ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.972.87

ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ α-МНОЖЕСТВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ [1]

В. Н. Ушаков, А. А. Успенский

Работа посвящена изучению α-множеств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Понятие α-множества введено как некоторое обобщение выпуклого замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$. Оно возникло при изучении множеств достижимости и интегральных воронок нелинейных управляемых систем в евклидовых пространствах. Множества достижимости нелинейных динамических систем, как правило, невыпуклы; при этом в различных системах невыпуклость множеств достижимости имеет различную степень выраженности. Это обстоятельство побудило авторов навести некоторую классификацию множеств в $\mathbb{R}^n$ по степени их невыпуклости. Такая классификация, идущая от теории управления, представлена здесь в виде понятия α-множества в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: α-множество, выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка множества в $\mathbb{R}^n$, α-гиперплоскость, α-отделимость, конус Булигана, нормальный конус.

V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii. Theorems on the separability of α-sets in Euclidean space.

We study α-sets in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. The notion of α-set is introduced as a generalization of a convex closed set in $\mathbb{R}^n$. This notion appeared in the study of reachable sets and integral funnels of nonlinear control systems in Euclidean spaces. Reachable sets of nonlinear dynamic systems are usually nonconvex, and the degree of their nonconvexity is different in different systems. This circumstance prompted the introduction of a classification of sets in $\mathbb{R}^n$ according to the degree of their nonconvexity. Such a classification stems from control theory and is presented here as the notion of α-set in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: α-set, convex set in $\mathbb{R}^n$, convex hull in $\mathbb{R}^n$, α-hyperplane, α-separability, Bouligand cone, normal cone.

MSC: 54D65, 49J52, 90C56, 32T27

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-277-291

Введение

В настоящей работе изучаются свойства по существу невыпуклых множеств конечномерного евклидова пространства, названных α-множествами [1]. Неотрицательная константа α является супремальным значением функции, определенной на дополнении множества до всего пространства, имеет смысл угловой величины и характеризует степень вогнутости множества. Чем больше эта константа, тем ощутимее по свойствам множество отличается от своей выпуклой оболочки. Изучение свойств α-множеств представляет несомненный интерес для геометрии, а также служит развитию теории и методов негладкого и выпуклого анализа.

В работе осуществлена классификация α-множеств в соответствии с введенным определением регулярного множества. Основной результат заключается в перенесении базовых результатов выпуклого анализа [2; 3] на случай невыпуклых множеств. Доказаны теоремы об отделимости для некоторых классов α-множеств.

К числу сфер приложения результатов относятся теория оптимального управления и дифференциальные игры. Конструкции теории α-множеств находят приложение при построении обобщенных решений уравнений гамильтонова типа [4; 5], сингулярных множеств и функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии [6], при построении эволюции волновых фронтов и эйконала при решении основного уравнения геометрической оптики [7;8].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00486_а) и Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-13).

В работе приводятся примеры, иллюстрирующие введенные понятия.

1. Основные определения

Пусть A — замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку в A.

Полагаем

$\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\}$ — множество всех проекций $p(z^*)$ точки z^* на A;

$\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_A(z^*)$;

$\mathrm{con}\big(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*\big) = \big\{h = \lambda(z - z^*)\colon \lambda \geqslant 0, z \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)\big\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на $\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^* = \big\{z - z^*\colon z \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)\big\}$;

$H_A(z^*)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из $\mathrm{con}\big(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*\big)$;

$(h_*\hat{,}h^*) = \arccos\big(\langle h_*, h^*\rangle/(\|h_*\| \cdot \|h^*\|)\big) \in [0, \pi]$ — угол между h_* и h^*, $(h_*, h^*) \in H_A(z^*)$;

$\alpha_A(z^*) = \max\limits_{(h_*,h^*)\in H_A(z^*)} (h_*\hat{,}h^*) \in [0, \pi]$;

$\langle h_*, h^*\rangle$ — скалярное произведение векторов h_* и h^* в $\mathbb{R}^n$, $\|h_*\| = \langle h_*, h_*\rangle^{1/2}$.

Полагаем также $\alpha = \alpha_A = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^n\setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество A назовем α-множеством в $\mathbb{R}^n$.

Отметим некоторые свойства функции $\alpha_A(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ (см. [1]).

Свойство 1.1. Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией.

Свойство 1.2 Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ полунепрерывна сверху.

Спрашивается: достигается ли sup в равенстве $\alpha = \alpha_A = \sup\limits_{z^*\in\mathbb{R}^n\setminus A} \alpha_A(z^*)$?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Есть примеры множеств A, для которых sup не достигается на A, и в то же время для многих замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^n$ sup достигается на A (см. [1]).

Число $\alpha = \alpha_A \in [0, \pi]$ характеризует степень вогнутости множества A. Однако аккуратнее было бы говорить, что $\alpha = \alpha_A \in [0, \pi]$ характеризует не степень вогнутости A, а степень изогнутости его границы ∂A. Так, два множества в $\mathbb{R}^2$ на рис. 1 имеют одну и ту же степень вогнутости $\alpha = \alpha_A = \pi$.

Если для некоторого замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет место $\alpha = \alpha_A = 0$, то $\alpha_A(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$, т. е. множество $\Omega_A(z^*)$ состоит из одной точки. Согласно теореме Моцкина (см., например, [9]), множество A в этом случае — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Также если A — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, то $\alpha_A(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ и, стало быть, $\alpha = \alpha_A = 0$. Значит, выпуклые замкнутые множества A в $\mathbb{R}^n$ и 0-множества A (0-вогнутые множества A) суть эквивалентные понятия.

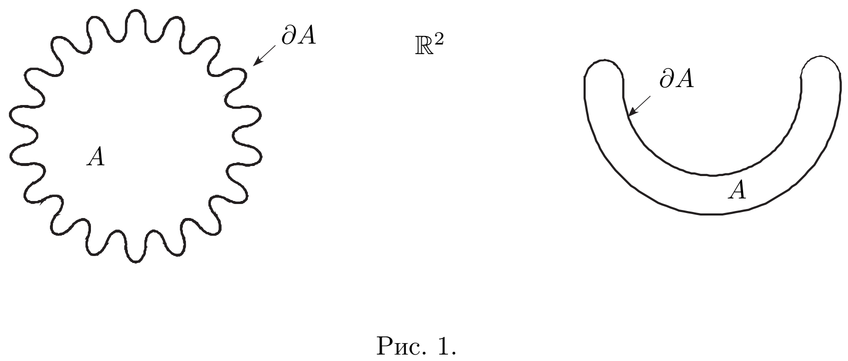

Рис. 1.

Допустим теперь, что для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено соотношение

$$z^* \notin \operatorname{co} \Omega_A(z^*). \tag{1.1}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\alpha_A(z^*) = \max_{(h_*,h^*) \in H_A(z^*)} (h_* \hat{;} h^*) < \pi. \tag{1.2}$$

С другой стороны, если для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено (1.2), то справедливо и (1.1). Таким образом, соотношения (1.1) и (1.2) эквивалентны.

О п р е д е л е н и е 1.2. Замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ назовем регулярным множеством в $\mathbb{R}^n$, если для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется (1.1).

Принимая во внимание эквивалентность (1.1) и (1.2), получаем, что если A — регулярное множество в $\mathbb{R}^n$, то для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется $\alpha_A(z^*) < \pi$. При этом возможны варианты: 1) $\alpha = \alpha_A < \pi$; 2) $\alpha = \alpha_A = \pi$, причем $\alpha_A(z^*) < \pi$ для любых $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ назовем нерегулярным множеством в $\mathbb{R}^n$, если оно не является регулярным в $\mathbb{R}^n$, т. е. если $\alpha_A(z^*) = \pi$ для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Пример нерегулярного множества приведен в [1].

Приведем некоторые свойства регулярных множеств в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\rho(z) = \min\limits_{a \in A} \|z - a\|$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 1 [1, теорема 1.1]. *Пусть A — регулярное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого замкнутого множества B в $\mathbb{R}^n$, $B \supset A$, $B \neq A$, для которого $\sup_{b \in B} \rho(b)$ достигается на B, все точки b множества B, максимально удаленные от A, удовлетворяют включению $b \in \partial B$.*

Сформулируем еще одно утверждение (см. [1]), которое будет использовано нами при доказательстве некоторых утверждений из разд. 2.

Утверждение 2 [1, теорема 1.3]. *Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\alpha_{A_\varepsilon} \leqslant \alpha_A$.*

2. Теоремы об отделимости α-множеств

Справедливо следующее утверждение.

Пусть $\varphi(A)$ — такой гомеоморфный образ в $\mathbb{R}^n$ компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ с $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, что $\varphi(A) \subset \operatorname{int} O_r(\mathbf{0})$, где $O_r(\mathbf{0})$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ (см. рис. 2). Тогда отвечающее компакту A множество $A^* = \operatorname{cl}(O_r(\mathbf{0}) \setminus \varphi(A)) \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\alpha_{A^*} = \pi$.

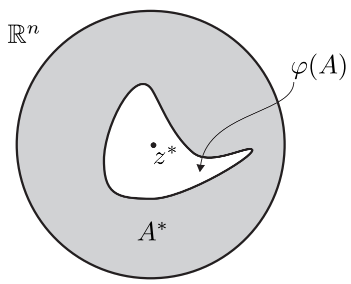

Рис. 2.

В самом деле, пусть A^* — множество в $\mathbb{R}^n$ указанного вида и пусть z^* — наиболее удаленная от A^* точка в множестве $\varphi(A)$.

Введем функцию $\sigma(z) = \min\limits_{a^* \in A^*} \|z - a^*\|^2$, $z \in \mathbb{R}^n$ и производную

$$\sigma'(z^*, s) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\sigma(z^* + \lambda s) - \sigma(z^*)}{\lambda}$$

функции $\sigma(z)$ в точке z^* по направлению $s \neq \mathbf{0}$.

Для любого $s \in \mathbb{R}^n$, $s \neq \mathbf{0}$ справедливо представление

$$\sigma'(z^*, s) = \min_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \varphi'(z^*, s) = 2 \min_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \langle z^* - p(z^*), s \rangle;$$

здесь $\varphi'(z^*, s)$ — производная функции $\varphi_{z^*}(z) = \|z - p(z^*)\|^2$ в точке $z = z^*$ по направлению s.

Поскольку z^* — наиболее удаленная от A^* точка в $\varphi(A)$, то $\sigma'(z^*, s) = 2 \min\limits_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \langle z^* - p(z^*), s \rangle \leq 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $s \neq \mathbf{0}$. Из этого неравенства следует $z^* \in \mathrm{co}\Omega_A(z^*)$ и, значит, $\alpha_{A^*}(z^*) = \pi$, что влечет равенство $\alpha_{A^*} = \pi$.

Также для любого гомеоморфного образа $\varphi(S^{(n-1)})$ в $\mathbb{R}^n$ сферы $S^{(n-1)} = \partial O^{(n)}(\mathbf{0})$ в $\mathbb{R}^n$ ($O^{(n)}(\mathbf{0})$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1) имеет место $\alpha_{\varphi(S^{(n-1)})} = \pi$. В частности, для $\varphi(S^{(1)})$ в $\mathbb{R}^2$ справедливо $\alpha_{\varphi(S^{(1)})} = \pi$.

В связи с этим возникает вопрос: "Пусть $\varphi(S^{(n-1)})$ — гомеоморфный образ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ сферы $S^{(n-1)}$. Выполняется ли равенство $\alpha_{\varphi(S^{(n-1)})} = \pi$?"

В этом разделе рассматриваются α-множества в пространстве $\mathbb{R}^n$, и в основном в $\mathbb{R}^2$. Перенесены некоторые понятия и утверждения из выпуклого анализа в область α-множеств.

Рассмотрим некоторые определения.

Определение 2.1. Обозначим через $\mathcal{A}_\alpha$ ($\mathcal{B}_\alpha$) совокупность всех замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^n$ с числом $\alpha_A = \alpha$ ($\alpha_A \leqslant \alpha$), где $\alpha \in [0, \pi]$.

Справедливы соотношения $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta \in [0,\alpha]} \mathcal{A}_\beta$.

Пусть $\alpha \in [0, \pi)$.

Определение 2.2. α-гиперплоскостью Γ в $\mathbb{R}^n$ назовем такой гомеоморфный образ гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, что

1) $\Gamma \in \mathcal{A}_\alpha$;

2) Γ разбивает $\mathbb{R}^n$ на два замкнутых множества в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфных замнутому полупространству в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ из определения 2.2 через Φ^+ и Φ^-. Имеем: Φ^+ и Φ^- суть элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$ и хотя бы одно из них — элемент совокупности $\mathcal{A}_\alpha$.

Φ^- (Φ^+) назовем α-полупространством в $\mathbb{R}^n$, если $\Phi^- \in \mathcal{A}_\alpha$ ($\Phi^+ \in \mathcal{A}_\alpha$). Тогда, если $\Phi^- \in \mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$ ($\Phi^+ \in \mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$), то $\Phi^- \in \mathcal{A}_\beta$ ($\Phi^+ \in \mathcal{A}_\beta$) при некотором $\beta \in [0, \alpha)$.

В случае, если Γ, Φ^-, Φ^+ таковы, что Γ, $\partial\Phi^-$, $\partial\Phi^+$ содержат точку $z^* \in \mathbb{R}^n$, будем иногда обозначать так: $\Gamma(z^*)$, $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$.

Также в случаях, когда ясно, что речь идет об α-полупространствах Φ^- и Φ^+ в $\mathbb{R}^n$, будем иногда называть их полупространствами в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. α-гиперплоскость $\Gamma(z^*)$ в $\mathbb{R}^n$ назовем опорной к $A \in \mathcal{A}_\alpha$ в точке $z^* \in \partial A$, если A содержится в одном из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, соответствующих α-гиперплоскости $\Gamma(z^*)$.

То из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, которое содержит множество A, назовем опорным к A в точке $z^* \in \partial A$.

Определение 2.4. Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ α-отделимы ($\mathcal{B}_\alpha$-отделимы), если существует такая α-гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$) в $\mathbb{R}^n$, что $A \subset$

Φ^-, $B \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, соответствующие α-гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$).

Определение 2.5. Будем говорить, что множества A и B из $\mathbb{R}^n$ сильно α-отделимы (сильно $\mathcal{B}_\alpha$-отделимы), если существуют α-гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$) в $\mathbb{R}^n$ и $\rho \in (0, \infty)$ такие, что $A_\rho \subset \Phi^-$, $B_\rho \subset \Phi^+$; здесь Φ^-, Φ^+ — полупространства в $\mathbb{R}^n$, соответствующие α-гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$).

Ниже сформулируем и докажем несколько утверждений, относящихся к множествам A из $\mathcal{A}_\alpha$ или $\mathcal{B}_\alpha$, аналогичных некоторым теоремам из выпуклого анализа [2; 3], таким как теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству, теорема о представимости замкнутого выпуклого множества в виде пересечения содержащих его полупространств, теоремы об отделимости выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. При формулировке утверждений, относящихся к множествам из $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha$, нам придется наложить на эти множества некоторые дополнительные условия.

Итак, сначала рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ замкнутые множества, стесненные свойством мажорируемости (m-свойством). Приведем примеры множеств в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством, и покажем, что не все замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$ обладают m-свойством. Далее приведем некоторые утверждения относительно α-множеств в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством.

Пусть A — замкнутое множество в $\mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$.

Введем следующие множества в $\mathbb{R}^2$:

$K(z^*; A) = \{h \in \mathbb{R}^2 \colon h \neq 0, z = z^* + \lambda h \in A$ при некотором $\lambda > 0\}$ — конус допустимых направлений множества A в точке z^*;

$K_A(z^*) = \{z = z^* + \lambda h \colon \lambda \geqslant 0, h \in K(z^*; A)\}$;

$Q_A(z^*) = \operatorname{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus K_A(z^*))$, где символ $\operatorname{cl} X$ означает замыкание множества X в $\mathbb{R}^2$.

Для краткости конические множества $K_A(z^*)$ и $Q_A(z^*)$ будем называть *конусами в* $\mathbb{R}^2$.

$Q_A(z^*)$ — замкнутое, не обязательно выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$. Может случиться для некоторых α-множеств A в $\mathbb{R}^2$ с числом $\alpha \in (0, \pi)$, что $Q_A(z^*) = \varnothing$ при некоторых $z^* \in \partial A$.

Допустим теперь, что $Q_A(z^*) \neq \varnothing$ для некоторых $A \subset \mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$. В этом случае конус $Q_A(z^*)$ можно представить как объединение выпуклых замкнутых конусов из некоторого набора K_ω, $\omega \in \mathbb{R}^2$ с вершиной z^* :

$$Q_A(z^*) = \bigcup_{\omega \in \Omega} K_\omega; \tag{2.1}$$

здесь Ω — некоторое множество.

Ясно, что представление (2.1) конуса $Q_A(z^*)$ может быть неоднозначно. Это будет в случаях, когда $\operatorname{int} Q_A(z^*) \neq \varnothing$. Но может оказаться, что $\operatorname{int} Q_A(z^*) = \varnothing$, и тогда $Q_A(z^*)$ не допускает представления (2.1), в котором среди K_ω, $\omega \in \Omega$ есть конус с $\operatorname{int} K_\omega \neq \varnothing$.

Для замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$ будем говорить, что $z^* \in \partial A$ есть *точка типа* I, если

a) $Q_A(z^*) \neq \varnothing$;

b) существует такое представление (2.1) конуса $Q_A(z^*)$, что среди конусов K_ω, $\omega \in \Omega$ есть конус K_{ω^*} с $\operatorname{int} K_{\omega^*} \neq \varnothing$, не совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$;

c) конус $Q_A(z^*)$ не допускает представления (2.1), в котором среди K_ω, $\omega \in \Omega$ есть конус, совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$.

Будем говорить, что $z^* \in \partial A$ есть *точка типа* II, если

a) $Q_A(z^*) \neq \varnothing$;

b) конус $Q_A(z^*)$ допускает представление (2.1), в котором среди K_ω, $\omega \in \Omega$ есть конус, совпадающий с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$.

На рис. 3 изображены точки $z^* \in \partial A$ типов I и II.

В случае, когда z^* — точка типа I, рассмотрим соответствующий конус $K^* = K_{\omega^*}$ (см. п. b)), биссектрису конуса K^* и какую-либо точку y^*, $y^* \neq z^*$ на биссектрисе. Из y^* восстано-

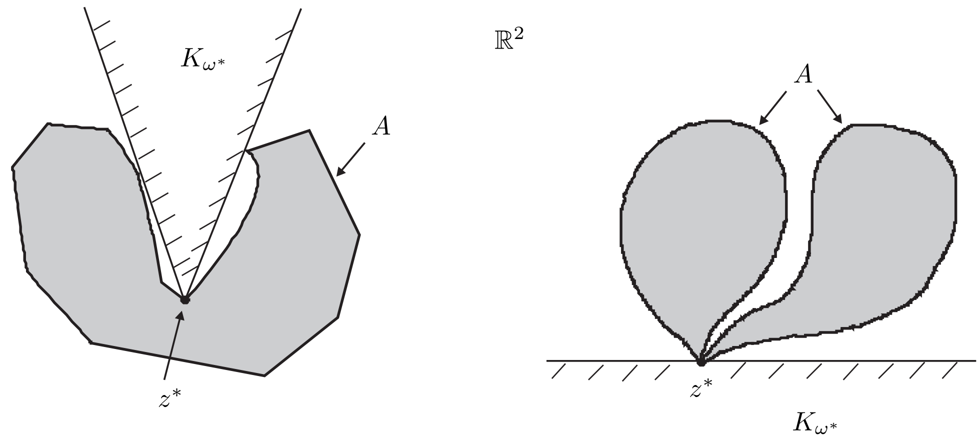

Рис. 3.

вим перпендикуляры к образующим (крайним лучам) конуса K^*. Через $\beta = \beta(y^*)$ обозначим угол между перпендикулярами ($0 < \beta < \pi$).

Угол $\beta = \beta(y^*)$ есть некоторая характеристика конуса K^*, принадлежащего конусу $Q_A(z^*)$. Следовательно, эта характеристика имеет отношение к самому A. Однако отсутствует ее непосредственная связь с понятием проекции точки на множество A. Угол $\beta = \beta(y^*)$ не есть, вообще говоря, угол между двумя векторами вида $p(y^*) - y^*$.

Свойство, которое вводим ниже, связывает характеристику $\beta = \beta(y^*)$ с угловой характеристикой, в основе которой лежит понятие проекции точки на множество A.

О п р е д е л е н и е 2.6. Будем говорить, что замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ обладает m-свойством (свойством мажорируемости), если для любой точки $z^* \in \partial A$ существует такое представление (2.1), в котором z^* есть точка типа I или типа II и для любой точки типа I среди соответствующих конусов $K^* = K_{\omega^*}$ найдется такой и для него такая точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, что $\beta \leqslant \alpha_A(z^0)$.

Возникает естественный вопрос о существовании в $\mathbb{R}^2$ замкнутых множеств, обладающих точками $z^* \in \partial A$ типа I и m-свойством. Ответ на этот вопрос положителен. Приведем пример такого множества.

П р и м е р 1. Пусть замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ ограничено дугами трех окружностей (см. рис. 4), причем концы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ внутренней дуги не совпадают.

Любая внутренняя точка z^* внутренней дуги, входящей в ∂A, является точкой типа I.

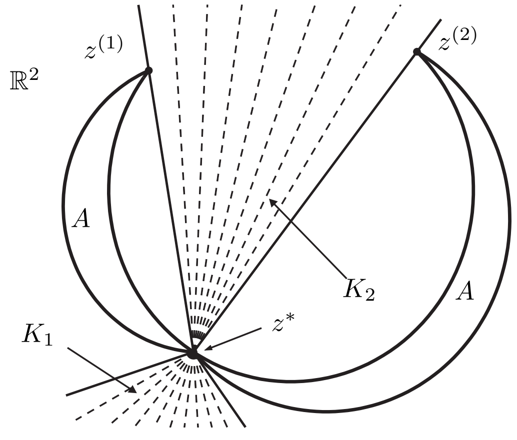

Рис. 4.

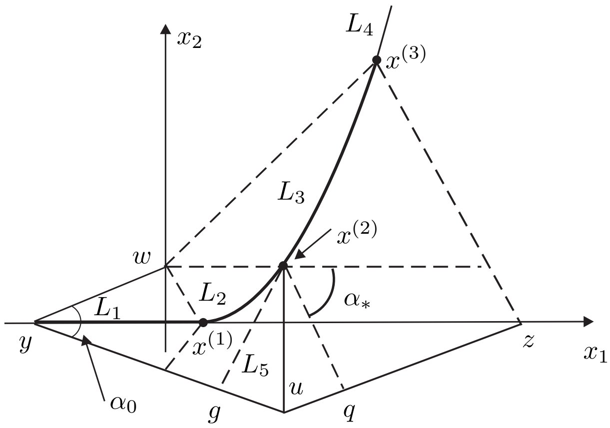

Рис. 5.

Так, например, точке z^*, принадлежащей всем трем дугам одновременно, соответствует конус $Q_A(z^*) = \mathrm{cl}\big(\mathbb{R}^2 \backslash K_A(z^*)\big) = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — замкнутые выпуклые конусы с вершиной z^*. Конусы K_1 и K_2 имеют непустые внутренности и не совпадают с полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$. Видим, что конус $K^* = K_2$ имеет соответствующий угол $\beta = \beta(y^*) < \pi$. С другой стороны, $\alpha_A = \alpha_A(z^0) = \pi$ для точки $z^0 = \dfrac{z^{(1)} + z^{(2)}}{2}$.

Точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, а также внутренние точки двух внешних дуг, входящих в ∂A, являются точками типа II.

Видим, что множество A обладает m-свойством. $\square$

Приведенный пример показывает, что совокупность замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством, непуста. Нетрудно убедиться в том, что таких множеств A в $\mathbb{R}^2$ много. В связи с этим спрашивается: может быть, все замкнутые множества A в $\mathbb{R}^2$, у которых $z^* \in \partial A$ суть точки типа I или типа II, обладают m-свойством? Приведем пример, показывающий, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример 2. Основу конструкции составляет трехзвенная ломаная X с узлами в точках $w = (0, b)$, $y = (-c, 0)$, $u = (d, -e)$, $z = (2d + c, 0)$, где параметры $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$; их значения определим ниже. Построим характеристическое множество $L(X)$, состоящее из точек, имеющих не менее двух проекций (ближайших точек) на ломаной X. Линейная структура X определяет геометрию характеристического множества. $L(X)$ является объединением одномерных и нульмерных многобразий в виде дуг парабол, открытых отрезков (отрезков без концов), полупрямых, точек и содержит (см. рис. 5):

- конечную совокупность $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\right\}$ точек склейки одномерных многообразий;
- открытый отрезок L_1 биссектрисы угла, образованного звеньями wy и yu ломаной X;
- дугу L_2 параболы, фокус которой совпадает с точкой w, а директриса — с осью Ox_1;
- дугу $L_3 = x^{(2)}x^{(3)}$ параболы, состоящую из точек, равноудаленных от точки w и звена uz ломаной X;
- полупрямую L_4 с крайней точкой $x^{(3)}$, состоящую из точек, равноудаленных от концов w и z ломаной X;
- открытый отрезок $L_5 = ux^{(2)}$ биссектрисы угла, образованного звеньями yu и uz ломаной X.

Изучим поведение функции $\alpha_X(\cdot)$ на характеристическом множестве $L(X)$ и оценим сверху ее множество значений.

Выделим особо точку бифуркации $x^{(2)}$ — единственную точку из $L(X)$, имеющую не две, а три различные проекции на ломаную X. Одной из проекций является w, другую обозначим как g, третью проекцию обозначим как q. Проекции w, g и q упорядочены против часовой стрелки

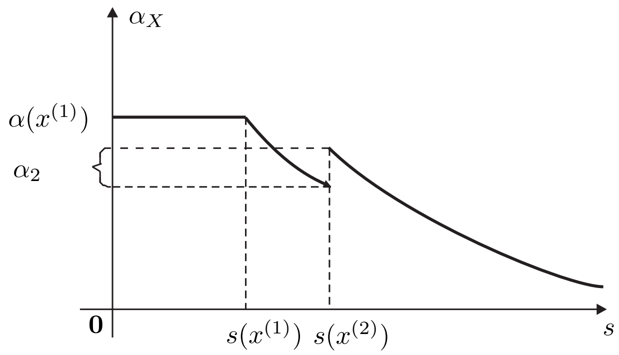

Рис. 6.

относительно точки $x^{(2)}$. Пусть углы $\alpha_1 = w\widehat{x^{(2)}}g$, $\alpha_2 = g\widehat{x^{(2)}}q$, тогда $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$. Заметим, что за счет надлежащего выбора значений параметров b, c, d, e угол $\alpha_X(x^{(2)})$ можно сделать меньше любой наперед заданной положительной константы.

Функция $\alpha_X(\cdot)$, будучи рассмотренной на кривой $L(y) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, в точке $x^{(2)}$ терпит разрыв. В этой точке происходит скачок значений функции на величину $\alpha_2 > 0$ при движении вдоль $L(y)$ в направлении от $x^{(1)}$ до $x^{(2)}$. График сужения $\alpha_X(\cdot)$ на $L(y)$ при натуральной параметризации $s = s(x)$ этой кривой представлен на рис. 6. Аналогичным образом функция $\alpha_X(\cdot)$ ведет себя вдоль другой характеристической линии $L(u) = L_5 \cup \{x^{(2)}\}$ при движении вдоль $L(u)$ в направлении от u до $x^{(2)}$. Здесь также в точке $x^{(2)}$ происходит скачок значений функции, но на величину $\alpha_1 > 0$. За счет выбора параметров углы α_1 и α_2, а вместе с этим и угол $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$ можно сделать меньше любой малой положительной величины. Примем $b = 1/2$, $c = 1$. Потребуем, чтобы $\dfrac{e}{d+c} = 1/2$. Тогда $x^{(1)} = (1/4, 0)$. Найдем значение параметра d, при котором парабола с фокусом в точке w и директрисой, определяемой звеном yu ломаной X, проходит через точку $x^{(2)} = (d, 1/2)$. Подставив $b = 1/2$, $c = 1$ в уравнение параболы $2b(d+c)^2x_2 - (d+c)^2x_1^2 + e\big(2(d+c)x_1x_2 + 2c(d+c)x_2 + 2ecx_1 + 2bex_2 - ex_2^2\big) = (d+c)^2b^2 + e^2(b^2 - c^2)$, учитывая соотношение $\dfrac{e}{d+c} = 1/2$, получим квадратное уравнение $d^2 - d - 1 = 0$. Откуда $d = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда $e = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$, точки $x^{(2)} = \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$; $x^{(3)} = \Big(\dfrac{51+24\sqrt{5}}{8(3+\sqrt{5})}, \dfrac{37+16\sqrt{5}}{4(3+\sqrt{5})}\Big) \approx (2.498, 3.474)$.

Докажем, что при таком выборе параметров, выполняется строгое неравенство

$$\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)}).$$

Обозначим через α_0 угол между звеньями wy и yu ломаной X. Имеем $\operatorname{tg}\Big(\dfrac{\alpha_0}{2}\Big) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{e}{d+c} = 1/2$. Отсюда $\alpha_0 = 2\operatorname{arctg} 1/2$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{2\cdot 1/2}{1-(1/2)^2} = 4/3$, то $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 4/3$. Обозначим через α_* дополнение угла $\alpha(x^{(2)})$ до π, т. е. $\alpha_* = \pi - \alpha(x^{(2)})$. Из подобия прямоугольных треугольников (см. рис. 5) получаем, что $\operatorname{tg}\alpha_* = c/b = 2$. Тогда $\alpha_* = \operatorname{arctg} 2$. Отсюда $\alpha_X(x^{(1)}) = \pi - \alpha_0 = \pi - \operatorname{arctg} 4/3$, $\alpha_X(x^{(2)}) = \pi - \alpha_* = \pi - \operatorname{arctg} 2$. Требуемое неравенство $\alpha_X(x^{(1)}) > \alpha_X(x^{(2)})$ доказано.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_1 \cup L_2$ при ее обходе в направлении от точки y до точки $x^{(2)}$:

$$\alpha_X(x) \leqslant \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L_1 \cup L_2.$$

Аналогично можно показать, что $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(3)}\}$ при ее обходе в направлении от точки $x^{(2)}$ до точки $x^{(3)}$. Стало быть, для всех точек кривой $L(y)$

выполняется оценка

$$\alpha_X(x) \leqslant \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(y).$$

Осталось заметить, что функция $\alpha_X(\cdot)$ на открытом отрезке L_5 постоянна, причем для всех точек $x \in L_5$ справедливо равенство $\alpha_X(x) = \alpha_0 = \operatorname{arctg} 4/3$. Поскольку $\alpha_0 < \alpha_X(x^{(2)})$, а $\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)})$, то для всех точек кривой $L_5 \cup x^{(2)}$ справедливо неравенство $\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)})$. В итоге получаем оценку

$$\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(X).$$

Опираясь на полученные результаты, построим невыпуклое компактное множество A, не обладающее m-свойством.

Для этого сконструированную ломаную X дополним до замкнутой линии выпуклой кривой, соединяющей точки w и z. В качестве такой кривой выберем, например, дугу $\overline{X}$ эллипса, проходящего через точки w и z. Замкнутая кривая $X \cup \overline{X}$ является кусочно-гладкой и ограничивает компактно невыпуклое множество, которое обозначим через A (см. рис. 7). Нетрудно видеть, что характеристическое множество $L(A)$ множества A совпадает с $L(X)$.

Поскольку $\alpha_A(x) = 0$, когда $x \in \mathbb{R}^2 \setminus L(A)$ (в силу единственности проекции точки x на множество A), и $\alpha_A(x) \leqslant \alpha_A(x^{(1)})$, когда $x \in L(A)$ (обоснование приведено выше), то

$$\alpha_A = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(x) = \alpha_A(x^{(1)}) = \pi - \operatorname{arctg} 4/3.$$

Рассмотрим $Q_A(y)$ — замыкание дополнения конуса возможных направлений множества A в точке $y \in \partial A$. В данном случае y является точкой типа I, конус $Q_A(y) = wyz$, т. е. состоит из одной выпуклой компоненты K_1, $K_1 = Q_A(y)$. На биссектрисе конуса K_1 выберем точку $y^* \neq y$, вычислим угол

$$\beta(y^*) = \pi - \operatorname{arctg} 1/2.$$

Очевидно, что

$$\alpha_A < \beta(y^*). \qquad \square$$

Вернемся к изучению замкнутых множеств A в $\mathbb{R}^2$, обладающих m-свойством. Дадим еще одно определение.

О п р е д е л е н и е 2.7. Будем говорить, что замкнутое множество A в $\mathbb{R}^2$ обладает усиленным m-свойством, если для любой ε-окрестности A_ε, $\varepsilon \in [0, \infty)$ выполняется m-свойство.

Здесь обозначено $A_0 = A$.

Приведем пример замкнутого множества в $\mathbb{R}^2$, обладающего усиленным m-свойством.

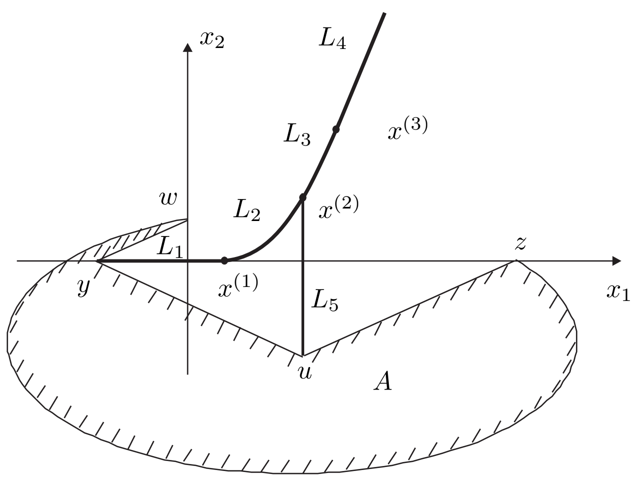

Рис. 7.

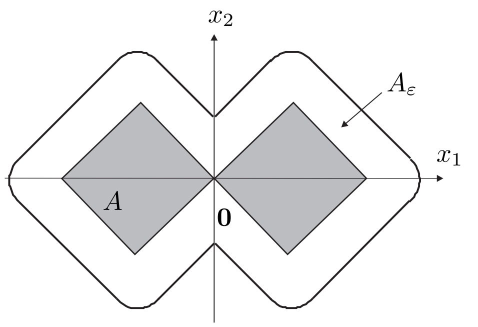

Рис. 8.

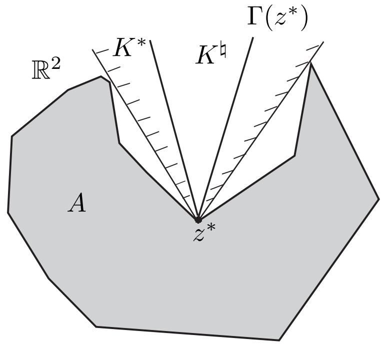

Рис. 9.

П р и м е р 3 представлен на рис. 8.

Сформулируем и докажем некоторые утверждения относительно α-множеств в конечномерных евклидовых пространствах. Эти утверждения, подобные некоторым утверждениям выпуклого анализа, представляют собой достаточные условия, и в некоторых из них участвует m-свойство. В формулируемых ниже теоремах 1, 2 множество A содержится в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1 (о существовании опорной α-гиперплоскости). *Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0,\pi)$ обладает m-свойством и $z^* \in \partial A$. Тогда существует хотя бы одна α-гиперплоскость, опорная к A в точке z^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $z^* \in \partial A$. Тогда по условиям теоремы существует такое представление (2.1), согласно которому z^* есть точка типа I или типа II.

Если z^* — точка типа I, то среди соответствующих конусов K_{ω^*}, $\omega^* \in \Omega$ в представлении (2.1) найдется конус $K^* = K_{\omega^*}$, а также точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ такие, что $\beta \leqslant \alpha_A(z^0)$. Так как A есть α-множество, то $\alpha_A(z^0) \leqslant \alpha$ и, значит, $\beta \leqslant \alpha$. Тогда угол при вершине z^* конуса K^* равен $\pi-\beta \geqslant \pi-\alpha$. Это неравенство означает, что в K^* можно вложить замкнутый выпуклый конус $K^\natural$ с вершиной z^* и углом $\pi-\alpha$ при вершине (см. рис. 9).

Граница $\partial K^\natural$ конуса $K^\natural$ есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$. Введем обозначения $\Gamma(z^*) = \partial K^\natural$, $\Phi^+(z^*) = K^\natural$ и $\Phi^-(z^*) = \mathrm{cl}\big(\mathbb{R}^2 \setminus K^\natural\big)$. Множества $\Phi^+(z^*)$ и $\Phi^-(z^*)$ суть α-полупространства в $\mathbb{R}^2$, соответствующие α-гиперплоскости $\Gamma(z^*)$. Учитывая $A \subset \Phi^-(z^*)$, $z^* \in \partial A$, получаем: $\Gamma(z^*)$ — опорная к A в точке z^* α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2 (о сильной отделимости точки и α-множества). *Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0,\pi)$ обладает усиленным m-свойством и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Тогда $\{z^*\}$ и A сильно α-отделимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A замкнуто в $\mathbb{R}^2$ и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, то $\rho(z^*) = \min\limits_{z\in A} \|z-z^*\| = \varepsilon > 0$. В силу утверждения 2 выполняется $\alpha_\varepsilon = \alpha_{A_\varepsilon} \leqslant \alpha < \pi$ и, значит, $B = A_\varepsilon$ — регулярное множество в $\mathbb{R}^2$. Тогда множества A и B удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно, $z^* \in \partial A_\varepsilon$. Так как A обладает усиленным m-свойством, то A_ε обладает m-свойством. Значит, по теореме 1 существует опорная в точке z^* к A_ε α_ε-гиперплоскость $\Gamma^\varepsilon(z^*)$. Множество A_ε содержится в одном из замкнутых полупространств $\widehat{\Phi}^-(z^*)$, $\widehat{\Phi}^+(z^*)$, соответствующих α_ε-гиперплоскости $\Gamma^\varepsilon(z^*)$. Пусть, для определенности, $A_\varepsilon \subset \widehat{\Phi}^+(z^*)$.

На основании доказательства теоремы 1 считаем, что $\widehat{\Phi}^-(z^*)$ — выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$ с углом $\pi-\alpha_\varepsilon$ при вершине z^*. Так как $\alpha_\varepsilon \leqslant \alpha$, то $\pi-\alpha \leqslant \pi-\alpha_\varepsilon$ и, значит, в конус $\widehat{\Phi}^-(z^*)$ можно вложить некоторый выпуклый замкнутый конус $K(z^*)$ с углом $\pi-\alpha$ при вершине z^*. По построению конуса $K(z^*)$ его граница $\Gamma(z^*) = \partial K(z^*)$ есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ (см. рис. 10). Пространство $\mathbb{R}^2$ разбивается α-гиперплоскостью $\Gamma(z^*)$ на два замкнутых полупространства $\Phi^-(z^*) = K(z^*) \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\Phi^+(z^*) \in \mathcal{A}_\alpha$, причем $\{z^*\} \subset \Phi^-(z^*)$, $A_\varepsilon \subset \Phi^+(z^*)$.

Рассмотрим теперь множество $\Phi^-(z^*)_\rho$ — ρ-окрестность множества $\Phi^-(z^*)$, где $\rho = \varepsilon/2 > 0$. Полагаем $\Gamma = \partial\big(\Phi^-(z^*)_\rho\big)$ (см. рис. 11).

Множество Γ есть α-гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$, которая разбивает $\mathbb{R}^2$ на два полупространства $\Phi^- = K(z^*)_\rho \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\Phi^+ \in \mathcal{A}_\alpha$ такие, что $\{z^*\}_\rho \subset \Phi^-$, $A_\rho \subset \Phi^+$. Теорема 2 доказана. $\square$

Отметим, что тематика исследований, в рамках которой возникают вопросы относительно структуры пересечений множеств из $\mathcal{A}_\alpha$ (или из $\mathcal{B}_\alpha$), является заслуживающей внимания. Так, вопросы относительно структуры пересечений множеств из $\mathcal{A}_\alpha$ (или из $\mathcal{B}_\alpha$) возникают в ходе доказательства некоторых утверждений об отделимости α-множеств в $\mathbb{R}^n$.

Теперь перейдем к изучению вопроса об α-отделимости непересекающихся множеств A и B из $\mathbb{R}^n$ ($A \in \mathcal{B}_\alpha$, $B \in \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$).

Имеет место

Гипотеза. *Пусть A и B из $\mathbb{R}^n$ ($A \in \mathcal{B}_\alpha$, $B \in \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0,\pi)$) таковы, что $\rho(A,B) = \inf\limits_{(a,b)\in A\times B} \|a-b\| \geqslant \gamma > 0$. Тогда существует гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$, сильно разделяющая A и B.*

В теореме 2 рассмотрен вопрос о сильной α-отделимости точки и α-множества в $\mathbb{R}^2$. Ситуация непересекающихся одноточечного множества и α-множества в $\mathbb{R}^2$ является частной по отношению к ситуации двух непересекающихся множеств из совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, представленной в гипотезе. Теорему 2 можно рассматривать как подтверждение гипотезы в одном, весьма частном, случае.

Рассмотрим еще одну ситуацию, связанную с вопросом о сильной α-отделимости, действующую в пользу гипотезы.

Пусть заданы функции $f(x)\colon M \mapsto \mathbb{R}^1$ и $g(x)\colon M \mapsto \mathbb{R}^1$, липшицевы на M с константой $L \in (0, \infty)$, где M — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$.

Введем множества $A = \operatorname{epi} f(\cdot) = \big\{(x,y)\colon x \in M; y \geqslant f(x)\big\}$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot) = \big\{(x,y)\colon x \in M; y \leqslant g(x)\big\}$, относительно которых предполагаем $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\big(f(x) - g(x)\big) = \gamma > 0$.

Для нас представляет интерес вопрос о сильной α-отделимости множеств A и B из $\mathbb{R}^{n+1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть скалярные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на замкнутом множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, липишицевы на M с константой $L \in (0,\infty)$ и $\inf\limits_{x\in M}\big(f(x) - g(x)\big) = \gamma > 0$. Тогда в $\mathbb{R}^{n+1}$ существует гиперплоскость $\Gamma^* \in \mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha/2 = L$, сильно $\mathcal{B}_\alpha$-разделяющая множества $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$, и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.*

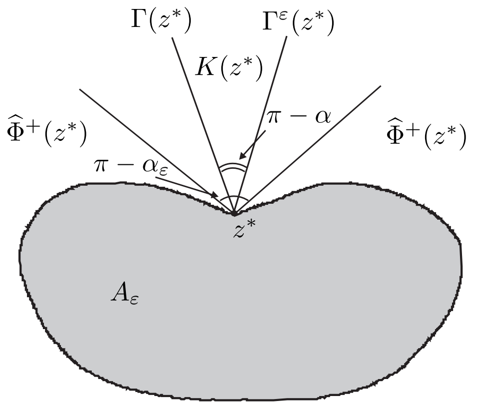

Рис. 10.

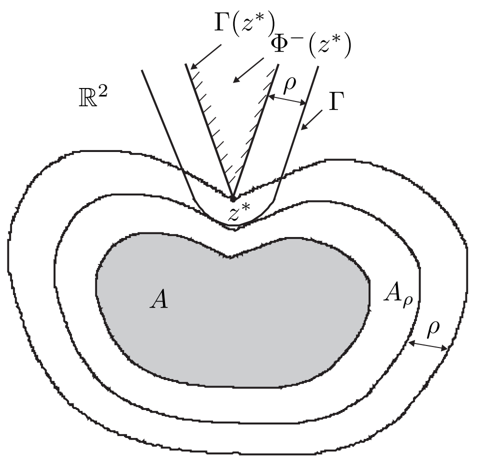

Рис. 11.

Доказательство. Сначала докажем утверждение для случая $M = \mathbb{R}^n$. В связи с этим выберем для определенности из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ одну — функцию $f(x)$ и введем множество $\operatorname{gr} f(\cdot) = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n\colon y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Каждой точке $z^* = (x^*, y^*) \in \operatorname{gr} f(\cdot)$ сопоставим конус $K(z^*) = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n, |y - f(x^*)| \leqslant L\|x - x^*\|\}$, состоящий из двух замкнутых выпуклых конусов $K^+(z^*) = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant y - f(x^*) \leqslant L\|x - x^*\|\}$ и $K^-(z^*) = \{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n, -L\|x - x^*\| \leqslant y - f(x^*) \leqslant 0\}$.

Для определенности сосредоточим внимание на конусе $K^+(z^*)$ и выделим в нем какую-либо пару крайних лучей Λ_* и Λ^*, составляющую максимальный угол ϑ по сравнению с другими парами крайних лучей конуса $K^+(z^*)$. Угол ψ, который составляет каждый из лучей Λ_* и Λ^* с подпространством $\mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, равен $(\pi - \vartheta)/2$.

Пусть Λ — центральный луч конуса $K^+(z^*)$, составляющий равные углы с крайними лучами конуса $K^+(z^*)$, а z $(z \neq z^*)$ — некоторая точка на Λ и α — угол между перпендкулярами, восстановленными из z к Λ_* и Λ^*. Угол $\alpha = 2\psi = \pi - \vartheta$ не зависит от выбора точки z на луче Λ. Здесь $\psi = \operatorname{arctg} L$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Множества* $\operatorname{hypo} f(\cdot)$, $\operatorname{epi} f(\cdot)$ *и* $\operatorname{gr} f(\cdot)$ *в* $\mathbb{R}^{n+1}$ *суть элементы совокупности* $\mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$.

Доказательство. Для доказательства леммы выберем произвольную точку $z^0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$. Пусть, например, $z^0 \in \operatorname{epi} f(\cdot)$. Обозначим через z^* какую-либо проекцию точки z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$, считая при этом для простоты рассуждений, что $z^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Точка z^* расположена в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ строго ниже точки z^0, т. е. вектор $s = z^0 - z^*$ удовлетворяет неравенству $\langle s, e\rangle > 0$, где $e = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим через $\Pi_s(z^*) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \langle s, z\rangle = 0\}$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, опорную к шару $O_r(z^0) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \|z - z^0\| \leqslant r\}$ в точке $z^* = \mathbf{0}$; здесь $r = \|z^0\|$.

Введем также конус Булигана $T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big) = \Big\{h \in \mathbb{R}^{n+1}\colon \liminf\limits_{\lambda\downarrow 0} \rho\big(h, \lambda^{-1}(\operatorname{gr} f(\cdot) - z^*)\big) = 0\Big\}$ в точке z^* (см, например, [10; 11]); здесь $\rho(h, H)$ — расстояние от $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ до замкнутого множества $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Множества $O_r(z^0)$, $\Pi_s(z^*)$ и $T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ представлены на рис. 12.

Пусть $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ — некоторые множества в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, имеющие вид графиков скалярных функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $\Phi^{(1)}$ расположено под $\Phi^{(2)}$, если для любых $(x, y^{(1)}) \in \Phi^{(1)}$ и $(x, y^{(2)}) \in \Phi^{(2)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ верно $y^{(1)} \leqslant y^{(2)}$.

Множества $\Phi^{(1)} = \big\{(x,y)\colon x \in \mathbb{R}^n, y = \inf\{y^{(1)}\colon (x, y^{(1)}) \in T(\operatorname{gr} f; z)\}\big\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ имеют как раз вид графиков скалярных функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, и, кроме того, $y^{(1)} \leqslant y^{(2)}$ для любых

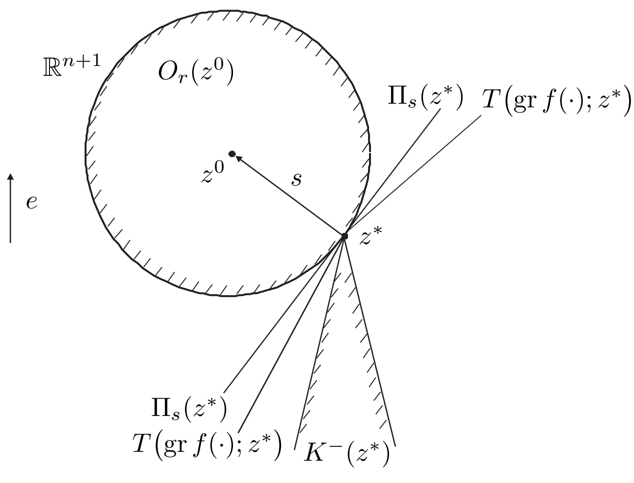

Рис. 12.

$\big(x, y^{(1)}\big) \in T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ и $\big(x, y^{(2)}\big) \in \Pi_s(z^*)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В противном случае для некоторого направления $\Lambda_h = \{\lambda h \colon \lambda \geqslant 0\}$ конуса $T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ было бы $\langle s, h\rangle > 0$, что повлекло бы за собой соотношение $\operatorname{gr} f(\cdot) \cap \operatorname{int} O_r(z^0) \neq \varnothing$, противоречащее определению точки z^*.

Обозначим через $T^-\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ и $\Pi_s^-(z^*)$ множества всех точек в $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащих не выше множеств $\Phi^{(1)} = \big\{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}^n, y = \inf\{y^{(1)} \colon (x, y^{(1)}) \in T(\operatorname{gr} f; z)\}\big\}$ и $\Phi^{(2)} = \Pi_s(z^*)$ соответственно:

$$T^-\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big) = \big\{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}^n, y \leqslant y^{(1)}, \text{ где } (x, y^{(1)}) \in \Phi^{(1)}\big\},$$

$$\Pi_s^-(z^*) = \big\{(x, y) \colon x \in \mathbb{R}^n, y \leqslant y^{(2)}, \text{ где } (x, y^{(2)}) \in \Phi^{(2)}\big\}.$$

Так как $T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ расположен под $\Pi_s(z^*)$, то справедливо

$$T^-\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big) \subset \Pi_s^-(z^*) = \big\{z \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \langle s, z\rangle \leqslant 0\big\}. \tag{2.2}$$

Далее, конус $K^-(z^*)$, согласно определению, расположен под $T\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big)$ и, значит,

$$K^-(z^*) \subset T^-\big(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*\big). \tag{2.3}$$

Из включений (2.2), (2.3) следует

$$K^-(z^*) \subset \Pi_s^-(z^*). \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), получаем, что s есть вектор внешней нормали к $K^-(z^*)$ в точке $z^* = \mathbf{0}$, т. е. $s \in K^0(z^*) = \big\{\overline{s} \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \langle \overline{s}, \overline{k}\rangle \leqslant 0 \ \ \forall \overline{k} \in K^-(z^*)\big\}$.

Конус $K^0(z^*)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, нормальный к конусу $K^-(z^*)$, имеет максимальный угол между крайними лучами (при переборе пар крайних лучей конуса), равный $\alpha = \pi - \vartheta$. Отсюда следует $z^* - z^0 = -s \in -K^0(z^*)$. Точка z^* в рассуждениях была выбрана произвольно среди ближайших точек к z^0 в $\operatorname{gr} f(\cdot)$. Тем самым показано, что все векторы $z^* - z^0$, (z^* — ближайшая точка к z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$) удовлетворяют включению $z^0 - z^* \in -K^0(z^*)$. Значит, угол $(s' \hat{,} s'')$ между любыми векторами s' и s'' вида $p(z^0) - z^0$ удовлетворяет неравенству $(s' \hat{,} s'') \leqslant \alpha$; здесь обозначено $p(z^0)$ — проекция точки z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$.

В итоге показано, что для любой точки $z^0 \in \operatorname{epi} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$ выполняется $\alpha_{\operatorname{hypo} f(\cdot)}(z^0) \leqslant \alpha$ и, значит, $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$. Аналогично показывается $\alpha_{\operatorname{epi} f(\cdot)}(z^0) \leqslant \alpha$ для любой точки $z^0 \in \operatorname{hypo} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$ и, значит, $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Из $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ следует $\operatorname{gr} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$. Лемма доказана. □

Также имеют место $\operatorname{epi} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{hypo} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\operatorname{gr} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Возвратимся теперь к условию о сильной α-отделимости множеств $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ в рамках условий, наложенных на $f(x)$ и $g(x)$ в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$.

Введем функцию $h(x) = 1/2\big(f(x) + g(x)\big)$, $x \in M = \mathbb{R}^n$.

Функция $h(x)$ липшицева на $\mathbb{R}^n$ с той же самой константой L, что и функции $f(x)$, $g(x)$. Поэтому в соответствии с леммой 1 множество $\Gamma = \operatorname{gr} h(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ есть элемент совокупности $\mathcal{B}_\alpha$ с константой α, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$, той же самой, что и множества A и B. Кроме того, при $\rho \in (0, \gamma/2)$ множества $A^\rho = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in \mathbb{R}^n, y \leqslant f(x) - \rho\big\}$ и $B^\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in \mathbb{R}^n, y \geqslant g(x) + \rho\}$ удовлетворяют включениям

$$A^\rho \subset \Phi^+, \ B^\rho \subset \Phi^-; \tag{2.5}$$

здесь $\Phi^+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in \mathbb{R}^n, y \geqslant h(x)\big\}$ и $\Phi^- = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x \in \mathbb{R}^n, y \leqslant h(x)\big\}$ — замкнутые полупространства, на которые гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$ разбивает $\mathbb{R}^{n+1}$.

Принимая во внимание липшицивость функции $h(x), x \in \mathbb{R}^n$, по $\rho \in (0, \infty)$ можем подобрать такое $\varepsilon \in (0, \infty)$, что $A_\varepsilon \subset A^\rho$ и $B_\varepsilon \subset B^\rho$.

Из (2.5) и последних включений следует

$$A_\varepsilon \subset \Phi^+, \ B_\varepsilon \subset \Phi^- \tag{2.6}$$

при некотором $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Вместе с тем утверждение теоремы 3 доказано в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$. $\square$

Воспользовавшись этим результатом, докажем теорему 3. Итак, пусть выполнены условия теоремы 3.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество из условий теоремы 3. Введем функции $f^*(x) = \inf\limits_{y \in M} \{f(y) + L\|x - y\|\}$ и $g^*(x) = \inf\limits_{y \in M} \{g(y) + L\|x - y\|\}$, определенные на $\mathbb{R}^n$.

Справедливо следующее утверждение (см, например [12, с. 626]).

Лемма 2. *Функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ липшицевы на $\mathbb{R}^n$ с константой L, той же самой, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на M.*

Таким образом, функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ представляют собой продолжения функций $f(x)$ и $g(x)$ с множества M на все пространство $\mathbb{R}^n$ с сохранением константы Липшица.

Заметим также, что поскольку при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in M$ выполняется

$$f(y) + L\|x - y\| \geqslant g(y) + L\|x - y\|, \quad f(y) - g(y) \geqslant \gamma > 0,$$

то $f^*(x) - g^*(x) \geqslant \gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

В соответствии с рассмотренным частным случаем $M = \mathbb{R}^n$ получаем, что множества $A^* = \operatorname{epi} f^*(\cdot)$ и $B^* = \operatorname{hypo} g^*(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ суть элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$. Вместе с ними $\operatorname{gr} f^*(\cdot)$ и $\operatorname{gr} g^*(\cdot)$ — элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$.

Тогда функция $h^*(x) = 1/2\,\big(f^*(x)+g^*(x)\big)$, $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{gr} h^*(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$, и при этом гиперплоскость $\Gamma^* = \operatorname{gr} h^*(\cdot)$ сильно $\mathcal{B}_\alpha$-разделяет множества A^* и B^* в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

По определению функций $f^*(x)$ и $g^*(x)$ имеем $A \subset A^*, B \subset B^*$, и поэтому гиперплоскость Γ^* сильно $\mathcal{B}_\alpha$-разделяет множества A и B в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 3 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. В ходе доказательства теоремы 3 было установлено, что в частном случае $M = \mathbb{R}^n$ множества $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ суть элементы совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$.

Возникает естественный вопрос: “Являются ли в общем случае множества A и B элементами совокупности $\mathcal{B}_\alpha$?”. Этот вопрос сводится к следующему: “Пусть $Z_M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in M, y \in \mathbb{R}\}$ — замкнутый цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ с основанием $M^* = \{(x, 0) \colon x \in M\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Являются ли множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ элементами совокупности $\mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$?”.

Очевидно, что без дополнительных ограничений на M ответ на этот вопрос отрицателен. Например, если $M \subset \mathbb{R}^n$ есть элемент совокупности $\mathcal{A}_{\alpha^*}$, где $\alpha < \alpha^* \leqslant \pi$, то множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ не будут элементами совокупности $\mathcal{B}_\alpha$.

В связи с этим отметим, что даже в таком простом случае, когда A представлено в виде $Z_M \cap \operatorname{gr} \varphi(\cdot)$, где $\operatorname{gr} \varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, а M — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, мы не можем утверждать, что $A \in \mathcal{B}_\alpha$. Для некоторых функций $\varphi(\cdot)$, $\operatorname{gr} \varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ включение $A \in \mathcal{B}_\alpha$ не выполняется, в то время как для других функций $\varphi(\cdot)$, $\operatorname{gr} \varphi(\cdot) \in B_\alpha$ включение $A \in \mathcal{B}_\alpha$ имеет место.

Итак, даже если дополнить в условиях теоремы 3 замкнутое множество M условием выпуклости, то в теореме мы не можем утверждать, что множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ являются элементами совокупности $\mathcal{B}_\alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
2. **Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.** М.: Наука, 1980. 320 с.
3. **Половинкин Е.С., Балашов М.Б.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 360 с.

4. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
5. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Токманцев Т.Б.** Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 155–177.
6. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
7. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. 2008. № 3. С. 27–37.
8. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
9. **Motzkin T.** Sur quelques proprieties caracteristiques des ensembes convexes // Rend. Accad. Naz. Linsei. Red. VI. 1935. Vol. 21. P. 562–567.
10. **Bouligand G.** Sur les surfaces depourvues de points hyperlimites // Ann. Soc. Polon. Math. 1930. Vol. 9. P. 32–41.
11. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
12. **Макаров Б.М., Подкорытов А.Н.** Лекции по вещественному анализу. Изд-во: БХВ-Петербург, 2011. 688 с.

Поступила 10.12.2015

Ушаков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Успенский Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: uspen@imm.uran.ru