ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 518.6

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

М. Ю. Хачай, Р. Д. Дубинин

Задача об оптимальной маршрутизации с ограничением на грузоподъемность транспортных средств (CVRP) является одной из классических задач комбинаторной оптимизации и обладает широким спектром приложений в исследовании операций. Поскольку задача CVRP NP-трудна и сохраняет труднорешаемость, даже будучи сформулированной в конечномерном евклидовом пространстве, традиционно особое внимание уделяется вопросам ее аппроксимируемости. Большая часть известных результатов в области приближенных алгоритмов и полиномиальных приближенных схем для данной задачи получены для ее частной постановки на евклидовой плоскости. В данной работе показывается, что подход, предложенный М. Хаймовичем и А. Ринноем Каном в 1985 г. для разработки полиномиальных приближенных схем для планарной задачи с единственным складом, успешно может быть применен и в более общем случае, например, в пространствах произвольной фиксированной размерности и при произвольном числе складов.

Ключевые слова: оптимальная маршрутизация, CVRP, аппроксимируемость, EPTAS.

M. Yu. Khachai, R. D. Dubinin. Approximability of the optimal routing problem in finite-dimensional Euclidean spaces.

The capacitated vehicle routing problem (CVRP) is a classical combinatorial optimization problem with a wide range of applications in operations research. Since the CVRP is NP-hard even in a finite-dimensional Euclidean space, special attention is traditionally paid to the issues of its approximability. A major part of the known results concerning approximation algorithms and polynomial-time approximation schemes (PTAS) for this problem are obtained for its particular instance on the Euclidean plane. In the present paper we show that the approach to the development of a PTAS in the planar problem with a single depot proposed by Haimovich and Rinnooy Kan in 1985 can be effectively applied in a more general case, for example, in spaces of arbitrary fixed dimension and for an arbitrary number of depots.

Keywords: optimal routing, CVRP, approximability, EPTAS.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-292-303

Введение

В статье изучаются вопросы эффективной аппроксимируемости комбинаторной задачи об оптимальной маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP) [15], описывающей одну из активно разрабатываемых моделей исследования операций. По-видимому, впервые задача об оптимальной маршрутизации транспорта была введена в работе Г. Данцига и Дж. Рамсера [5] при построении наиболее экономичного плана снабжения горючим сети бензо-заправочных станций.

В простейшей постановке задача VRP состоит в следующем: заданы n-элементное множество пунктов обслуживания (*клиентов, clients*), выделенный пункт, именуемый *складом, depot*, и транспортные издержки, возникающие при перевозках из одного пункта в другой. Требуется указать наиболее экономичный набор маршрутов, начинающихся и заканчивающихся на складе и посещающих в совокупности каждого из клиентов в точности один раз. Известен широкий круг модификаций этой базовой постановки (см., [12;15]), связанных, например, с увеличением

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00109).

числа складов, учетом неоднородности спроса различных клиентов, а также дополнительными ограничениями на грузоподъемность, количество транспортных средств, время поставок и т. п.

В работе рассматривается модификация задачи, в которой объем спроса клиентов полагается одинаковым, а *грузоподъемность* (*capacity*) транспортных средств ограничена сверху значением параметра q. В литературе данная задача известна [8] как Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP).

Сложностной статус этой задачи определяется ее близким родством с известными труднорешаемыми задачами комбинаторной оптимизации. Так, задача коммивояжера (TSP) является частным случаем CVRP при условии, что склад совпадает с одним из пунктов обслуживания и $q \geqslant n$. Как известно [13], задача TSP NP-трудна и остается таковой даже на евклидовой плоскости, поэтому аналогичным свойством обладает и задача VRP. Почти все известные ее модификации (за исключением, быть может, CVRP с грузоподъемностью $q \leqslant 2$) сохраняют свойство труднорешаемости (см., например, [12]), даже будучи сформулированными в конечномерных евклидовых пространствах.

По этой причине большая часть работ, посвященных CVRP, связана с разработкой приближенных алгоритмов и эвристик. Известно [2], что в метрической постановке CVRP APX-полна (т. е. наличие у нее полиномиальной приближенной схемы влечет равенство $P = NP$) при произвольном фиксированном $q \geqslant 3$. Позитивные результаты в области аппроксимируемости задачи CVRP в основном опираются на эвристику *итерированного разбиения маршрутов* (ITP), предложенную в работе М. Хаймовича и А. Ринноя Кана [8], и известную полиномиальную приближенную схему (PTAS), разработанную С. Аророй [1] для задачи коммивояжера на плоскости. Так, в статье [8] обоснована первая полиномиальная приближенная схема для CVRP с одним складом. В работе [2] была предложена полиномиальная схема с лучшей оценкой трудоемкости для $q = O(\log n/\log\log n)$. Там же показано, что полиномиальная схема С. Ароры для TSP порождает PTAS для CVRP при $q = \Omega(n)$. В недавней работе [6] обоснована квазиполиномиальная приближенная схема для этой задачи. Предложенный авторами алгоритм для произвольного $\varepsilon > 0$ находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи CVRP с одним складом при произвольном q за время $n^{(\log n)^{O(1/\varepsilon)}}$. Авторами статьи [3] результаты [2; 8] распространены на случай произвольного фиксированного числа складов. В работе [14] разработаны полиномиальные приближенные схемы для CVRP с ограничениями на время поставки.

Приведенный выше краткий обзор, ни в коей мере не претендуя на полноту изложения, дает некоторое представление об интенсивности исследований, посвященных аппроксимации задачи CVRP на плоскости. Перечисленные результаты позволяют прийти к выводу о том, что задача CVRP в $\mathbb{R}^2$ и ее модификации, сохраняя труднорешаемость, как правило, эффективно аппроксимируемы, обладая полиномиальными приближенными схемами.

Однако, об аппроксимируемости задачи в евклидовых пространствах большей размерности, по нашим сведениям, известно существенно меньше. В работе [11] результаты, полученные в [8] для CVRP с одним складом, распространены на случай трехмерного евклидова пространства.

В данной статье мы приводим обобщение результатов [11] на случай, когда число складов m и размерность пространства $d \geqslant 2$ принимают произвольные фиксированные значения.

1. Постановки задач

Зададимся необходимыми обозначениями.

1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество клиентов, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество складов. Через $G^0(X \cup Y, E, w)$ обозначим полный взвешенный орграф, совместно с порогом грузоподъемности $q \in \mathbb{N}$ задающий условие задачи CVRP. Весовая функция w определяет транспортные издержки, связанные с перевозками из одной вершины в другую. Полагаем ее неотрицательнозначной и симметричной. *Стоимостью* произвольного маршрута R назовем сумму стои-

мостей входящих в него дуг и договоримся обозначать ее через $w(R)$. Наряду с графом G^0 договоримся рассматривать его подграф $G = G^0\langle X\rangle$, индуцированный долей X.

2. Каждому клиенту x_i сопоставим число $r_i = \min\{w(y_j, x_i)\colon j = 1,\ldots,m\}$, определяющее наименьшие транспортные издержки по прямым перевозкам в пункт обслуживания x_i. Разрешая неоднозначность произвольным образом, зададимся разбиением $X_1 \cup \ldots \cup X_m = X$ множества клиентов на подмножества

$$X_j = \{x \in X\colon r_i = w(x, y_j)\}, \tag{1.1}$$

каждое из которых состоит из клиентов, ассоциированных со складом y_j из соображений минимизации транспортных издержек.

3. Каждый допустимый маршрут имеет вид $y_{j_s}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, y_{j_f}$, где y_{j_s} и y_{j_f} — (необязательно различные) склады, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ — попарно различные пункты обслуживания, посещаемые данным маршрутом, и $t \leqslant q$.

Если $m = 1$, задача CVRP называется Single Depot Capacitated Vehicle Routing Problem (SDCVRP). Все допустимые маршруты при этом условии являются простыми контурами.

Если $m > 1$, задачу называют Multiple Depot CVRP и различают две ее частные постановки. В первой (договоримся обозначать ее MDCVRP1) каждый маршрут волен начинаться и заканчиваться на произвольных складах $y_{j_s}, y_{j_f} \in Y$. Во второй (MDCVRP2), напротив, допустимыми являются лишь те маршруты, в которых начальный и конечный склады совпадают $(y_{j_s} = y_{j_f})$.

В любой из перечисленных выше постановок задача CVRP состоит в том, чтобы для заданного взвешенного орграфа $G^0(X \cup Y, E, w)$ и числа q указать набор допустимых маршрутов наименьшей суммарной стоимости VRP*, посещающих каждого клиента в точности один раз.

Ниже мы рассмотрим аппроксимируемость каждой из этих постановок. Как обычно, договоримся называть задачу CVRP *метрической*, если весовая функция w удовлетворяет *неравенству треугольника*, т. е. для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in X \cup Y$ справедливо соотношение $w(z_1, z_2) \leqslant w(z_1, z_3) + w(z_3, z_2)$, и *евклидовой*, если $X \cup Y \subset \mathbb{R}^d$ и $w(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_2$.

2. Задача SDCVRP

Воспользуемся традиционным подходом к построению приближенных алгоритмов для задачи CVRP, опирающимся на сведение ее к подходящей задаче коммивояжера.

А л г о р и т м 1. Эвристика ITP [8].

Input: полный взвешенный орграф $G^0(X \cup \{y\}, E, w)$ порядка n, натуральное число q и выделенный гамильтонов контур H графа G.

Output: допустимое решение S_{ITP} задачи SDCVRP.

for all $x \in H$ **do**
  начиная с вершины x, разбить контур H на $l = \lceil n/q\rceil$ цепей, каждая из которых кроме, может быть, одной состоит из q вершин;
  соединив концевые вершины цепей со складом y, построить набор $S(x)$, состоящий из l контуров;
end for
выдать набор $S_{\mathrm{ITP}} = \arg\min\{w(S(x))\colon x \in H\}$.

Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений, доказанных в работе [8] для случая евклидовой плоскости. Для полноты изложения мы также приводим их с доказательствами, тем более что в большинстве своем они справедливы при гораздо более общих условиях.

Лемма 2.1. *Для* $\bar{r} = 1/n \sum_{i=1}^{n} r_i$ *справедливо соотношение*

$$w(S_{\mathrm{ITP}}) \leqslant 2\lceil n/q \rceil\, \bar{r} + \Big(1 - \frac{\lceil n/q \rceil}{n}\Big) w(H) \leqslant 2\lceil n/q \rceil\, \bar{r} + (1 - 1/q) w(H). \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко убедиться, что для контура H число вхождений произвольной дуги (x_{i_1}, x_{i_2}) в решения $S(x_1), \ldots, S(x_n)$, перебираемые на основном цикле алгоритма 1, составит $n-l$, при том, что l раз она будет заменена парой дуг (y, x_{i_1}) и (x_{i_2}, y) стоимости r_{i_1} и r_{i_2} соответственно. Следовательно, суммарная стоимость W этих решений определяется равенством

$$W = \sum_{j=1}^{n} w(S(x_j)) = 2l \sum_{i=1}^{n} r_i + (n-l) w(H).$$

Справедливость утверждения леммы следует из очевидной оценки $R_{\mathrm{ITP}}(X) \leqslant W/n$ и соотношения $l = \lceil n/q \rceil \geqslant n/q$.

Заметим, что лемма 2.1 верна для наиболее общей постановки задачи SDCVRP. В метрическом случае может быть получена и нижняя оценка стоимости произвольного допустимого решения S задачи в терминах порождаемого им гамильтонова контура (графа G). В самом деле, пусть S состоит из контуров $C_1, \ldots, C_t$. Исключив из каждого из них вершину y и произвольным образом соединив получившиеся цепи, построим гамильтонов контур H_S.

Лемма 2.2. *Справедлива оценка*

$$w(S) \geqslant \max\{2n\bar{r}/q, w(H_S)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, оценка $w(S) \geqslant w(H_S)$ непосредственно следует из неравенства треугольника. Пусть далее $X(C_1), \ldots, X(C_t)$ — разбиение множества X, порождаемое контурами $C_1, \ldots, C_t$. Воспользовавшись снова неравенством треугольника и проведя несложные преобразования

$$w(S) \geqslant \sum_{j=1}^{t} 2 \max_{x_i \in X(C_j)} r_i \geqslant 2 \sum_{j=1}^{l} \frac{\sum_{x_i \in X(C_j)} r_i}{|X(C_j)|} \geqslant 2 \sum_{j=1}^{t} \frac{\sum_{x_i \in X(C_j)} r_i}{q} = 2n\bar{r}/q,$$

завершаем доказательство леммы.

Следующая теорема позволяет сопоставить оптимальное значение $\mathrm{VRP}^*(X, y)$ метрической задачи SDCVRP для графа G^0 и оптимум задачи коммивояжера $\mathrm{TSP}^*(X)$ для графа G.

Теорема 2.1. *Справедливы соотношения*

$$\min\{2\bar{r}n/q, \mathrm{TSP}^*(X)\} \leqslant \mathrm{VRP}^*(X, \{y\}) \leqslant 2\lceil n/q \rceil \bar{r} + (1 - 1/q)\, \mathrm{TSP}^*(X).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Верхняя оценка непосредственно следует из леммы 2.1. В самом деле, произвольному гамильтонову контуру H^* стоимости $w(H^*) = \mathrm{TSP}^*$ в графе G алгоритм 1 сопоставляет допустимое решение S_{ITP} исходной задачи SDCVRP, вес $w(S_{\mathrm{ITP}})$ которого одновременно удовлетворяет неравенству $\mathrm{VRP}^* \leqslant w(S_{\mathrm{ITP}})$ и соотношению (2.1) при подстановке $H = H^*$.

С другой стороны, пусть S^* — оптимальное решение задачи SDCVRP. По лемме 2.2

$$\mathrm{VRP}^*(X, \{y\}) = w(S^*) \geqslant \max\{2\bar{r}n/q, w(H_{S^*})\} \geqslant \max\{2\bar{r}n/q, \mathrm{TSP}^*(X)\}. \tag{2.2}$$

Теорема доказана.

Приведенные выше утверждения позволяют оценить точность приближенного алгоритма, получаемого для метрической задачи SDCVRP комбинацией произвольного приближенного алгоритма для задачи коммивояжера и эвристики ITP. В самом деле, допустим алгоритм 1 применяется к гамильтонову контуру H в графе G, стоимость которого удовлетворяет соотношению $\mathrm{TSP}^* \leqslant w(H) \leqslant \rho\mathrm{TSP}^*$ для некоторого $\rho \geqslant 1$. Комбинируя соотношения (2.1) и (2.2), для веса $w(S)$ результирующего решения имеем

$$\frac{w(S)}{\mathrm{VRP}^*(X,\{y\})} \leqslant \frac{2\lceil n/q\rceil\,\bar r + (1-1/q)\,\rho\,\mathrm{TSP}^*(X)}{\max\{2\bar r n/q, \mathrm{TSP}^*(X)\}} \leqslant (n+q)/n + (1-1/q)\rho \leqslant q/n + 1 + \rho. \quad (2.3)$$

При условии $q = o(n)$ правая часть соотношения (2.3) стремится к $1+\rho$, т. е. произвольный ρ-приближенный алгоритм для метрической задачи коммивояжера порождает асимптотически $(1+\rho)$-приближенный алгоритм для метрической задачи SDCVRP.

Поскольку трудоемкость ITP оценивается сверху $O(n^2)$, суммарная трудоемкость базирующегося на ней приближенного алгоритма определяется временной сложностью приближенного алгоритма для задачи TSP. Например, известный 3/2-приближенный алгоритм Н. Кристофидеса [4] с трудоемкостью $O(n^3)$ порождает асимптотически 5/2-приближенный алгоритм с такой же верхней оценкой временной сложности, а известная PTAS С. Ароры [1] для задачи TSP в произвольном евклидовом пространстве фиксированной размерности d порождает для произвольного $c > 0$ асимптотически $(2+1/c)$-приближенный алгоритм с верхней оценкой трудоемкости $O(n(\log n)^{(O(\sqrt{d}c))^{d-1}})$.

В работе [8] предложена PTAS (Алгоритм 2) для задачи SDCVRP на плоскости. Ниже мы распространим этот результат на случай евклидового пространства произвольной фиксированной размерности $d > 1$.

А л г о р и т м 2. Комбинированная схема CITP.

Input: полный взвешенный граф $G^0(X\cup\{y\}, E, w)$ порядка n, натуральное число q и верхняя оценка относительной погрешности $\varepsilon > 0$.

Output: допустимое решение S_{CITP} задачи SDCVRP.

1: упорядочить клиентов по убыванию расстояний до склада $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$;
2: задаться значением параметра $k = k(\varepsilon)$, определяющим разбиение множества X на подмножества $X(k) = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ *внешних* и $X \setminus X(k)$ *внутренних* клиентов (конкретный вид зависимости k от ε будет определен позже);
3: найти точное решение $S^*(X(k))$ задачи SDCVRP для подграфа $G^0\langle X(k)\cup\{y\}\rangle$;
4: применив алгоритм 1, построить приближенное решение $S_{\mathrm{ITP}}(X\setminus X(k))$ задачи для подграфа $G^0\langle X\setminus X(k)\cup\{y\}\rangle$;
5: положить $S_{\mathrm{CITP}} = S^*(X(k)) \cup S_{\mathrm{ITP}}(X\setminus X(k))$.

Лемма 2.3. *Для произвольного* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{VRP}^*(X,\{y\}) \leqslant \mathrm{VRP}^*(X(k),\{y\}) + \mathrm{VRP}^*(X\setminus X(k),\{y\}) \leqslant \mathrm{VRP}^*(X,\{y\}) + 4(k-1)r_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нижняя оценка очевидна, остановимся на обосновании верхней. Пусть S^* — произвольное оптимальное решение задачи SDCVRP для всего множества клиентов X, C — произвольный входящий в него контур, посещающий вершины, входящие в подмножество $X(k)$, и $B(y, r_k)$ — шар радиуса r_k с центром в точке y. Соединив вершины контура C (в порядке их обхода) отрезками геодезических линий, получим замкнутую кривую. Точками пересечения с границей $B(y, r_k)$ построим разбиение этой кривой на внутренние и внешние сегменты. Соединив концы каждого внешнего сегмента с точкой y и друг с другом геодезическими линиями, получим набор замкнутых кривых, порождающих семейство маршрутов в графе G, каждый из которых посещает либо вершины из $X(k)$, либо вершины из его дополнения. Легко видеть, что общая длина этих маршрутов превышает длину исходного не более, чем на $4r_k$. Применив аналогичное преобразование ко всем маршрутам решения S^*, построим допустимые решения S_1 и S_2 для подграфов $G^0\left\langle X(k)\cup\{y\}\right\rangle$ и $G^0\left\langle X\setminus X(k)\cup\{y\}\right\rangle$ соответственно. Общее число таких внешних сегментов не превосходит $k-1$, так как $|X(k)|=k-1$. Следовательно,

$$\mathrm{VRP}^*(X(k),\{y\})+\mathrm{VRP}^*(X\setminus X(k),\{y\})\leqslant w(S_1)+w(S_2)\leqslant w(S^*)+4(k-1)r_k.$$

Лемма доказана.

Заметим, что лемма 2.3 верна в произвольном метрическом пространстве. Все последующие результаты данного раздела существенно опираются на геометрию конечномерного евклидового пространства. В частности, нам потребуется условие существования ε-сети на поверхности единичной евклидовой сферы S^{d-1} (см., например, [9, Lemma 3.1]) относительно традиционного углового расстояния $\mathrm{dist}(x,y)=\arccos(x,y)$. Здесь и всюду ниже полагаем $d>1$.

Как обычно, для произвольного $\varepsilon>0$ подмножество $N\subset S^{d-1}$ называем *ε-сетью* (на сфере S^{s-1}), если для произвольной точки $x\in S^{d-1}$ найдется такой элемент $\xi=\xi(x)\in N$, что $\mathrm{dist}(x,\xi)\leqslant\varepsilon$.

Лемма 2.4. *Для произвольного $h\in(0,h_0)$, $h_0=\pi/(6\sqrt{d-1})$, на сфере S^{d-1} существует $h\sqrt{d-1}$-сеть $N=N(d,h)$ мощности $|N|=Ch^{-(d-1)}$ для некоторой константы $C=C(d)$.*

Лемма 2.4 позволит нам получить верхнюю оценку длины оптимального маршрута коммивояжера $\mathrm{TSP}^*(X)$ при условии, что множество вершин $X=\{x_1,\dots,r_n\}$ является подмножеством шара $B(y,R)\subset\mathbb{R}^d$ радиуса R с центром в точке y. По-прежнему полагаем точки множества X упорядоченными по убыванию расстояния r_i до центра y, в нашем случае $r_i=\|x_i-y\|_2$.

Лемма 2.5. *Для произвольного $d>1$ и конечного подмножества $X\subset B(y,R)$ справедлива оценка*

$$\mathrm{TSP}^*(X)\leqslant\begin{cases} C_1R^{1/d}\big(\sum\limits_{i=1}^n r_i\big)^{(d-1)/d}, & \textit{если } \sum\limits_{i=1}^n r_i>RC(\pi/6)^{-d}(d-1)^{(d+1)/2},\\ C_2R & \textit{в противном случае,}\end{cases}$$

где $C_1=2dC^{1/d}(d-1)^{(d-1)/2d}$ и $C_2=2dC(\pi/6)^{-(d-1)}(d-1)^{(d-1)/2}$.

Доказательство. По лемме 2.4 для произвольного $h\in(0,h_0)$, $h_0=\pi/(6\sqrt{d-1})$, на поверхности шара $B(y,R)$ существует конечная $h\sqrt{d-1}$-сеть N мощности $Ch^{-(d-1)}$. Соединим каждую точку $\xi_j\in N$ радиальным отрезком с центром шара y, после чего опустим из каждой точки x_i перпендикуляр на ближайший к ней отрезок $[y,\xi_j]$. Маршрут коммивояжера построим стандартным методом удвоения ребер получившегося дерева. Обозначив через $\Phi(h)$ длину построенного маршрута, имеем по лемме 2.4

$$\mathrm{TSP}^*(X)\leqslant\Phi(h)=2h\sqrt{d-1}\sum_{i=1}^n r_i+2RCh^{-(d-1)}. \tag{2.4}$$

Приведенные в условии леммы оценки получаем минимизацией правой части соотношения (2.4) при условии $0<h<\pi/(6\sqrt{d-1})$.

В самом деле, точная нижняя грань функции Φ на данном интервале совпадает либо со значением в нуле ее производной $h_{\min}=\left(\dfrac{RC}{\sum\limits_{i=1}^n r_i}\sqrt{d-1}\right)^{1/d}$, если $h_{\min}<h_0$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^n r_i>RC(d-1)^{(d+1)/2}(\pi/6)^{-d}$, либо со значением в самой точке h_0.

В первом случае

$$\min_{0<h<h_0} \Phi(h) = \Phi(h_{\min}) = 2\left(\frac{RC}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\sqrt{d-1}\right)^{1/d} \sqrt{d-1}\sum_{i=1}^{n} r_i + 2RC\left(\frac{RC}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\sqrt{d-1}\right)^{-(d-1)/d}$$

$$= \underbrace{2dC^{1/d}(d-1)^{-(d-1)/(2d)}}_{C_1} R^{1/d}\big(\sum_{i=1}^{n} r_i\big)^{(d-1)/d}.$$

Во втором случае, эквивалентном выполнению неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leqslant RC(d-1)^{(d+1)/2}(\pi/6)^{-d}, \tag{2.5}$$

имеем

$$\Phi(h_0) = 2\sqrt{d-1}\frac{\pi}{6\sqrt{d-1}}\sum_{i=1}^{n} r_i + 2RC\left(\frac{\pi}{6}\right)^{d-1}(\sqrt{d-1})^{(d-1)}.$$

Применяя оценку (2.5), получим

$$\Phi(h_0) \leqslant \frac{\pi}{3}RC(d-1)^{(d+1)/2}\big(\frac{\pi}{6}\big)^{-d} + 2RC\big(\frac{\pi}{6}\big)^{-(d-1)}(d-1)^{(d-1)/2}$$
$$= RC\big(\frac{\pi}{6}\big)^{-d}\big(\frac{\pi}{3}(d-1) + 2\,\frac{\pi}{6}\big)(d-1)^{(d-1)/2} = \underbrace{2Cd\big(\frac{\pi}{6}\big)^{-(d-1)}(d-1)^{(d-1)/2}}_{C_2} R.$$

Лемма доказана.

Пусть условие задачи SDCVRP задано в d-мерном евклидовом пространстве для некоторого $d > 1$. Оценим сверху относительную погрешность решения

$$e(k) = \frac{w(S_{\mathrm{CITP}}(X)) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)} = \frac{\mathrm{VRP}^*(X(k)) + w(S_{\mathrm{ITP}}(X \setminus X(k))) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)},$$

получаемого алгоритмом 2, использующим для решения внутренней задачи коммивояжера ρ-приближенный алгоритм.

Лемма 2.6. *Для произвольных $\rho \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $e(k) \leqslant \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись леммами 2.1–2.3 и введя обозначение $\bar r_k = \sum\limits_{i=k}^{n} r_i/(n-k+1)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$e(k) = \frac{\mathrm{VRP}^*(X(k)) + \mathrm{VRP}^*(X\setminus X(k)) - \mathrm{VRP}^*(X) + w(S_{\mathrm{ITP}}(X\setminus X(k))) - \mathrm{VRP}^*(X\setminus X(k))}{\mathrm{VRP}^*(X)}$$
$$\leqslant \frac{4(k-1)r_k + 2\lceil (n-k+1)/q\rceil \bar r_k + \rho\mathrm{TSP}^*(X\setminus X(k)) - 2\bar r_k(n-k+1)/q}{2n\bar r/q}$$
$$\leqslant q(2k-1)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\rho}{2\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\mathrm{TSP}^*(X\setminus X(k)).$$

Оценив правую часть последнего неравенства по лемме 2.5, получим

$$e(k) \leqslant q(2k-1)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\rho}{2}\max\left\{C_1\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/d}, C_2\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right\}$$
$$\leqslant q(2k-1)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\rho}{2}\max\{C_1, C_2\}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/d}$$

в силу очевидного соотношения $r_k \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$.

Пусть далее $s_k = (r_k / \sum\limits_{i=1}^{n} r_i)^{1/d}$. Предположим, что для произвольного $t \in \{1, \ldots, k\}$ справедливо неравенство

$$q(2t-1)s_t^d + \frac{q\rho}{2} C^* s_t > \varepsilon, \tag{2.6}$$

где $C^* = \max\{C_1, C_2\}$ и зависит только от размерности пространства d.

Возможны две альтернативы. В первом случае $s_t \geqslant \varepsilon/(q\rho\, C^*)$ при каждом t. Но тогда

$$1 \geqslant \sum_{t=1}^{k} s_t^d \geqslant k \Big(\frac{\varepsilon}{q\rho\, C^*}\Big)^d.$$

Следовательно,

$$k \leqslant \Big(\frac{q\rho\, C^*}{\varepsilon}\Big)^d. \tag{2.7}$$

Рассмотрим второй случай. Пусть t_0 — наименьший номер, для которого $s_{t_0} < \varepsilon/(q\rho\, C^*)$. По построению аналогичное неравенство справедливо и для произвольного $t_0 \leqslant t \leqslant k$. Следовательно, $s_t^d > \varepsilon/(2q(2t-1))$ в силу соотношения (2.6). Объединяя оценки, получим

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \sum_{t=1}^{k} s_t^d \geqslant (t_0 - 1)\Big(\frac{\varepsilon}{q\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \sum_{t=t_0}^{k} \frac{1}{2t-1} \geqslant (t_0 - 1)\Big(\frac{\varepsilon}{q\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \int\limits_{t_0}^{k+1} \frac{dt}{2t-1} \\ \geqslant (t_0 - 1)\Big(\frac{\varepsilon}{q\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{4q}\big(\ln(2k+1) - \ln(2t_0 - 1)\big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Без ограничения общности полагаем ниже $\varepsilon \leqslant 4q\rho$, что в совокупности с очевидным (при $d > 1$) соотношением $C^* \geqslant 4$ влечет справедливость неравенства $(\varepsilon/q\rho\, C^*)^d \leqslant \varepsilon/4q$, откуда

$$\Big(\frac{\varepsilon}{q\rho\, C^*}\Big)^{-d} \geqslant t_0 - 1 + \ln(2k+1) - \ln(2t_0 - 1). \tag{2.9}$$

Учитывая исходное допущение $t_0 \in \{1, \ldots, k\}$ и то, что правая часть соотношения (2.9) достигает безусловного минимума при $t_0 = 1/2$, имеем $k \leqslant (1/2)\, e^{(\frac{q\rho\, C^*}{\varepsilon})^d}$. Сравнивая полученную оценку с (2.7), приходим к выводу, что в отрезке

$$\Big[1, \frac{1}{2} e^{\left(\frac{q\rho\, C^*}{\varepsilon}\right)^d} + 1\Big] \tag{2.10}$$

гарантированно содержится искомый номер $k = k(\varepsilon)$.

Лемма доказана.

Резюмируем проведенные рассуждения.

Теорема 2.2. *Пусть для решения внутренней задачи коммивояжера используется ρ-приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(n^c)$. Тогда алгоритм 2 является эффективной полиномиальной приближенной схемой* (EPTAS) *для задачи* SDCVRP *при произвольных фиксированных q, $\rho \geqslant 1$ и $d \geqslant 2$.*

Доказательство. В самом деле, зафиксировав произвольный $\varepsilon > 0$, найдем $k(\varepsilon)$. Точное решение $S^*(X(k(\varepsilon))$ может быть найдено методом динамического программирования за время $O(K^q 2^K)$ (см., например, [3]), где K совпадает с правой границей отрезка (2.10). Поскольку время работы оставшейся части алгоритма 2 составляет $O(n^c) + O(n^2)$, то его суммарная трудоемкость при произвольном ε ограничена сверху полиномом от n, порядок и все коэффициенты которого, кроме свободного члена, не зависят от ε.

Теорема доказана.

Замечание. Алгоритм 2 остается полиномиальной приближенной схемой для задачи SDCVRP и при более слабых ограничениях на ее параметры, например, при фиксированных d, ρ и $q = O((\log\log(n))^{1/d})$.

3. PTAS для задачи MDCVRP

Результаты предыдущего раздела, касающиеся обоснования полиномиальной приближенной схемы, могут быть распространены и на случай задачи CVRP с несколькими складами при помощи несложной технической модификации. Идея такого обобщения (для случая евклидовой плоскости) впервые была опубликована в работе [3] и состоит в разбиении множества клиентов согласно соотношению (1.1), последующей декомпозиции исходной задачи (вне зависимости, рассматривается ли она в постановке MDCVRP1 или MDCVRP2) и в применении эвристики ITP к каждому из подмножеств $X_j \setminus X(k) \cup \{y_j\}$ в отдельности.

Опишем кратко соответствующие построения.

А л г о р и т м 3. Комбинированная схема CITP (случай нескольких складов).

Input: полный взвешенный граф $G^0(X \cup Y, E, w)$ порядка n, натуральное число q и верхняя оценка относительной погрешности $\varepsilon > 0$.

Output: допустимое решение S_{CITP} задачи MDCVRP.

1: упорядочить клиентов по убыванию расстояний $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$ до множества Y;

2: задать значение параметра $k = k(\varepsilon)$, определяющее разбиение множества X на подмножества $X(k) = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ *внешних* и $X \setminus X(k)$ *внутренних* клиентов;

3: найти точное решение $S^*(X(k))$ задачи MDCVRP, задаваемой подграфом $G^0 \langle X(k) \cup Y \rangle$;

4: применив алгоритм 1, построить приближенное решение $S_{\mathrm{ITP}}(X_j \setminus X(k))$ для каждого подграфа $G^0 \langle X_j \setminus X(k) \cup Y \rangle$;

5: положить $S_{\mathrm{CITP}} = S^*(X(k)) \cup S_{\mathrm{ITP}}(X_1 \setminus X(k)) \cup \ldots \cup S_{\mathrm{ITP}}(X_m \setminus X(k))$.

В самом деле, заметим, что большая часть утверждений предыдущего раздела может быть применена к MDCVRP практически без изменения. Например, нетрудно убедиться, что для задачи MDCVRP1 справедлив буквальный аналог леммы 2.3, получаемый заменой $\{y\}$ на Y.

Остановимся лишь на тех утверждениях, обоснование которых требует дополнительного пояснения. По аналогии с предыдущим разделом введем обозначение относительной погрешности

$$e(k) = \frac{w(S_{\mathrm{CITP}}(X)) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)} = \frac{\mathrm{VRP}^*(X(k)) + \sum\limits_{j=1}^{m} w(S_{\mathrm{ITP}}(X_j \setminus X(k))) - \mathrm{VRP}^*(X)}{\mathrm{VRP}^*(X)}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *В задаче* MDCVRP1 *для произвольных* $m > 1$*,* $\rho \geqslant 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *такой, что* $e(k) \leqslant \varepsilon$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X'_j = X_j \setminus X(k)$, $n_j = |X'_j|$ и $\bar{r}_{jk} = \sum\limits_{x_i \in X'_j} r_i / n_j$. Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 2.6, имеем

$$e(k) \leqslant \frac{4(k-1)r_k + \sum\limits_{j=1}^{m} (2\lceil n_j/q \rceil \bar{r}_{jk} + \rho \mathrm{TSP}^*(X'_j) - 2\bar{r}_{jk} n_j / q)}{2n\bar{r}/q}$$

$$\leqslant q(2k-2+m)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\rho}{2\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{TSP}^*(X'_j) \leqslant q(2k-2+m)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/d}.$$

Предположив, что для произвольного $t \in \{1, \ldots, k\}$

$$q(2t-2+m)\frac{r_t}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_t}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/d} > \varepsilon \tag{3.2}$$

и одновременно

$$s_t^d = \frac{r_t}{\sum\limits_{i=1}^n r_i} \geqslant \Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d, \tag{3.3}$$

получим оценку $k \leqslant \Big(\dfrac{mq\rho\, C^*}{\varepsilon}\Big)^d$, родственную соотношению (2.7). Если же система (3.2) не влечет (3.3) и t_0 — первый номер, для которого справедливо противоположное неравенство, то по аналогии с (2.8) имеем

$$\begin{aligned}1 \geqslant \sum_{t=1}^k s_t^d \geqslant (t_0-1)\Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{2q}\sum_{t=t_0}^k \frac{1}{2t-2+m} \geqslant (t_0-1)\Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{2q}\int\limits_{t_0}^{k+1} \frac{dt}{2t-2+m} \\ \geqslant (t_0-1)\Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d + \frac{\varepsilon}{4q}\big(\ln(2k+m) - \ln(2t_0-2+m)\big) \\ \geqslant \Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d\big((t_0-1) + (\ln(2k+m) - \ln(2t_0-2+m))\big) \geqslant \Big(\frac{\varepsilon}{mq\rho\, C^*}\Big)^d \ln\Big(\frac{2k+m}{m}\Big),\end{aligned}$$

откуда $k \leqslant (m/2)\, e^{(\frac{mq\rho\, C^*}{\varepsilon})^d}$, и, следовательно, отрезок

$$\Big[1, \frac{m}{2}e^{(\frac{mq\rho\, C^*}{\varepsilon})^d} + 1\Big] \tag{3.4}$$

заведомо содержит искомый номер $k(\varepsilon)$.

Лемма доказана.

Для обоснования того, что алгоритм 3 является EPTAS и для MDCVRP2, нам потребуется модификация леммы 2.3, доказанная в работе [3].

Лемма 3.2. *В задаче* MDCVRP2 *для произвольного* $k \in \{1, \dots, n\}$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{VRP}^*(X, Y) \leqslant \mathrm{VRP}^*(X(k), Y) + \mathrm{VRP}^*(X \setminus X(k), Y) \leqslant \mathrm{VRP}^*(X, Y) + 2(q-1)(k-1)r_k.$$

Доказательство. Для обоснования верхней оценки используется иной (по отношению к лемме 2.3) способ модификации маршрутов произвольного оптимального решения S^* исходной задачи. Каждый маршрут C, составляющий такое решение S^* и посещающий элементы $X(k)$, заменяется подходящим маршрутом, получаемым из C исключением всех внутренних клиентов. Организуем посещение каждого исключенного клиента в отдельности, добавив для каждого в результирующее решение кратчайший индивидуальный маршрут. Таким образом, стоимость описанного преобразования для маршрута C не превысит $2(q-1)r_k$.

Справедливость леммы следует из условия $|X(k)| = k - 1$.

Лемма 3.3. *В задаче* MDCVRP2 *для произвольных* $m > 1$, $\rho \geqslant 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется номер* $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *такой, что* $e(k) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Оценивая правую часть соотношения (3.1) в соответствии с утверждением леммы 3.2, получим оценку

$$e(k) \leqslant \frac{q((q-1)k+m)}{2}\, \frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i}\right)^{1/d} \leqslant \frac{q^2(k+m)}{2}\, \frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^n r_i}\right)^{1/d}.$$

Буквально повторяя ход рассуждений, проведенных ранее в доказательствах лемм 2.6 и 3.1, убеждаемся в том, что для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ в отрезке

$$\Big[1, (m+1)e^{(\frac{mq\rho\, C^*}{\varepsilon})^d}\Big] \tag{3.5}$$

заведомо найдется номер $k = k(\varepsilon)$, для которого $e(k) \leqslant \varepsilon$.

Лемма доказана.

Повторяя схему доказательства теоремы 2.2 и опираясь на леммы 3.1 и 3.2, нетрудно обосновать следующую завершающую теорему.

Теорема 3.1. *В условиях теоремы* 2.2 *и произвольных фиксированных* $m, d > 1$, $\rho \geqslant 1$ *и* q *алгоритм* 3 *является* EPTAS *для задач* MDCVRP1 *и* MDCVRP2, *трудоемкость которой для произвольного* $\varepsilon > 0$ *составляет* $O(n^c + n^2 + mK^q 2^K)$, *где* $K = K(\varepsilon)$ *совпадает с правой границей отрезков* (3.4) *и* (3.5) *соответственно.*

Заключение

В работе исследовано семейство приближенных алгоритмов для решения задач CVRP с одним или несколькими складами, порождаемое известной схемой комбинирования методов точного решения подзадач и эвристики итерированного разбиения маршрутов (ITP) М. Хаймовича и А. Ринноя Кана.

Несмотря на давнюю известность этой схемы, большинство базирующихся на ней результатов не выходит за пределы евклидовой плоскости. Применение другого известного утверждения, описывающего геометрическую структуру конечных ε-сетей на сфере S^{d-1} (лемма 2.4), по-видимому, впервые позволило обобщить эти результаты на случай евклидовых пространств произвольной фиксированной размерности $d > 1$.

Фактически в работе показано, что алгоритмы 2 и 3 в сопряжении с произвольным полиномиальным приближенным алгоритмом фиксированной точности для задачи TSP порождают эффективные полиномиальные приближенные схемы (EPTAS) для задач SDCVRP и MDCVRP. Более того, найденные оценки трудоемкости сохраняют полиномиальность по nи при использовании для внутренней задачи TSP алгоритмов с несколько худшими оценками точности ($O(\log\log n)^{1/d}$), но, возможно, существенно лучшей производительностью, что может оказаться полезным при работе с *большими данными.*

Для расширения диапазона допустимых значений q, при которых трудоемкость сохраняет свойство полиномиальности, можно попытаться использовать для аппроксимации задачи CVRP последние результаты в области цикловых покрытий графа (см., например, [7; 10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
2. Covering points in the plane by k-tours: a polynomial approximation scheme for fixed k / T. Asano, N. Katoh, H. Tamaki, T. Tokuyama. Tokyo: IBM Tokyo Research Laboratory Research, 1996. Report RT0162.
3. A PTAS for the multiple depot vehicle routing problem / S. Cardon, S. Dommers, C. Eksin, R. Sitters, A. Stougie, L Stougie. Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology. Tech. Rep. No. 2008.03. P. 10.
4. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. N. Y.: Academic Press, 1975. P. 441.
5. **Dantzig G., Ramser J.** The truck dispatching problem // Management Science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
6. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73, no. 1. P. 115–142.
7. **Gimadi E.K., Rykov I.A.** On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight // Dokl. Math. 2016. Vol. 93, no. 1. P. 117–120.
8. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542.

9. **Hubbert S., Gia Q. T. L., Morton T.M.** Spherical radial basis functions. Theory and Applications. Cham: Springer, 2015. 150 p. (SpringerBriefs in Mathematics).
10. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximability of the minimum-weight k-size cycle cover problem // J. Global Optim. 2015. DOI: 10.1007/s10898-015-0391-3.
11. **Khachay M., Zaytseva H.** Time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem // Combinatorial Optimization and Applications: 9th Internat. Conf. (COCOA 2015): Proceedings. Cham: Springer, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science).
12. **Kumar S., Panneerselvam R.** A survey on the vehicle routing problem and its variants // Intel. Inform. Management. 2012. Vol. 4, no. 3. P. 66–74.
13. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theor. Comput. Sci. 1977. No 4. P. 237–244.
14. **Song L., Huang H., Du H.** Approximation schemes for Euclidean vehicle routing problems with time windows // J. Comb. Optim. 2015. DOI: 10.1007/s10878-015-9931-5.
15. **Toth P., Vigo D.** The vehicle routing problem / eds. P. Toth, D. Vigo. Philadelphia: Society for Indust. and Appl. Math., 2001. 363 p. (Discrete Math. and Appl.)

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
Омский государственный технический университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 08.04.2016

Дубинин Роман Дмитриевич
студент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: romandubinin94@gmail.com