.10}$$

(отдельно рассматриваются случаи $\tilde{\vartheta} = t_*$ и $t_* < \tilde{\vartheta}$). Поскольку выбор ν^o был произвольным, установлено (см. (7.10)), что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$ в рассматриваемом сейчас случае 1).

2) Случай, когда имеет место вторая возможность в (7.4), исследуется подобными рассуждениями с одной особенностью: программные движения, стартующие из позиций вида (t^*, x^*), где $t^* > t_*$, продолжаются константой x^* до вектор-функций из $C_n([t_*, \vartheta_o])$. Для полученных склеек прореженной должным образом последовательности обобщенных траекторий сопоставляется соответствующий равномерный предел, который в силу условия обобщенной единственности оказывается обобщенной траекторией (скользящим режимом). Опуская подробности, имеем и в случае 2) $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$, чем завершается проверка (7.3).

Предложение доказано.

Предложение 7.2. *Справедливо следующее свойство относительной замкнутости:* $W_k(M,N) \in \mathcal{F}|_N \;\; \forall k \in \mathbb{N}_o$.

Д о к а з а т е л ь с т в о получается комбинацией (6.1) и предложения 7.1. Из (6.2) следует

Теорема 7.1. *Множество* $W(M,N)$ *замкнуто в топологии* (7.1): $W(M,N) \in \mathcal{F}|_N$.

Полагаем дополнительно (см. (5.4)) до конца настоящего раздела, что $N \in \mathcal{F}$, т. е. N замкнуто в топологии $\mathbf{t}$. Итак, пусть N есть непустое замкнутое в $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{F}|_N \subset \mathcal{F}$, а потому из предложения 7.2 следует, что $W_k(M,N) \in \mathcal{F} \;\; \forall k \in \mathbb{N}_o$. В свою очередь, из теоремы 7.1 имеем важное свойство замкнутости МПП:

$$W(M,N) \in \mathcal{F}. \tag{7.11}$$

Заметим, что свойство (7.11) для случая “липшицевой” по x системы (3.1) было установлено при доказательстве теоремы об альтернативе (см. [2; 3]).

8. Топологические свойства множеств позиционного поглощения, 1

Вернемся к отображению (6.8), свойства которого будем рассматривать в “точках” (M,N), $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $N \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$. Используя (5.1), полагаем $\rho\langle z; H\rangle \triangleq \inf\big(\{\rho(z,h) \colon h \in H\}\big) \;\; \forall H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n) \;\; \forall z \in T \times \mathbb{R}$ (введено расстояние от точки до множества). Тогда имеем, что $S_o(F,\varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho\langle z; F\rangle \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall \varepsilon \in [0,\infty[$. Легко видеть, что при $F \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ в виде $\big(S_o(F,1/k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ реализуется последовательность в $\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ со свойством

$$\big(S_o(F,1/k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow F. \tag{8.1}$$

Поэтому из теоремы 6.1 получаем (см. (8.1)), что $\forall M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall N \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$

$$\big(W(S_o(M,1/k), S_o(N,1/k))\big)_{k \in \mathbb{N}} \downarrow W(M,N). \tag{8.2}$$

Мы называем УПЗМ $(M,N) \in (\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}) \times (\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})$ *регулярно ограниченной*, если $W(M,N) \neq \varnothing$ и $\exists\, \varepsilon \in]0,\infty[\;\; \exists \mathbf{d} \in]0,\infty[\colon \|x\| \leqslant \mathbf{d} \;\; \forall (t,x) \in W(S_o(M,\varepsilon), S_o(N,\varepsilon))$. Заметим, что условие регулярной ограниченности зачастую допускает непосредственную проверку в терминах МПИ, т. е. в терминах (6.1). Условие $W(M,N) \neq \varnothing$ всегда имеет место при $M \cap N \neq \varnothing$ (см. разд. 5). С учетом теоремы 6.1 достаточно просто устанавливается (см. (5.4), (8.2)) следующая

Теорема 8.1. *Если* $(M,N) \in (\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}) \times (\mathcal{F} \setminus \{\varnothing\})$ *есть регулярно ограниченная* УПЗМ, *то* $\forall \varepsilon \in]0,\infty[\;\; \exists\, \delta \in]0,\infty[\;\; \forall \widetilde{M} \in \mathcal{F} \;\; \forall \widetilde{N} \in \mathcal{F}$

$$\big((M \subset \widetilde{M} \subset S_o(M,\delta))\,\&\,(N \subset \widetilde{N} \subset S_o(N,\delta))\big) \Longrightarrow \big(W(M,N) \subset W(\widetilde{M},\widetilde{N}) \subset S_o(W(M,N),\varepsilon)\big).$$

Итак, зависимость (6.8) обладает свойством, имеющим смысл непрерывности сверху в каждой точке области определения, являющейся регулярно ограниченной УПЗМ.

З а м е ч а н и е 8.1. Зависимость (6.8) не обладает, вообще говоря, непрерывностью в естественном смысле даже в “точках”, являющихся регулярно ограниченными УПЗМ. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = (1-t)u + v, \quad |u| \leqslant 2, \quad |v| \leqslant 1$$

при $t_o = 0$ и $\vartheta_o = 1$. Итак, $n = 1$, $T = [0,1]$. Полагаем (в примере) $N = T \times \mathbb{R}$, $M_c = \{1\} \times [-c,c]$ при $c \in [0,\infty[$ (рассматриваем задачу с фиксированным моментом окончания). Напомним конкретизации некоторых понятий [15, гл. V, § 1], связанных с задачей на минимакс-максимин функционала $x(\cdot) \mapsto |x(1)|$, где $x(\cdot) \in C(T)$. Здесь

$$\varepsilon^o(t,x) = \varepsilon(t,x) = |x| + t(1-t) \ \ \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}, \tag{8.3}$$

$$h(t) = t(1-t) \ \ \forall t \in T,$$

$$\mathbf{c}_o(t,x) = \sup\bigl(\{\varepsilon^o(t,x);\ \max_{t \leqslant \tau \leqslant 1} h(\tau)\}\bigr) \quad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}$$

($\mathbf{c}_o$ определяет [15, теорема 5.1.1] цену игры на минимакс-максимин упомянутого терминального функционала в классе чистых позиционных стратегий [2]). Тогда при $c \geqslant 0$

$$W(M_c, N) = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R} \mid \mathbf{c}_o(t,x) \leqslant c\} \tag{8.4}$$

(множество Лебега функции цены). Имеем при $\theta \in [0, 1/2]$, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} h(t) = \max_{\theta \leqslant t \leqslant 1} h(t) = 1/4.$$

Получаем при $t \in [0, 1/2]$ и $x \in \mathbb{R}$, что $\varepsilon^o(t,x) \leqslant |x| + 1/4$ и

$$\mathbf{c}_o(t,x) = \sup\bigl(\{\varepsilon^o(t,x); 1/4\}\bigr). \tag{8.5}$$

Если же $t \in [1/2, 1]$, то $h(t) \geqslant h(\tau)\ \ \forall \tau \in [t, 1]$. Поэтому $\mathbf{c}_o(t,x) = \varepsilon^o(t,x)\ \ \forall (t,x) \in [1/2, 1] \times \mathbb{R}$. Пусть $c \in [0, 1/4[$. Тогда в силу (8.4), (8.5)

$$([0, 1/2[\times \mathbb{R}) \cap W(M_c, N) = \varnothing. \tag{8.6}$$

Если же $c \in [1/4, \infty[$, то с учетом (8.3), (8.5) получаем, что

$$[0, 1/2] \times \{0\} \subset W(M_c, N) \tag{8.7}$$

(из (8.3) имеем, что $\varepsilon^o(t, 0) = h(t) \leqslant 1/4$, если $t \in [0, 1/2]$). Итак (см. (8.6), (8.7)), зависимость

$$c \longmapsto W(M_c, N)\colon [0, 1/4] \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R})$$

имеет в точке 1/4 скачок (при приближении к 1/4 снизу). Заметим, что $\varnothing \neq M_c \subset W(M_c, N)$ при $c \geqslant 0$, а УПЗМ $(M_c, N) = (M_c, T \times \mathbb{R})$ регулярно ограничена. Зависимость (6.8) не обладает, следовательно, непрерывностью в точке $(M_c, T \times \mathbb{R})$ при $c = 1/4$, хотя согласно теореме 8.1 и является непрерывной сверху.

9. Топологические свойства множеств позиционного поглощения, 2

В настоящем разделе фиксируем множества $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, что соответствует общей схеме исследования (см. теорему 6.1). Условимся о некоторых обозначениях. Так, при $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем, что $(\|\cdot\| - \inf)[H](x) \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\|x - h\| \colon h \in H\})$. С учетом этого введем при $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in [0, \infty[$ множество

$$B_n^o(L, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[L](x) \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n). \tag{9.1}$$

Если $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что $\mathrm{Supp}(\Lambda) \stackrel{\triangle}{=} \{t \in T \mid \Lambda\langle t\rangle \neq \varnothing\}$ (см. (5.2)). При $t \in \mathrm{Supp}(\Lambda)$ имеем $\Lambda\langle t\rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, и согласно (9.1) определено $B_n^o(\Lambda\langle t\rangle, \varepsilon) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, где $\varepsilon \in [0, \infty[$. Тогда $\forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)\ \ \forall \varepsilon \in [0, \infty[$

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \bigl\{(t,x) \in \mathrm{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^o(H\langle t\rangle, \varepsilon)\bigr\} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \tag{9.2}$$

При этом $H \subset \mathbb{S}(H, \varepsilon)$, если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Кроме того, отметим следующее свойство: если $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in [0, \infty[$, то

$$\big(\mathbb{S}(\mathbb{H}, \varepsilon)\langle t\rangle = B_n^o(\mathbb{H}\langle t\rangle, \varepsilon) \;\; \forall t \in \mathrm{Supp}(\mathbb{H})\big) \,\&\, \big(\mathbb{S}(\mathbb{H}, \varepsilon)\langle t\rangle = \varnothing \;\; \forall t \in T \setminus \mathrm{Supp}(\mathbb{H})\big).$$

С учетом (9.1) получаем теперь, что $\mathbb{S}(H, \varepsilon) \in \mathfrak{F} \;\; \forall H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n) \;\; \forall \varepsilon \in [0, \infty[$. В частности, $\mathbb{S}(F, \varepsilon) \in \mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall F \in \mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall \varepsilon \in [0, \infty[$. Возвращаясь к МПП, отметим, что

$$\mathbb{S}(W(M, N), \varepsilon) \in \mathfrak{F} \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[\tag{9.3}$$

(заметим с учетом (9.2), что $\mathbb{S}(\varnothing, \varepsilon) = \varnothing \;\; \forall \varepsilon \in [0, \infty[$).

Предложение 9.1. *Пусть* $M \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$, $N \in \mathfrak{F}$ *и* $t_* \in \mathrm{Supp}\big(W(M, N)\big)$. *Пусть, кроме того,*

$$\exists\, \kappa \in]0, \infty[\quad \exists \mathbf{d} \in]0, \infty[\colon \|x\| \leqslant \mathbf{d} \quad \forall x \in W\big(S_o(M, \kappa), \mathbb{S}(N, \kappa)\big)\langle t_*\rangle. \tag{9.4}$$

Тогда $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\;\; \exists\, \delta \in]0, \infty[\;\; \forall \widetilde{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall \widetilde{N} \in \mathfrak{F}$

$$\big((M \subset \widetilde{M} \subset S_o(M, \delta)) \,\&\, (N \subset \widetilde{N} \subset \mathbb{S}(N, \delta))\big) \implies$$

$$\big(W(M, N)\langle t_*\rangle \subset W(\widetilde{M}, \widetilde{N})\langle t_*\rangle \subset B_n^o(W(M, N)\langle t_*\rangle, \varepsilon)\big).$$

Доказательство извлекается из теоремы 6.1 с учетом (8.1), (9.3) и (9.4). Предложение 9.1 подобно в смысловом отношении теореме 8.1 и характеризует свойство непрерывности сверху сечений МПП во многих практически интересных случаях. Наиболее существенным представляется вариант, для которого $t_* = t_o$.

10. Многозначные квазистратегии и множества позиционного поглощения

В настоящем разделе будет показано, что МПП исчерпывает множество позиций, для которых задача наведения разрешима в классе идеализированных процедур управления — многозначных квазистратегий. Заметим, что реализуемые процедуры управления с поводырем [2], позволяющие "отслеживать" траектории, порождаемые упомянутыми квазистратегиями, рассматривались в [24]. Сами квазистратегии определяем, следуя [8], в виде м/ф на пространствах мер. Используем при этом конструкции разд. 4. Если $t_* \in T$, то

$$\widetilde{A}_{t_*} \overset{\triangle}{=} \Big\{\alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \;\; \forall \theta \in [t_*, \vartheta_o] \;\; ([\nu_1; \theta\rangle = [\nu_2; \theta\rangle) \implies$$
$$\big(\{[\eta; \theta)\colon \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{[\eta; \theta)\colon \eta \in \alpha(\nu_2)\}\big)\Big\}. \tag{10.1}$$

Элементы (10.1) называем *квазистратегиями* на отрезке $[t_*, \vartheta_o]$. При этом

$$\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \overset{\triangle}{=} \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}_t) \;\; \forall t \in T \;\; \forall \alpha \in \widetilde{A}_t. \tag{10.2}$$

Среди всех квазистратегий выделяем те, у которых множества вида (10.2) $*$-слабо замкнуты. В этой связи введем при $t \in T$ семейство $\mathcal{F}_t^*$ всех (секвенциально) $*$-слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_t$. Тогда $\widetilde{A}_t^{\Pi} \overset{\triangle}{=} \{\alpha \in \widetilde{A}_t \mid \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \in \mathcal{F}_t^*\} \;\; \forall t \in T$. Отметим, что как легко видеть, $\Pi_t(\cdot) = (\Pi_t(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \widetilde{A}_t^{\Pi} \;\; \forall t \in T$. Поэтому при $t_* \in T$ имеем, что $\varnothing \neq \widetilde{A}_{t_*}^{\Pi} \subset \widetilde{A}_{t_*}$; элементы $\widetilde{A}_{t_*}^{\Pi}$ называем *квазипрограммами* на отрезке $[t_*, \vartheta_o]$.

Предложение 10.1. *Если* $t \in T$, $\alpha \in \widetilde{A}_t$, $\nu \in \mathcal{E}_t$, $\eta \in \alpha(\nu)$ *и* $\theta \in [t, \vartheta_o]$, *то*

$$\big(\{\bar{\eta} \in \Pi_\theta(\bar{\nu}) \mid \eta \perp \bar{\eta} \in \alpha(\nu \bowtie \bar{\nu})\}\big)_{\bar{\nu} \in \mathcal{E}_\theta} \in \widetilde{A}_\theta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о фактически следует из (10.1) и определений разд. 4 (см. (4.5)–(4.7)).

Фиксируем в данном разделе $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Полагаем далее, что

$$\mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \overset{\triangle}{=} \Big\{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \ \ ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \implies \\ (\{\xi \in [t, \vartheta[\, \mid (\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \notin N\} \neq \varnothing)\Big\} \ \ \forall (t,x) \in N. \tag{10.3}$$

Предложение 10.2. *Если* $k \in \mathbb{N}_o$, $(t,x) \in N \setminus W_k(M,N)$ *и* $\alpha \in \widetilde{A}_t$, *то*

$$\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \varnothing. \tag{10.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение

$$\mathfrak{N} \overset{\triangle}{=} \Big\{k \in \mathbb{N}_o \mid \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \varnothing \ \ \forall (t,x) \in N \setminus W_k(M,N) \ \ \forall \alpha \in \widetilde{A}_t\Big\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_o). \tag{10.5}$$

Поскольку (см. (6.1)) $N = W_k(M,N)|_{k=0}$, имеем из (10.5), что $0 \in \mathfrak{N}$. Пусть вообще $m \in \mathfrak{N}$. Тогда $m \in \mathbb{N}_o$ и согласно (10.5)

$$\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \varnothing \quad \forall (t,x) \in N \setminus W_m(M,N) \ \ \forall \alpha \in \widetilde{A}_t. \tag{10.6}$$

Выберем произвольно $(t_*, x_*) \in N \setminus W_{m+1}(M,N)$. Опуская очевидный (см. (10.6)) случай $(t_*, x_*) \notin W_m(M,N)$, ограничимся рассмотрением ситуации, когда

$$(t_*, x_*) \in W_m(M,N) \setminus W_{m+1}(M,N). \tag{10.7}$$

С учетом (5.5) и (6.1) получаем, что для некоторой меры $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$ реализуется свойство: $\forall \eta \in \Pi_{t_*}(\nu_*)$ $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M\big) \Longrightarrow \big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta[: \, (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \notin W_m(M,N)\big). \tag{10.8}$$

Покажем теперь, что

$$\widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) \neq \varnothing \quad \forall \alpha \in \widetilde{A}_{t_*}. \tag{10.9}$$

Действительно, допустим противное. Пусть $\alpha_o \in \widetilde{A}_{t_*}$ обладает свойством

$$\widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \varnothing. \tag{10.10}$$

Заметим в связи с (10.10), что $\alpha_o \in \prod\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'\big(\Pi_{t_*}(\nu)\big)$ и, следовательно, α_o есть м/ф из $\mathcal{E}_{t_*}$ в $\mathcal{H}_{t_*}$ с непустыми значениями. В частности, $\alpha_o(\nu_*) \neq \varnothing$ и $\alpha_o(\nu_*) \subset \Pi_{t_*}(\nu_*)$. Выберем и зафиксируем $\eta_o \in \alpha_o(\nu_*)$. Согласно (10.8) $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M\big) \Longrightarrow \big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta[: \, (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o)) \notin W_m(M,N)\big). \tag{10.11}$$

С другой стороны, $\eta_o \in \widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o)$, а потому в силу (10.10) $\eta_o \notin \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*)$. В этом случае для некоторого $\vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M\big) \,\&\, \big(\{\xi \in [t_*, \vartheta[\, \mid (\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \eta_o)) \notin N\} = \varnothing\big). \tag{10.12}$$

Во всяком случае, $\Theta \overset{\triangle}{=} \{\vartheta \in [t_*, \vartheta_o] \mid (\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M\} \neq \varnothing$ и, в силу замкнутости M, имеем, что $\bar{\vartheta} \overset{\triangle}{=} \inf(\Theta) \in \Theta$, а тогда $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_o]$ и при этом (см. (10.12))

$$\big((\bar{\vartheta}, \varphi(\bar{\vartheta}, t_*, x_*, \eta_o)) \in M\big) \,\&\, \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o)) \in N \ \ \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[\big). \tag{10.13}$$

С учетом (10.11) и (10.13) имеем для некоторого $t^* \in [t_*, \bar{\vartheta}[$ свойство

$$(t^*, x^*) \in N \setminus W_m(M, N), \tag{10.14}$$

где $x^* = \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_o)$. Согласно предложению 10.1

$$\alpha^o \triangleq \big(\{\eta \in \Pi_{t^*}(\nu) \mid \eta_o \perp \eta \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu)\}\big)_{\nu \in \mathcal{E}_{t^*}} \in \widetilde{A}_{t^*}. \tag{10.15}$$

Тогда имеем, в частности, что непременно $\alpha^o \in \prod\limits_{\nu \in \mathcal{E}_{t^*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t^*}(\nu))$, а потому α^o есть м/ф из $\mathcal{E}_{t^*}$ в $\mathcal{H}_{t^*}$. При этом согласно (10.15)

$$\alpha^o(\nu) = \{\eta \in \Pi_{t^*}(\nu) \mid \eta_o \perp \eta \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu)\} \ \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t^*}. \tag{10.16}$$

Из (10.6), (10.14) и (10.15) получаем, что $\widetilde{\Pi}_{t^*}(\alpha^o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t^*, x^*) \neq \varnothing$. С учетом этого выберем $\eta^o \in \widetilde{\Pi}_{t^*}(\alpha^o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t^*, x^*)$. Тогда для некоторого $\nu^o \in \mathcal{E}_{t^*}$ имеем, что $\eta^o \in \alpha^o(\nu^o)$, а потому $\eta^o \in \Pi_{t^*}(\nu^o)$ и, в частности, $\eta^o \in \mathcal{H}_{t^*}$. При этом (см. (10.16))

$$\eta^{oo} \triangleq \eta_o \perp \eta^o \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu^o). \tag{10.17}$$

Заметим, что согласно (4.12), (4.13)

$$\begin{gathered}(\varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o) \ \ \forall t \in [t_*, t^*])\ \& \\ (\varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(t, t^*, x^*, \eta^o) \ \ \forall t \in [t^*, \vartheta_o]).\end{gathered} \tag{10.18}$$

По выбору $\bar{\vartheta}$ имеем, что $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$ $((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M) \Longrightarrow (\bar{\vartheta} \leqslant \vartheta)$. С другой стороны, по выбору η^o получаем, что $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta, \varphi(\vartheta, t^*, x^*, \eta^o)) \in M\big) \Longrightarrow \big(\{t \in [t^*, \vartheta[\, \mid (t, \varphi(t, t^*, x^*, \eta^o)) \notin N\} \neq \varnothing\big). \tag{10.19}$$

Выберем произвольно $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$, для которого $(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo})) \in M$. Тогда (см. (10.18)) по выбору t^* и определению $\bar{\vartheta}$ имеем, что $\vartheta^* \in]t^*, \vartheta_o]$. При этом в силу (10.18) $\varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(\vartheta^*, t^*, x^*, \eta^o)$, а тогда для некоторого $t^\natural \in [t^*, \vartheta^*[$ из (10.19) следует, что $(t^\natural, \varphi(t^\natural, t^*, x^*, \eta^o)) \notin N$. Но тогда $(t^\natural, \varphi(t^\natural, t_*, x_*, \eta^{oo})) \notin N$. Установлена импликация

$$\big((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo})) \in M\big) \Longrightarrow \big(\exists\, t \in [t_*, \vartheta^*[\colon (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo})) \notin N\big).$$

Поскольку выбор ϑ^* был произвольным, получаем, что $\eta^{oo} \in \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*)$. Вместе с тем $\nu_* \bowtie \nu^o \in \mathcal{E}_{t_*}$, а потому (см. (10.17)) $\eta^{oo} \in \widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o)$ и вопреки (10.10) $\widetilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) \neq \varnothing$. Противоречие показывает, что на самом деле имеет место (10.9) и при условии (10.7), чем завершается обоснование свойства $\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t, x) \neq \varnothing \ \ \forall (t, x) \in N \setminus W_{m+1}(M, N) \ \ \forall \alpha \in \widetilde{A}_t$. В силу (10.5) имеем, что $m + 1 \in \mathfrak{N}$. Получили, что $(0 \in \mathfrak{N})\,\&\,(k + 1 \in \mathfrak{N} \ \ \forall k \in \mathfrak{N})$. В итоге $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_o$; (10.4) справедливо для всех $k \in \mathbb{N}_o$, $(t, x) \in N \setminus W_k(M, N)$ и $\alpha \in \widetilde{A}_t$.

Предложение доказано.

Следствие 10.1. *Если $(t, x) \in N \setminus W(M, N)$ и $\alpha \in \widetilde{A}_t$, то $\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t, x) \neq \varnothing$.*

При условии $(t, x) \in N$ полагаем далее, что

$$\begin{gathered}\mathcal{S}_{M,N}(t, x) \triangleq \Big\{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \exists\, \theta \in [t, \vartheta_o]\colon \big((\theta, \varphi(\theta, t, x, \eta)) \in M\big)\ \& \\ \big((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \ \ \forall \xi \in [t, \theta[\big)\Big\}.\end{gathered} \tag{10.20}$$

Легко видеть, что (см. (10.3), (10.20)) справедливо следующее свойство: $\forall (t_*, x_*) \in N$

$$\big(\mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \varnothing\big)\ \&\ \big(\mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*) \cup \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \mathcal{H}_{t_*}\big). \tag{10.21}$$

Если $(t,x) \in N$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$, то полагаем, что

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu | \, M, N\rangle \overset{\triangle}{=} \Big\{\eta \in \Pi_t(\nu) \mid \exists\, \vartheta \in [t, \vartheta_o]\colon ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M)\, \& \\ ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in W(M,N) \ \ \forall \xi \in [t, \vartheta[)\Big\}. \qquad (10.22)$$

Теперь посредством (10.22) определяем следующие м/ф:

$$\pi^{(W)}_{t,x}\langle \cdot | \, M, N\rangle \overset{\triangle}{=} (\pi^{(W)}_{t,x}\langle \nu | \, M, N\rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_t} \mathcal{P}\big(\Pi_t(\nu)\big) \ \ \forall (t,x) \in N. \qquad (10.23)$$

Предложение 10.3. *Если $(t_*, x_*) \in W(M,N)$, то $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot |, M, N\rangle \in \widetilde{A}^{\Pi}_{t_*}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(t_*, x_*) \in W(M,N)$. Тогда $(t_*, x_*) \in N$ и посредством (10.22), (10.23) определена м/ф $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | \, M, N\rangle$. С учетом предложения 6.1 имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](W(M,N))$. Поэтому (см. (5.5)) $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu | \, M, N\rangle \neq \varnothing \ \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}$. Как следствие

$$\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | \, M, N\rangle \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'\big(\Pi_{t_*}(\nu)\big).$$

Выберем произвольно $\nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*}, \ \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $t^* \in [t_*, \vartheta_o]$. Пусть при этом

$$[\nu_1; t^*\rangle = [\nu_2; t^*\rangle. \qquad (10.24)$$

Покажем, что

$$\big\{[\eta; t^*)\colon \eta \in \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu_1 | \, M, N\rangle\big\} \subset \big\{[\eta; t^*)\colon \eta \in \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu_2 | \, M, N\rangle\big\}. \qquad (10.25)$$

Обозначим для краткости множества в левой и правой частях (10.17) через $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ соответственно. Пусть $\gamma_1 \in \mathbf{H}_1$, а $\eta_1 \in \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu_1 | \, M, N\rangle$ обладает свойством $\gamma_1 = [\eta_1; t^*)$. Тогда $\gamma_1(C) = \eta_1(C)$ при $C \in \mathcal{C}^{(t^*)}_{t_*}$. С другой стороны, из (10.22) имеем для некоторого $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta_1)) \in M\big)\, \& \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1)) \in W(M,N) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta^*[\big). \qquad (10.26)$$

Отдельно рассмотрим случаи $\vartheta^* \leqslant t^*$ и $t^* < \vartheta^*$.

1) Пусть $\vartheta^* \leqslant t^*$, т. е. $\vartheta^* \in [t_*, t^*]$. Для $\bar{\nu}_2 \overset{\triangle}{=} (\nu_2 | \, \mathcal{D}_{t^*}) \in \mathcal{E}_{t^*}$ имеем, что $\Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2) \neq \varnothing$. Выберем произвольно $\bar{\eta}_2 \in \Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2)$. Тогда $\eta_1 \perp \bar{\eta}_2 \in \Pi_{t_*}(\nu_2)$ (учитываем (10.24)) и, как легко видеть,

$$\gamma_1 = [\eta_1 \perp \bar{\eta}_2; t^*). \qquad (10.27)$$

С учетом этого имеем из (4.12), что

$$\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2) \quad \forall t \in [t_*, t^*]. \qquad (10.28)$$

В частности, из (10.26), (10.28) получаем следующие свойства:

$$\big((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2)) \in M\big)\, \& \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2)) \in W(M,N) \ \ \forall t \in [t_*, \vartheta^*[\big)$$

(учитываем, что $[t_*, \vartheta^*] \subset [t_*, t^*]$). Это означает, что $\eta_1 \perp \bar{\eta}_2 \in \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu_2 | \, M, N\rangle$, откуда (см. (10.27)) легко следует, что $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$ в случае 1). Итак, $(\vartheta^* \leqslant t^*) \Rightarrow (\gamma_1 \in \mathbf{H}_2)$.

2) Пусть $t^* < \vartheta^*$. Полагая $x^* \overset{\triangle}{=} \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_1)$, имеем в силу (10.26), что $(t^*, x^*) \in W(M,N)$. Поэтому (см. предложение 6.1) $(t^*, x^*) \in \mathbb{A}[M]\big(W(M,N)\big)$. Тогда, в частности, имеем для

$\bar{\nu}_2 = (\nu_2 | \mathcal{D}_{t^*})$ (см. случай 1), где введено данное обозначение), что при некотором выборе $\eta^\natural \in \Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2)$ и $\vartheta^\natural \in [t^*, \vartheta_o]$

$$\big((\vartheta^\natural, \varphi(\vartheta^\natural, t^*, x^*, \eta^\natural)) \in M\big) \,\&\, \big((\xi, \varphi(\xi, t^*, x^*, \eta^\natural)) \in W(M,N) \;\; \forall \xi \in [t^*, \vartheta^\natural[\big). \tag{10.29}$$

При этом $\eta_2 \overset{\triangle}{=} \eta_1 \perp \eta^\natural \in \mathcal{H}_{t_*}$. С учетом (10.24) имеем $\eta_2 \in \Pi_{t_*}(\nu_2)$ и, кроме того,

$$\begin{gathered}\big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) \;\; \forall t \in [t_*, t^*]\big) \,\&\\ \big(\varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) = \varphi(t, t^*, x^*, \eta^\natural) \;\; \forall t \in [t^*, \vartheta_o]\big).\end{gathered} \tag{10.30}$$

Из (10.26), (10.29) и (10.30) вытекает, что $\big((\vartheta^\natural, \varphi(\vartheta^\natural, t_*, x_*, \eta_2)) \in M\big) \,\&\, \big((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2)) \in W(M,N) \;\forall t \in [t_*, \vartheta^\natural[\big)$. В итоге $\eta_2 \in \pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \nu_2 | \, M, N\rangle$, а потому $[\eta_2; t^*) \in \mathbf{H}_2$. Однако, $\gamma_1 = [\eta_2; t^*)$ и, стало быть, $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$ и в случае 2). Итак, $(t^* < \vartheta^*) \Rightarrow (\gamma_1 \in \mathbf{H}_2)$. Получили, что во всех возможных случаях $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$, чем и завершается проверка (10.25). Поскольку выбор ν_1, ν_2 и t^* был произвольным, установлено (см. (10.1)), что $\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | \, M, N\rangle \in \widetilde{A}_{t_*}$; $*$-слабая замкнутость $\widetilde{\Pi}_{t_*}(\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | \, M, N\rangle)$ следует в силу замкнутости M и сечений $W(M,N)$ гиперплоскостями $t = \mathrm{const}$.

Предложение доказано.

Следствие 10.2. *Если* $(t_*, x_*) \in W(M,N)$, *то* $\widetilde{\Pi}_{t_*}(\pi^{(W)}_{t_*,x_*}\langle \cdot | \, M, N\rangle) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*)$.

Доказательство непосредственно следует из (6.1), (6.2) и (10.20).

Теорема 10.1. *Справедлива цепочка равенств* $W(M,N) = \{(t,x) \in N \mid \exists\, \alpha \in \widetilde{A}_t \colon \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\} = \{(t,x) \in N \mid \exists\, \alpha \in \widetilde{A}^{\Pi}_t \colon \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t,x)\}$.

Доказательство получается комбинацией предложений 10.2, 10.3, следствия 10.2 и (10.21).

Итак, установлено, что (в общем случае $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$) $W(M,N)$ исчерпывает множество всех позиций из N, для которых задача наведения на M в пределах N разрешима a) в классе квазистратегий (игрока I) и b) в классе квазипрограмм. Конкретный вид разрешающей квазипрограммы указан в предложении 10.3 и в следствии 10.2. В связи с реализацией упомянутого идеального решения в классе процедур управления с поводырем (см. [2]) отметим работу [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
4. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения, I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 2. С. 3–18.
5. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 3. С. 22–42.
6. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
7. **Красовский Н. Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
8. **Ченцов А. Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
9. **Ченцов А. Г.** К игровой задаче наведения // Докд. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
10. **Ченцов А. Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.

11. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
12. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
13. **Nardzewski C. R.** A theory of pursuit and evasion // Adv. in game theory. Ann. Math. Studies, 1964. P. 113–127.
14. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3, № 3. P. 153–163.
15. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
16. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
18. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 с.
19. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
20. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79. 103 с.
21. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 351 с.
22. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
23. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2008. 389 с.
24. **Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.** О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНИТИ, № 1729-80, 1979. 72 с.

Ченцов Александр Георгиевич Поступила 7.12.2015
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru