ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{\mathbf{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1}\}$[1]

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Пусть Γ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $2r(r+1) \le 4096$. Если $2r+1$ — степень простого числа, то конструкция Мэтона обеспечивает существование реберно симметричного графа с данным массивом пересечений. Отметим, что $2r+1$ — не степень простого числа только для $r \in \{7, 17, 19, 22, 25, 27, 31, 32, 37, 38, 42, 43\}$. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетических дистанционно регулярных графов с указанными значениями r. Случаи $r \in \{7, 17, 19\}$ рассмотрены ранее. Доказано, что если Γ — вершинно симметричный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $2r+1$ — не степень простого числа и $r \le 43$, то $r = 25, 27, 31$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection arrays $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$.

Let Γ be an antipodal graph with intersection array $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, where $2r(r+1) \le 4096$. If $2r+1$ is a prime power, then Mathon's scheme provides the existence of an edge-symmetric graph with this intersection array. Note that $2r+1$ is not a prime power only for $r \in \{7, 17, 19, 22, 25, 27, 31, 32, 37, 38, 42, 43\}$. We study automorphisms of hypothetical distance-regular graphs with the specified values of r. The cases $r \in \{7, 17, 19\}$ were considered earlier. We prove that, if Γ is a vertex-symmetric graph with intersection array $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $2r+1$ is not a prime power, and $r \le 43$, then $r = 25, 27, 31$.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-28-37

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Для автоморфизма g графа Γ пусть $\alpha_j(g)$ — число вершин x таких, что $d(x, x^g) = j$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ. Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). *Графом Клейна* называется единственный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами*. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ в качестве вершин имеет антиподальные классы, и классы $\bar{u}, \bar{w}$ смежны, если $\bar{u}$ содержит вершину, смежную с вершиной из $\bar{w}$. Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности* и Γ называется *антиподальным r-накрытием графа* $\bar{\Gamma}$.

Для группы G через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал G, а *цоколем* G назывется произведение всех минимальных нормальных подгрупп из G.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $a_1 = 2$ и числом вершин, не большим 4096.

Предложение [1, следствие]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 4096$ вершинах. Если $a_1 = 2$, то верно одно из утверждений*:

(1) Γ — *граф с массивом пересечений* $\{6,3,3;1,1,2\}$, $\{9,6,3;1,2,3\}$, $\{12,9,9;1,1,4\}$, $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{18,15,9;1,1,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{33,30,15;1,2,15\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{42,39,1;1,1,42\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$ $\{51,48,24;1,2,24\}$, $\{55,52,34;1,2,22\}$, $\{58,55,8;1,2,44\}$, $\{60,57,16;1,4,30\}$, $\{60,57,32;1,4,18\}$, $\{63,60,10;1,2,54\}$, $\{63,60,49;1,4,15\}$, $\{68,65,32;1,4,40\}$, $\{75,72,8;1,2,60\}$, $\{75,72,42;1,4,50\}$, $\{75,72,31;1,8,45\}$, $\{80,77,61;1,7,20\}$, $\{90,87,60;1,15,18\}$, $\{99,96,12;1,4,88\}$, $\{99,96,20;1,4,72\}$, $\{99,96,6;1,6,88\}$, $\{120,117,5;1,5,108\}$, $\{143,140,34;1,7,110\}$, $\{147,144,39;1,12,117\}$, $\{224,221,32;1,16,208\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \in \{2,3,\ldots,44\} - \{10,16,28,34,38\}$ *и* $v = 2r(r+1)$;

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{63,60,1;1,4,63\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$, $\{99,96,1;1,4,99\}$, $\{108,105,1;1,5,108\}$, $\{143,140,1;1,20,143\}$, $\{147,144,1;1,16,147\}$, $\{171,168,1;1,12,171\}$;

(4) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{6,3,3,3;1,1,1,2\}$, $\{12,9,6,3;1,2,3,4\}$, $\{21,18,12,4;1,1,6,21\}$, $\{15,12,9,6,3;1,2,3,4,5\}$, $\{6,3,3,3,3,3;1,1,1,1,1,2\}$, $\{18,15,12,9,6,3;1,2,3,4,5,6\}$.

Для графов из п. (2), если $2r+1$ — степень простого числа, то конструкция Мэтона [2, предлжение 12.5.3] обеспечивает существование реберно симметричного графа с данным массивом пересечений. Отметим, что $2r+1$ — не степень простого числа только для $r \in \{7,17,19,22,25,27,$
$31,32,37,38,42,43\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетических дистанционно регулярных графов с указанными значениями r. Такой граф имеет спектр $k^1, \sqrt{k}^{r^2-1}, -1^k, -\sqrt{k}^{r^2-1}$. Случаи $r \in \{7,17,19\}$ рассмотрены в [3]. Заметим, что число $k+1$ не является квадратом. Порядок клики в Γ не больше 4, так как $a_1 = 2$. Основные результаты статьи приведены в теоремах 1, 2 и следствии.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r < 44$, $2r+1$ — *не степень простого числа,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $(r-1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$, *то* $(r,p) \in \{(22,5),(25,17),(27,5),(27,11),(31,7),(32,5),(32,13),(38,7),(38,11),(42,5),(42,17),(43,29),\}$;

(2) *если Ω — пустой граф, то либо p не делит r,* $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 2r+2+(4r+2)l$ *и p делит $2l$, либо p делит r,* $\alpha_3(g) = wr$, $\alpha_1(g) = 1-w+(2r+1)l$ *и p делит* $(l-1, w-2)$;

(3) *если Ω является n-кликой, то либо $n=2$, $p=2$ и* $\alpha_1(g) = 2r+(4r+2)l$, *либо $n=4$, p делит $r-1$,* $\alpha_1(g) = 2r-2+(4r+2)l$ *и p делит $6l$*;

(4) *если Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p>2$, то p делит $2r+2-t$ и $r-s$, в случае $t>2$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений*

$\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t-4 = 2s-2$ *и* $|\Gamma - \Omega| \leq ts(2r-t)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leq 43$, $2r+1$ *— не степень простого числа, и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Если* F *— антиподальный класс графа* Γ *и* $\bar{T}$ *— цоколь группы* $\bar{G} = G/S(G)$, *то верно одно из следующих утверждений*:

(1) $r = 25$, $S(G)$ *является* 2*-группой,* $\bar{T} \cong L_2(25)$ *и* $\bar{T}_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 25 *с помощью группы порядка, делящего* 12;

(2) $r = 27$, $S(G)$ *является* 2*-группой, группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $U_3(3)$ *и* $\bar{T}_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 27 *с помощью циклической группы порядка, делящего* 8;

(3) $r = 31$, *либо* $|G| = 2^b \cdot 31$, *либо* $S(G)$ *является* 2*-группой, группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(31)$ *и* $\bar{T}_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 31 *с помощью циклической группы порядка* $r = 15$;

(4) $r = 43$, $S(G)$ *является* 2*-группой, группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(43)$ *и* $\bar{T}_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 43 *с помощью циклической группы порядка* 21.

Следствие. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leq 43$, $2r+1$ *— не степень простого числа. Если* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, $V = S(G)$, F *— антиподальный класс графа* Γ, *то верно одно из утверждений*:

(1) $r = 31$ *и* $|G| = 2^b \cdot 31$;

(2) $V = 1$ *и либо* $r = 25$, $G \cong L_2(25)$, $G_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 25 *с помощью группы порядка* 6, *либо* $r = 27$, $F^*(G) \cong U_3(3)$, $G_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 27 *с помощью группы порядка* $4d$, *где* $d = |G : G'|$;

(3) G *действует неприводимо на* V, *и либо*

(*i*) $r = 25$, V *является* 12*-мерным* $F_2L_2(25)$*-модулем с* $C_V(f) = 1$ *или* 26*-мерным* $F_2L_2(25)$*-модулем с* $|C_V(f)| = 4$ *для элемента* f *порядка* 13, *либо*

(*ii*) $r = 27$, V *является* 6*-мерным* $F_2U_3(3)$*-модулем с* $C_V(f) = 1$ *или* 14*-мерным* $F_2U_3(3)$*-модулем с* $|C_V(f)| = 4$ *для элемента* f *порядка* 7.

Лемма 1 [4, лемма 2]. *Пусть* O_K *— кольцо целых алгебраических чисел поля* K. *Если* d *— целое число, не делящееся на квадрат простого числа,* $K = \mathbf{Q}(d^{1/2})$ *— соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца* O_K *равен* $(1, (1+d^{1/2})/2)$, *если* $d \equiv 1 \pmod 4$ *и равен* $(1, d^{1/2})$, *если* $d \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Доказательство теоремы 1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [5, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g).$$

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности r^2-1 (отвечающее собственному значению $\theta_1 = \sqrt{2r+1}$), χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $2r+1$, то*

$$\chi_1(g) = \big((r-1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + ((r-1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/\sqrt{2r+1}\big)/(2r),$$

$$\chi_2(g) = \big(\alpha_0(g) + \alpha_3(g)\big)/r - 1.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - (2r+1)$ делится на p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r^2-1 & (r^2-1)/\sqrt{2r+1} & -(r+1)/\sqrt{2r+1} & -(r+1) \\ 2r+1 & -1 & -1 & 2r+1 \\ r^2-1 & -(r^2-1)/\sqrt{2r+1} & (r+1)/\sqrt{2r+1} & -(r+1) \end{pmatrix},$$

$\chi_1(g) = \big((r-1)\alpha_0(g) + (r-1)\alpha_1(g)/\sqrt{2r+1} - \alpha_2(g)/\sqrt{2r+1} - \alpha_3(g)\big)/(2r)$ и $\chi_2(g) = \big((2r+1)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + (2r+1)\alpha_3(g)\big)/(r(2r+2))$.

Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2r(r+1) - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [6]. Лемма доказана.

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r < 44$, $2r+1$ — не степень простого числа, K — наибольшая подгруппа из G, фиксирующая каждый антиподальный класс, g — элемент простого порядка p из G, $p > 2$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $(r-1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$, то $(r,p) \in \{(22,5), (25,17), (27,5), (27,11), (31,7), (32,5), (32,13), (38,7), (38,11), (42,5), (42,17), (43,29)\}$*;

(2) *если Ω — пустой граф, то либо p не делит r, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 2r+2+(4r+2)l$, p делит $2l$ и $\chi_1(g) = 0$ или $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ и $r \in \{22, 25, 27, 31, 37, 43\}$, либо p делит r, $\alpha_3(g) = wr$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r+1)l$ и p делит $(l-1, w-2)$*;

(3) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 2$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2r + (4r+2)l$, либо $n = 4$, p делит $r-1$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r+2)l$ и p делит $6l$*;

(4) *если Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p > 2$, то p делит $2r+2-t$ и $r-s$, в случае $t > 2$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t-4 = 2s-2$ и $|\Gamma - \Omega| \geq ts(2r-t)$, в частности, $s < r$ и $p < r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если g — элемент группы, то значение характера для g является суммой n корней из единицы степени $|g|$, где n — размерность представления ψ. Далее, корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g| = 2, 3$, то значение характера — вещественное число, поэтому оно является целым.

Пусть $(r-1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$ и $k = k_0^2 d$, d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа.

Если $r = 22$, то $\chi_1(g) = (21\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + (21\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{5}/15)/44$, $d = 5$, по лемме 1 число $21\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на 330 и $p = 5$.

Если $r = 25$, то $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + (24\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{51}/51)/50$, $d = 51$, по лемме 1 число $24\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на 2550 и $p = 17$.

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит $2r(r+1)$.

Если p не делит r, то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2r(r+1) - \alpha_1(g)$ и $\chi_1(g) = ((\alpha_1(g) - 2r - 2)\sqrt{2r+1}/(4r+2)$. Поэтому $\alpha_1(g) = 2r + 2 + (4r+2)l$, p делит $2l$, и либо $\chi_1(g) = 0$, либо ввиду леммы 1 имеем $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ и $r \in \{22, 25, 27, 31, 37, 43\}$. Если p делит r, то $\alpha_3(g) = wr$, p делит $2r+2-w$, $\alpha_2(g) = 2r(r+1) - wr - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = w/2 + (\alpha_1(g) - 2r - 2 + w)\sqrt{2r+1}/(4r+2)$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r+1)l$ и p делит $(l-1, w-2)$.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит $r - 1$ и $2r + 1$, поэтому $p = 3$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(2r-1)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (2r-1))\sqrt{2r+1}/(4r+2)$ и $\alpha_1(g) = (4r+2)l + (2r-1)$. Противоречие с тем, что p не делит $2r - 1$. Если $n = 2$, то p делит $r - 1$ и $2r$, поэтому $p = 2$, $\alpha_2(g) = 2r^2 - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 2r))\sqrt{2r+1})/(4r+2)$ и $\alpha_1(g) = 2r + (4r+2)l$. Если $n = 4$, то p делит $r - 1$, $\alpha_2(g) = 2r(r-1) - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 2(r-1))\sqrt{2r+1})/(4r+2)$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r+2)l$ и p делит $6l$.

Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p > 2$. Тогда p делит $2r+2-t$ и $r - s$. Если $t > 2$, то Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t - 4 = 2s - 2$ и $|\Gamma - \Omega| \geq ts(2r-t)$, в частности, $s < r$ и $p < r$. Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 2 и 3.

Кроме того, из леммы 3 следует, что $(r-1)\alpha_1(g) = \alpha_2(g)$ для неединичного элемента $g \in K$, и по лемме 2 число $\chi_1(g) - (r^2 - 1) = r + 2 - r^2$ делится на p, поэтому K является 2-группой. Если r делится на 4, то по лемме 2 K не содержит элементов порядка 4 и является элементарной абелевой 2-группой.

Леммы 4–14 доказываются простым применением теоремы 1 в случае непустого графа Ω.

Лемма 4. *Если $r = 22$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 7$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(2) $p = 5$, $t = 1$ *и* $s = 2, 7, 12, 17, 22$ *или* $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(3) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика.*

Лемма 5. *Если $r = 25$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 23$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(2) $p = 11$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(3) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика.*

Лемма 6. *Если $r = 27$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 11$, $t = 1$ *и* $s = 5, 16, 27$;
(2) $p = 5$, $t = 1$ *и* $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27$ *или* $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(3) $p = 3$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна.*

Лемма 7. *Если $r = 28$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 19$, $t = 1$ *и* $s = 9, 28$;
(2) $p = 5$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(3) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика.*

Лемма 8. *Если $r = 31$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 29$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(2) $p = 7$, $t = 1$ *и* $s = 3, 10, 17, 24, 31$ *или* $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(3) $p = 5$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(4) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика.*

Лемма 9. *Если $r = 32$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 29$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(2) $p = 13$, $t = 1$ *и* $s = 6, 19, 32$;
(3) $p = 11$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(4) $p = 5$, $t = 1$ *и* $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32$ *или* $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(5) $p = 3$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра.*

Лемма 10. *Если $r = 34$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 31$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(2) $p = 23$, $t = 1$ *и* $s = 11, 34$;
(3) $p = 11$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(5) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика.*

Лемма 11. *Если $r = 37$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 17$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(2) $p = 11$, $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
(3) $p = 7$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(4) $p = 5$, $t = 1$ *и* $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37$ *или* $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(5) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика, или* $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Лемма 12. *Если $r = 38$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 37$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(2) $p = 17$, $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
(3) $p = 11$, $t = 1$ *и* $s = 6, 27, 38$;
(4) $p = 7$, $t = 1$ *и* $s = 3, 10, 17, 24, 31, 38$ *или* $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(5) $p = 5$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(6) $p = 3$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра.*

Лемма 13. *Если $r = 42$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 41$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(2) $p = 19$, $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
(3) $p = 17$, $t = 1$ *и* $s = 8, 25, 42$;
(4) $p = 13$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(5) $p = 5$, $t = 1$ *и* $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42$ *или* $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(6) $p = 3$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна.*

Лемма 14. *Если $r = 43$, то верно одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 41$, $t = 6$, $s = 2$ *и* Ω — *граф икосаэдра*;
(2) $p = 29$, $t = 1$ *и* $s = 14, 43$;
(3) $p = 13$, $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
(4) $p = 7$, $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика*;
(5) $p = 5$, $t = 8$, $s = 3$ *и* Ω — *граф Клейна*;
(6) $p = 3$, $t = 1$ *и* $s = 4, 7, \ldots, 43$ *или* $t = 4$, $s = 1$ *и* Ω — *клика или* $t = 10$, $s = 4$ *и* Ω — *граф с массивом пересечений* $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r < 44$, $2r+1$ — не степень простого числа и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Зафиксируем вершину a графа Γ и антиподальный класс F, содержащий a.

Лемма 15. *Пусть $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) $r = 25$, *$S(G)$ является 2-группой, группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка, делящего 12*;

(2) $r = 27$, *$S(G)$ является 2-группой, группа $\bar{T}$ изоморфна $U_3(3)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка, делящего 8*;

(3) $r = 31$, *либо $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $S(G)$ является 2-группой, группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(31)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка $r = 15$*;

(4) $r = 43$, *$S(G)$ является 2-группой, группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(43)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.*

Доказательство. В случае $r = 22$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$. Если f — элемент порядка 23 из G, g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 46$, ввиду леммы 4 $p = 2$ и либо подграф Ω пуст, либо $|\Omega| = 46y$, $t = 23$ и $s = 4y$. Но в последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 22\alpha_1(g) = 23 \cdot 22$ и $\alpha_1(g) = 23$, противоречие. Заметим, что $|G|$ не делится на 11^2, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(23)$, M_{23}, M_{24}, Co_3 или Co_2. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $22 \cdot 46$, то либо $\bar{T} \cong L_2(23)$, $\bar{T}_a$ — подгруппа из диэдральной группы порядка 24, либо $\bar{T} \cong M_{23}$, $\bar{T}_a$ — подгруппа, изоморфная $L_3(4).Z_2$ или $E_{16}.A_7$. В любом случае имеем противоречие с тем, что G содержит подгруппу индекса 46.

В случае $r = 25$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11, 13, 23\}$. Если f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 52$, ввиду леммы 5 $p = 2$, и либо подграф Ω пуст, либо $|\Omega| = 26s$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 25\alpha_1(g) = 26 \cdot 25$ и $\alpha_1(g) = 26$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $26 \cdot 26s \leq 26 \cdot 50$, то $s = 1$ и Ω — клика, противоречие.

Заметим, что $|G|$ не делится на 5^3, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(25)$, $U_3(4)$ или ${}^2F_4(2)'$. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $25 \cdot 52$, то либо $\bar{T} \cong L_2(25)$, $\bar{T}_a$ — подгруппа из диэдральной группы порядка 24, либо $\bar{T} \cong U_3(4)$, $\bar{T}_a$ — подгруппа порядка $16 \cdot 3$ или $64 \cdot 3$. Наконец, G содержит подгруппу индекса 52, поэтому $\bar{T} \cong L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью циклической группы порядка, делящего 12.

В случае $r = 27$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Если f — элемент порядка 7 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 7$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 56$, ввиду леммы 6 $p = 2$, и либо подграф Ω пуст, либо $t = 14h$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 27\alpha_1(g) = 27(56 - 14h)$ и $\alpha_1(g) = 56 - 14h$. Заметим, что $|G|$ не делится на 3^5, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $U_3(3)$, J_2, $Sp_6(2)$, A_9, A_{10} или A_{11}. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего $56 \cdot 27$, то $\bar{T} \cong U_3(3)$, $\bar{T}_a$ — подгруппа порядка, делящего 32. Наконец, G содержит подгруппу индекса 56, поэтому $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка, делящего 8.

В случае $r = 28$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 19, 29\}$. Если f — элемент порядка 29 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 29$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 58$, ввиду леммы 7 имеем $p = 2$. Заметим, что $|G|$ не делится на 7^2, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(29)$, $\bar{T}_a$ — подгруппа из диэдральной группы порядка 30. Противоречие с тем, что G не содержит подгрупп индекса 58.

В случае $r = 31$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 29, 31\}$. Если f — элемент порядка 31 из G, g — элемент простого порядка $p \neq 31$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 31w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 63l$ и 31 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 8 либо $p = 3, 7$, $t = 1, s = 31$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f, противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$, поэтому либо $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(31)$. В последнем случае $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15 и $\bar{T}_a$ — подгруппа порядка 15.

В случае $r = 32$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11, 13, 29\}$. Если f — элемент порядка 11 из G, $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и g — элемент простого порядка $p \neq 11$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 22$

и ввиду леммы 9 $p=2$. Далее, либо Ω — пустой граф, либо $|\Omega| = 22s$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 32\alpha_1(g) = 44 \cdot 32$ и $\alpha_1(g) = 44$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $44 \cdot 22s \le 44 \cdot 64$, то $s=2$ (число $32-s$ четно). Противоречие с тем, что для антиподов $a, a^* \in \Omega$ и $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не более 2 вершин из $\Omega(a)$ и из $\Omega(a^*)$.

Заметим, что $S(G)$ является 2-группой, $|G|$ не делится на 9 и по [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — диэдральная группа порядка 10. В этом случае $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс. Отсюда $|S(G)|$ делится на 8 и делит 32. Противоречие с тем, что f централизует $S(G)$.

В случае $r=34$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,17,23,31\}$. Если f — элемент порядка 17 из G, g — элемент простого порядка $p \ne 17$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 34w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 69l$ и 17 делит $(l-1, w-2)$. Отсюда $l=1, w=2$, ввиду леммы 10 либо $p=3,23$, $t=1, s=34$, либо $p=2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f, противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $\Omega_8^-(2)$. Противоречие с тем, что в $\bar{T}$ нет подгрупп индекса, делящего 70.

В случае $r=37$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,17,19,37\}$. Если f — элемент порядка 37 из G, g — элемент простого порядка $p \ne 37$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 37w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 75l$ и 37 делит $(l-1, w-2)$. Отсюда $l=1, w=2$, ввиду леммы 11 либо $p=3,5$, $t=1, s=37$, либо $p=2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f, противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] порядок группы, делящийся на $19 \cdot 37$, делится на 13 или на 11^2, противоречие.

В случае $r=38$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,13,17,19,37\}$. Если f — элемент порядка 19 из G, g — элемент простого порядка $p \ne 19$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 38w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 77l$ и 19 делит $(l-1, w-2)$. Отсюда $l=1, w=2$, ввиду леммы 12 либо $p=7,11$, $t=1, s=38$, либо $p=2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f, противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7^d \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $U_4(8)$, ${}^2G_2(27)$, $U_3(27)$. Противоречие с тем, что в $\bar{T}$ нет подгрупп индекса, делящего 78.

В случае $r=42$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,13,17,19,41,43\}$. Если f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \ne 43$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 86$, ввиду леммы 13 имеем $p=2$. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5^d \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 43$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и по [7, табл. 1]порядок группы, делящийся на 43, делится на 11 или на 7^2, противоречие.

В случае $r=43$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,13,29,41,43\}$. Если f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \ne 43$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 43w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 87l$ и 43 делит $(l-1, w-2)$. Отсюда $l=1, w=2$, ввиду леммы 14 либо $p=3,29$, $t=1, s=43$, либо $p=2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f, противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 43$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и по [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(43)$, $U_7(2)$. Наконец, G содержит подгруппу индекса 88, поэтому $\bar{T} \cong L_2(43)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21. Лемма доказана.

Из лемм 4–15 следует теорема 2. Докажем следствие.

Лемма 16. *Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = 2r+2$. Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $r=25$, $G \cong L_2(25)$ *и* $G_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 25 *с помощью группы порядка* 6;

(2) $r=27$, $T \cong U_3(3)$ *и* $G_{\{F\}}$ *— расширение группы порядка* 27 *с помощью группы порядка* $4d$, *где* $d = |G : T|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = 2r+2$. Если $S(G) \ne 1$, то каждая инволюция g из $S(G)$ фиксирует любой антиподальный класс и $\alpha_3(g) = v$. Противоречие с тем, что число r нечетно. Значит, $S(G) = 1$.

Если $r = 25$, то $T \cong L_2(25)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка $6d$, где $d = |G : T|$.

Если $r = 27$, то $T \cong U_3(3)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью группы порядка $4d$, где $d = |G : T|$.

Если $r = 31$, то $G \cong PGL_2(31)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15.

Если $r = 43$, то $G \cong PGL_2(43)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Компьютерные вычисления показывают, что в двух последних случаях, а также в случае $r = 25$, $G \neq T$ дистанционно регулярный граф не существует.

Лемма 17. *Пусть* $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| < 2r + 2$, $V = S(G)$. *Тогда либо* $r = 31$, $|G| = 2^b \cdot 31$, *либо* $|V : V_{\{F\}}| = 2$, G *действует неприводимо на* V, *и верно одно из утверждений*:

(1) V *является* 12*-мерным* $F_2L_2(25)$*-модулем с* $C_V(f) = 1$ *или* 26*-мерным* $F_2L_2(25)$*-модулем с* $|C_V(f)| = 4$ *для элемента* f *порядка* 13;

(2) V *является* 6*-мерным* $F_2U_3(3)$*-модулем с* $C_V(f) = 1$ *или* 14*-мерным* $F_2U_3(3)$*-модулем с* $|C_V(f)| = 4$ *для элемента* f *порядка* 7.

Доказательство. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| < 2r + 2$. Если $G = S(G)$, то ввиду леммы 15 имеем $r = 31$, $|G| = 2^b \cdot 31$. Если же $G \neq S(G)$, то $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = r + 1$, $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$ и $\bar{T}$ действует неприводимо на $S(G)$. Из лемм 15, 16 следует, что либо

(1) $r = 25$, группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка 12, либо

(2) $r = 27$, группа $\bar{T}$ изоморфна $U_3(3)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка 8, либо

(3) $r = 31$, $\bar{G} \cong L_2(31)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15, либо

(4) $r = 43$, $\bar{G} \cong L_2(43)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Если G содержит нормальную подгруппу $\langle g \rangle$ порядка 2, то $\alpha_1(g) = 2r + 2$ и G действует на $\{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$, противоречие.

В случае $r = 25$ выберем элемент f порядка 13 из G и элемент g простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 52$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 8. Ввиду [8] V является 12-мерным $F_2L_2(25)$-модулем с $C_V(f) = 1$ или 26-мерным $F_2L_2(25)$-модулем с $C_V(f) = 4$.

В случае $r = 27$ выберем элемент f порядка 7 из G и элемент g простого порядка $p \neq 7$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 56$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 16. Ввиду [8] V является 6-мерным $F_2U_3(3)$-модулем с $C_V(f) = 1$ или 14-мерным $F_2U_3(3)$-модулем с $|C_V(f)| = 4$.

В случае $r = 31$ выберем элемент f порядка 31 из G и элемент g простого порядка $p \neq 31$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 62$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 4. Ввиду [8] V является 15-мерным $F_2L_2(31)$-модулем с $C_V(f) = 1$. Противоречие с тем, что $|V : V_{\{F\}}| = 2$.

В случае $r = 43$ выберем элемент f порядка 43 из G и элемент g простого порядка $p \neq 43$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 86$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 4. С помощью компьютерных вычислений доказано, что V является 21-мерным $F_2L_2(43)$-модулем с $C_V(f) = 1$. Противоречие с тем, что $|V : V_{\{F\}}| = 2$. Лемма доказана.

Из лемм 16, 17 вытекает следствие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Makhnev A.A., Nirova M.S.** On distance-regular graphs with $\lambda = 2$ // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2014. Vol. 7, iss. 2. P. 204–210.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
3. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 1000 // Междунар. конф. "Мальцевские чтения": тез. докл. Новосибирск, 2015. С. 87.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О группе автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Алгебра и логика. 2013. Т. 51, № 4. С. 476–495.
5. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
8. An atlas of Brauer characters / C. Jansen et. al. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.

Поступила 25.01.2016

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru