ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ЗАДАЧА ПАКЕТНОГО НАВЕДЕНИЯ К ЗАДАННОМУ МОМЕНТУ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

П. Г. Сурков

Для линейной управляемой динамической системы с запаздыванием рассмотрена задача построения гарантированного позиционного наведения к заданному моменту времени при неполной информации о начальном состоянии с использованием метода пакетов программ. Доказывается критерий разрешимости задачи для случая конечного множества начальных состояний. Предложенная методика иллюстрируется на примере конкретной линейной управляемой системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы с запаздыванием.

P. G. Surkov. The problem of closed-loop guidance by a given time for a linear control system with delay.

The problem of guaranteed closed-loop guidance by a given time under incomplete information on the initial state is studied for a dynamical control system with delay by means of the method of open-loop control packages. A solvability criterion is proved for this problem in the case of a finite set of admissible initial states. The proposed technique is illustrated by a specific linear control system of differential equations with delay.

Keywords: control, incomplete information, linear systems with delay.

MSC: 34K06, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-267-276

1. Введение. Задача гарантированного позиционного наведения

Теория управления, находящая свое применение в различных сферах науки и практики, продолжает активно развиваться благодаря усилиям широкого круга исследователей. Особый интерес вызывают задачи управления различными системами при неполной информации ввиду своей распространенности. Отличительной чертой подобного рода задач является отсутствие (ненаблюдение) некоторых данных о системе во время реализации управляющего воздействия.

Неполнота информации в задачах управления может находить свое отражение как в неточном задании самой системы, наблюдении только части координат, так и неизвестном начальном состоянии (см., например, [1]). Рассматриваемая в настоящей работе задача относится к последнему типу. Для управляемой динамической системы вида

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-r) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [\sigma, T], \tag{1.1}$$

где временной отрезок $[\sigma, T]$ — ненулевой длины, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в этот момент, элементы матриц $A_0(t)$, $A_1(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а также $f(t) \in \mathbb{R}^n$ являются непрерывными функциями на $[\sigma, T]$, будет решена задача гарантированного позиционного наведения (задача (Ps)) [2–5] на заданное целевое множество к заданному моменту времени. Алгоритм ее решения основан на методе пакетов программ [6–9].

Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае конечного начального множества для метода пакетов программ в [8] был получен критерий разрешимости задачи пакетного наведения. Предложенная в ней методика была успешно применена в

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

задачах гарантированного позиционного наведения для частично наблюдаемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями при наличии действия на систему неизвестного возмущения [10], а также стохастическими дифференциальными уравнениями [11]. В работе [12] рассматривалась задача терминального управления линейной автономной управляемой системой с ограниченным управлением и неизвестным начальным состоянием, но принадлежащим заданному множеству. Авторами был предложен алгоритм построения гарантированного управления при неполной информации о начальной функции с привлечением конструкций программных пакетов, если матрица наблюдения зависит только от фазовых координат. В работе [9] для обыкновенных дифференциальных уравнений получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения к заданному моменту времени. В данной работе мы рассматриваем случай, когда в роли динамической системы выступает линейная управляемая система дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Будем предполагать, что начальное состояние системы содержится в некотором заданном конечном множестве *допустимых начальных состояний* $X_0 \subset C$, где $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ — функциональное пространство состояний [13, с. 182]. Под *программным управлением* или *программой* будет понимать всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot)\colon [\sigma,T] \to P$, $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт. Множество всех программ обозначается $\mathcal{U}$. Для любой начальной функции $\varphi(\vartheta)$ из пространства C и всякой программы $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *движением* системы из начального состояния (σ,φ) под действием программы $u(\cdot)$ будем называть решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1), определенное на отрезке $[\sigma,T]$ и удовлетворяющее условию $x_\sigma = \varphi$, где $x_\sigma(\vartheta) = x(\sigma+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r,0]$, и обозначать его как $x(\cdot|\varphi,u(\cdot))$. Далее, будем предполагать выполнение условий существования решения задачи управляемости для системы (1.1) с ограниченным управлением [14].

От функционального пространства состояний $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ перейдем к сепарабельному гильбертову пространству $H = \mathbb{R}^n \times L_2([-r,0),\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(x,y)_H = y^\top(0)x(0) + \int\limits_{-r}^{0} y^\top(s)x(s)\,ds$$

и пару $(\varphi(0),\varphi(\cdot))$ будет обозначать одним символом φ.

Пусть заданы непустое конечное множество $S \subset (\sigma,T]$ *допустимых моментов наведения* и для каждого момента $t \in S$ непустое выпуклое замкнутое *целевое* множество $M(t) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для каждого $t \in [\sigma,T]$ задана матрица наблюдения $Q(t) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, определяющая текущий сигнал наблюдения $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы.

Задача управляющей стороны — привести состояние $x(t)$ системы в какой-либо допустимый момент наведения $t \in S$ в заранее заданную ε-окрестность целевого множества $M(t)$. В процессе движения управление строится по принципу обратной связи по сигналу $y(t)$. Следуя стандартным методикам теории гарантирующего управления, позиционная стратегия подразумевает возможность коррекции управляющего воздействия $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени $\sigma = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$. В каждый момент t_i, $i = \overline{1,k-1}$, значения управления на интервале $t \in [t_i,t_{i+1})$ определяются согласно прошедшим наблюдениям и истории управления $t \mapsto u(t)$ на $[\sigma,t_i)$.

Описанная выше формализация находит отражение в следующей формулировке задачи (Ps): для произвольного, наперед заданного $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, которая для произвольной начальной функции $\varphi \in X_0$ обеспечивала бы движению системы $x(\cdot)$, исходящему в момент σ из состояния φ, попадание в ε-окрестность целевого множества $M(t)$ в некоторый момент времени $t \in S$. Для случая, когда $S = \{T\}$, в [6; 7] дана точная постановка задачи (Ps), а в [8] — с использованием упрощенной терминологии. Эта постановка естественным образом была распространена на рассматриваемый в работе случай для обыкновенных дифференциальных уравнений в [9].

2. Задача пакетного наведения

Для удобства чтения приведем некоторые определения из работы [8]. Пусть $V(\cdot,\cdot)$ — матрица-функция, являющаяся решением системы без управления

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-r)$$

и удовлетворяющая начальным условиям $V(t,s) = 0$, $t < s$, $V(t,t) = I_n$, которые определяют ее однозначно. Здесь $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Каждому допустимому начальному состоянию $\varphi \in X_0$ будет соответствовать функция

$$g_\varphi(t) = Q(t)F(t,\sigma)\varphi, \quad t \in [\sigma, T],$$

которую назовем *однородным сигналом*. Здесь линейный непрерывный функционал $F(\cdot,\sigma)$: $H \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$F(t,\sigma)\varphi = V(t,\sigma)\varphi(\sigma) + \int\limits_{\sigma-r}^{\sigma} V(t,s+r)A_1(s+r)\varphi(s)\,ds, \quad t \in [\sigma, T].$$

Множество всех допустимых начальных состояний φ, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in [\sigma, T]$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot))$; таким образом,

$$X_0(\tau|g(\cdot)) = \{\varphi \in X_0\colon g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]} = g_\varphi(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}\}, \quad \tau \in [\sigma, T].$$

Здесь и далее $g(\cdot)|_{[\sigma,\tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\sigma,\tau]$.

Переходя теперь непосредственно к управлению, приведем *условие неупреждаемости* [6]: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (\sigma, T]$ и допустимых начальных состояний φ_1, $\varphi_2 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\sigma,\tau]$ выполняется равенство $u_{\varphi_1}(t) = u_{\varphi_2}(t)$.

Семейство $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет условию неупреждаемости. Пакет программ $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ называем *наводящим*, если для любого $\varphi \in X_0$ найдется момент $t \in S$ такой, что $x(t|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \in M(t)$. Если существует наводящий пакет программ, то говорим, что *разрешима задача пакетного наведения* (задача (Pk)). В [7, теорема 2.2] для случая $S = \{T\}$ установлено, что задача (Ps) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (Pk). Данное утверждение остается справедливым и для рассматриваемого здесь более общего случая (см. также [9]).

Всякое семейство $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ элементов множества S будем называть *семейством допустимых моментов наведения*. Будем говорить, что пакет $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ программ является *наводящим с семейством допустимых моментов наведения* s, если для любого $\varphi \in X_0$ выполняется $x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \in M(s_\varphi)$. Если существует пакет программ, являющийся наводящим с семейством допустимых моментов наведения s, будем говорить, что *разрешима задача* (Pk) *с семейством допустимых моментов наведения* s. Нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. 1) *Пакет программ является наводящим тогда и только тогда, когда он является наводящим с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача* (Pk) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* (Pk) *с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

3. Постановка расширенной задачи программного наведения

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Ввиду его конечности для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k(g(\cdot)) \geqslant 1$ такой, что $\tau_{k(g(\cdot))}(g(\cdot)) = T$, где $\tau_j(g(\cdot))$,

$j = \overline{1, k(g(\cdot))}$, — моменты расслоения [8] однородного сигнала $g(\cdot)$. Введем множество $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{g(\cdot)\in G} \{\tau_j(g(\cdot))\colon j = \overline{1, k(g(\cdot))}\}$. Как следует из [8], множество $\mathcal{T} = \{\tau_1, \ldots, \tau_K\}$, где $\tau_1 < \ldots < \tau_K$.

Для каждого $k = \overline{1, K}$ введем множество

$$\mathcal{X}(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot))\colon g(\cdot) \in G\},$$

каждый элемент X_k которого назовем *кластером начальных состояний* в момент τ_k. Тогда для каждого $k = \overline{1, K}$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0:

$$X_0 = \bigcup_{X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)} X_k, \quad X_k' \cap X_k'' = \varnothing, \quad X_k', X_k'' \in \mathcal{X}(\tau_k), \quad X_k' \neq X_k''. \tag{3.1}$$

Каждый кластер $X_{k-1} \in \mathcal{X}(\tau_{k-1})$ при $k = \overline{2, K}$ представляет собой объединение конечного числа кластеров из кластерной позиции $\mathcal{X}(\tau_k)$; обозначим его как $\mathcal{X}_k(X_{k-1}) \subset \mathcal{X}(\tau_k)$; тогда

$$X_{k-1} = \bigcup_{X_k \in \mathcal{X}_k(X_{k-1})} X_k. \tag{3.2}$$

Следуя описанному в [8] подходу, будем представлять пакеты программ как расширенные программные управления. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех семейств $(u_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ векторов из P. Всякую измеримую (по Лебегу) функцию $t \mapsto (u_\varphi(t))_{\varphi\in X_0}\colon [\sigma, T] \mapsto \mathcal{P}$ назовем *расширенной программой* и всякое семейство $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ программ будем отождествлять с расширенной программой $t \mapsto (u_\varphi(t))_{\varphi\in X_0}$.

Для каждого $k = \overline{1, K}$ введем множество $\mathcal{P}_k$ всех семейств $(u_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ и любых начальных состояний φ_1, $\varphi_2 \in X_k$ выполняется равенство $u_{\varphi_1} = u_{\varphi_2}$. Расширенная программа $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ будет называться *допустимой*, если для каждого $k = \overline{1, K}$ выполняется $(u_\varphi(t))_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [\sigma, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Рассмотрим *расширенную систему*, состоящую из экземпляров системы (1.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями $\varphi \in X_0$. Каждый экземпляр имеет соответствующее начальное состояние φ и подвержен управляющему воздействию по некоторой программе $u_\varphi(\cdot)$. Таким образом, расширенная система имеет вид

$$\dot{x}_\varphi(t) = A_0(t)x_\varphi(t) + A_1(t)x_\varphi(t-r) + B(t)u_\varphi(t) + f(t), \quad x_\varphi(\sigma) = \varphi, \quad \varphi \in X_0.$$

Фазовым пространством этой системы считаем *расширенное пространство* $\mathcal{R}_n$. Для произвольного $j \in \mathbb{N}$ под $\mathcal{R}_j$ будем понимать конечномерное гильбертово пространство всех семейств векторов $(l_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ из $\mathbb{R}^j$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ вида

$$\langle l', l''\rangle = \sum_{\varphi\in X_0} (l_\varphi', l_\varphi''), \quad l' = (l_\varphi')_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{R}_j, \quad l'' = (l_\varphi'')_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{R}_j,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда значение расширенных программ трактуем как элементы пространства $\mathcal{R}_m$. Для произвольного непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_j$ $(j \in \mathbb{N})$ вводим его нижнюю $\rho^-(\cdot|\mathcal{E})\colon \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ и верхнюю $\rho^+(\cdot|\mathcal{E})\colon \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ опорные функции:

$$\rho^-(l|\mathcal{E}) = \inf_{r\in\mathcal{E}} \langle l, r\rangle, \quad \rho^+(l|\mathcal{E}) = \sup_{r\in\mathcal{E}} \langle l, r\rangle, \quad l \in \mathcal{R}_j. \tag{3.3}$$

Далее $\rho^-(l|P) = \min_{u\in P}(l, u)$, $l \in \mathbb{R}^m$, — нижняя опорная функция мгновенного ресурса управления P в $\mathbb{R}^m$.

Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Под *движением* расширенной системы, соответствующим допустимой расширенной программе $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$, будем понимать функцию $t \mapsto (x(t|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0} \colon [\sigma, T] \mapsto \mathcal{R}_n$.

Расширенным целевым множеством для семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ будем называть множество $\mathcal{M}(s)$ всех семейств $(z_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $z_\varphi \in M(s_\varphi)$ для всех $\varphi \in X_0$.

Допустимую расширенную программу $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ будем называть *наводящей для расширенной системы с семейством допустимых моментов наведения* $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$, если для движения $(x(\cdot|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$, выполняется условие $(x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{M}(s)$. Соответственно *расширенная задача программного наведения* (задача (Pm)) с семейством допустимых моментов наведения s разрешима, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы с семейством допустимых моментов наведения s. Доказательство следующей теоремы проводится аналогично [8, теорема 1].

Теорема 1. 1) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ с семейством допустимых моментов наведения s тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача* (Pk) *с семейством допустимых моментов наведения s разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача* (Pm) *с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

4. Критерий разрешимости задачи (Pm)

Для каждого семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in S$ введем соответствующее ему *множество достижимости*

$$\mathcal{A}(s) = \bigl\{(x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot)))_{\varphi\in X_0} \colon (u_\varphi(\cdot)))_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{U}_p\bigr\} \tag{4.1}$$

расширенной системы. Здесь $\mathcal{U}_p$ — множество допустимых расширенных программ. Нетрудно установить справедливость следующей леммы, исходя из методики [8, лемма 5].

Лемма 2. *Для каждого семейства допустимых моментов наведения s множество $\mathcal{A}(s)$ представляет собой выпуклый компакт в $\mathcal{R}_n$.*

Пусть $R(t)$ для каждого $t \in S$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, ортогональное всем $l \in \mathbb{R}^n$ таким, что $\rho^+(l|M(t)) = +\infty$. Для каждого $t \in S$ зафиксируем выпуклый компакт $L(t) \subset R(t)$, являющийся образом единичной сферы, т. е. существуют $r_1(t) > r_2(t) > 0$ такие, что для каждого вектора $z \in R(t)$ единичной нормы при некотором $r \in [r_1(t), r_2(t)]$ выполняется $rz \in L(t)$. Для каждого семейства $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ допустимых моментов наведения множество всех $(l_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $l_\varphi \in L(s_\varphi)$ при всех $\varphi \in X_0$, обозначим через $\mathcal{L}(s)$.

Свойства множества достижимости расширенной системы и расширенного целевого множества (см. лемму 2 и [9, замечание 1]) приводят на основании теоремы об отделимости выпуклых множеств к следующему критерию разрешимости задачи (Pm) с заданным семейством допустимых моментов наведения.

Теорема 2. *Задача* (Pm) *с семейством допустимых моментов наведения s разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\max_{(l_\varphi)_{\varphi\in X_0}\in\mathcal{L}(s)} \gamma((l_\varphi)_{\varphi\in X_0}, s) \leqslant 0, \tag{4.2}$$

где

$$\gamma((l_\varphi)_{\varphi\in X_0}, s) = \rho^-((l_\varphi)_{\varphi\in X_0}|\mathcal{A}(s)) - \rho^+((l_\varphi)_{\varphi\in X_0}|\mathcal{M}(s)). \tag{4.3}$$

Следствие. *Задача* (Pk) *разрешима тогда и только тогда, когда неравенство* (4.2) *выполняется для некоторого семейства допустимых моментов наведения* s.

Доказательство с очевидностью следует из леммы 1 и теорем 1 и 2. $\square$

Для всякого семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ введем множество

$$Y_k(s) = \{\varphi \in X_0\colon s_\varphi \in (\tau_{k-1}, \tau_k]\}, \quad k = \overline{1, K}, \tag{4.4}$$

и при любом $l = (l_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{L}(s)$ положим

$$l_\varphi(s,t) = \begin{cases} l_\varphi, & t \leqslant s_\varphi, \\ 0, & t > s_\varphi, \end{cases} \quad t \in [\sigma, T], \quad \varphi \in X_0. \tag{4.5}$$

Теорема 3. *Пусть* $s = (s_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ *— семейство допустимых моментов наведения и* $l = (l_\varphi)_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{L}(s)$. *Тогда справедливы равенства*

$$\rho^+(l|\mathcal{M}(s)) = \sum_{\varphi\in X_0} \rho^+(l_\varphi|M(s_\varphi)), \tag{4.6}$$

$$\rho^-(l|\mathcal{A}(s)) = r(l,\varphi) + \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma^j \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \rho^-\Big(d_j^j(s,\xi) + \sum_{k=j+1}^{K} d_k^j|P\Big)\, d\xi + \Sigma^K \int\limits_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \rho^-(d_K^K(s,\xi)|P)\, d\xi, \tag{4.7}$$

где для произвольных $\varphi \in X_0$ *и числовой функции* $h(\cdot)$ *приняты обозначения*

$$\Sigma^j h = \sum_{X_1\in\mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_2\in\mathcal{X}_2(X_1)} \dots \sum_{X_j\in\mathcal{X}_j(X_{j-1})} h,$$

$$r(l,\varphi) = \langle l, F(s,\sigma)\varphi\rangle + \Big\langle l, \int\limits_\sigma^s V(s,z)f(z)\,dz\Big\rangle, \quad D(s,\xi) = V(s,\xi)B(\xi),$$

$$d_k^j(s,\xi) = \sum_{\varphi\in X_j\cap Y_k(s)} D^\top(s_\varphi,\xi)l_\varphi(s,\xi), \quad d_k^j = \sum_{\varphi\in X_j\cap Y_k(s)} D^\top(s_\varphi,\xi)l_\varphi, \quad k,j = \overline{1,K}.$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{M}(s)$ и верхней опорной функции (3.3) подмножества пространства $\mathcal{R}_n$ получаем (4.6). Пусть $(u_\varphi)_{\varphi\in X_0}$ — произвольная допустимая расширенная программа, тогда для произвольного $k = \overline{1,K}$ выполняется $(u_\varphi(t))_{\varphi\in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$. Поскольку $\mathcal{P}_k$ — расширенный ресурс, то для всякого $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ значения $u_\varphi(t) \in P$ для всех $\varphi \in X_k$ совпадают между собой при любом $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$. Таким образом,

$$u_\varphi(t) = u_{X_k}(t) \in P, \quad \forall\varphi \in X_k, \quad X_k \in \mathcal{X}(\tau_k), \quad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = \overline{1,K}. \tag{4.8}$$

Учитывая (3.2), для произвольного $k = \overline{2,K}$ и $\forall\varphi \in X_k$, $X_k \in \mathcal{X}_k(X_{k-1})$, $X_{k-1} \in \mathcal{X}(\tau_{k-1})$ имеем

$$u_\varphi(t) = u_{X_{k-1}}(t) \in P, \quad t \in (\tau_{k-2}, \tau_{k-1}]. \tag{4.9}$$

Используя формулу Коши для $x(\cdot|\varphi, u_\varphi(\cdot))$, получаем

$$\langle l, x(s|\varphi, u_\varphi(\cdot))\rangle = r(l,\varphi) + \Big\langle l, \int\limits_\sigma^s D(s,\xi)u_\varphi(\xi)\,d\xi\Big\rangle. \tag{4.10}$$

Из определения множеств (4.4) следует, что

$$\Big\langle l, \int\limits_\sigma^s D(s,\xi)u_\varphi(\xi)\,d\xi\Big\rangle = \sum_{k=1}^K \Omega_k,$$

где $\Omega_k = \sum_{\varphi\in Y_k(s)} \left(l_\varphi, \int_\sigma^{s_\varphi} D(s_\varphi,\xi) u_\varphi(\xi)\, d\xi \right) = \sum_{\varphi\in Y_k(s)} \int_\sigma^{s_\varphi} (D^\top(s_\varphi,\xi) l_\varphi, u_\varphi(\xi))\, d\xi$. Учитывая свойство кластеров (3.1), определение (4.5), а также равенства (4.8) и (4.9), имеем

$$\Omega_1 = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_1^1(s,\xi), u_{X_1}(\xi))\, d\xi, \quad \Omega_2 = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_2^1, u_{X_1}(\xi))\, d\xi + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (d_2^2(s,\xi), u_{X_2}(\xi))\, d\xi.$$

Продолжая аналогичным образом для $k = \overline{3, K}$, получаем

$$\Omega_k = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_k^1, u_{X_1}(\xi))\, d\xi + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (d_k^2, u_{X_2}(\xi))\, d\xi + \ldots + \Sigma^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (d_k^k(s,\xi), u_{X_k}(\xi))\, d\xi.$$

Суммируя последние выражения по k, для формулы (4.10) находим

$$\langle l, x(s|\varphi, u_\varphi(\cdot))\rangle = r(l,\varphi) + \sum_{k=1}^{K} \left(\Sigma^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (d_k^k(s,\xi), u_{X_k}(\xi))\, d\xi + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (d_k^j, u_{X_j}(\xi))\, d\xi \right).$$

По определению нижней опорной функции (3.3) множества достижимости $\mathcal{A}(s)$ расширенной системы, соответствующего семейству s допустимых моментов наведения (см. (4.1)), получаем, что $\rho^-(l|\mathcal{A}(s))$ есть точная нижняя грань значений, записанных в левой части последнего равенства, по всем расширенным программам $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi\in X_0}$. Из последнего равенства следует, что данная точная нижняя грань достигается взятием минимума по $u_{X_j}(t) \in P$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ в подынтегральном выражении каждого интеграла, записанного в правой части. В результате получаем представление (4.7). □

5. Пример

Рассмотрим линейную управляемую систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t-1) + u(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t) = (x_1(t) \quad x_2(t))^\top$. Значения управления $u(t)$ ограничены отрезком $[-1,1]$. Таким образом, имеем следующие параметры системы (1.1): $n = 2$, $r = 1$, $P = [-1,1]$, и матрицы A_0, A_1 и B имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[\sigma, T] = [0,2]$ и множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных элементов, $X_0 = \{x', x''\}$, где

$$x' = \begin{pmatrix} \varphi' & \psi' \end{pmatrix}^\top, \quad x'' = \begin{pmatrix} \varphi'' & \psi'' \end{pmatrix}^\top, \quad \varphi' = (\varphi'(0), \varphi'(\vartheta)), \quad \psi' = \psi'(0).$$

Предположим, что данные о положении системы на отрезке $[0,1]$ при движении будут недоступны, а на полуинтервале $(1,2]$ состояние системы будет полностью отслеживаться, т. е. мы имеем сигнал вида

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} (0 \quad 0)^\top, & t \in [0,1], \\ (t-1)(x_1(t) \quad x_2(t))^\top, & t \in (1,2], \end{cases}$$

который соответствует следующей непрерывной матрице наблюдения:

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1], \\ (t-1)I_2, & t \in (1,2], \end{cases}$$

где $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ — единичная матрица. Пусть задано множество допустимых моментов наведения $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Цель управления состоит в том, чтобы по имеющимся значениям сигнала сформировать программу управления системой, которая обеспечивала бы попадание координаты x_1 в отрезок $[-m, m]$, где $m = 1$, к моменту $t = 2$, т. е. в один из моментов множества S. Тогда целевым множеством будет цилиндрическое множество с ограниченным основанием

$$M(t) = \left\{(x_1 \quad x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| \leqslant m, x_2 \in \mathbb{R}\right\}, \quad t \in S.$$

Фундаментальная матрица $V(\cdot,\cdot)$ однородной системы, соответствующей системе (5.1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} = A_0 V(t,s) + A_1 V(t-1,s), \quad t \geqslant s,$$

с начальными условиями $V(t,s) = 0$, $s-1 \leqslant t < s$, $V(t,t) = I_2$.

Поскольку система (5.1) автономная, фундаментальная матрица зависит только от разности аргументов, т. е. справедливы равенства $V(t,s) = V(t-s,0) = V(t-s)$. Применяя метод шагов [15] для ее нахождения, имеем

$$V(t-s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 0 < t-s \leqslant 1, \\ \begin{pmatrix} f(t-s) & h(t-s) \\ -(t-s-1) & f(t-s) \end{pmatrix}, & 1 < t-s \leqslant 2, \end{cases}$$

где $f(t-s) = -\dfrac{1}{2}(t-s-1)^2 + 1$, $h(t-s) = -\dfrac{1}{6}(t-s-1)^3 + t - s$. Для системы (5.1) формула Коши записывается в виде

$$x(\varphi,u)(t) = V(t)\varphi(0) + \int\limits_{-1}^{0} V(t-s-1)A_1\varphi(s)\,ds + \int\limits_{0}^{t} V(t-s)Bu(s)\,ds.$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям $x' = (\varphi' \quad \psi')^\top$ и $x'' = (\varphi'' \quad \psi'')^\top$, имеют вид

$$g_{x'}(t) = Q(t)\left(V(t)x'_0 + \int\limits_{-1}^{0} V(t-s-1)A_1 x'(s)\,ds\right)$$

$$= \begin{cases} (0 \quad 0)^\top, & t \in [0,1], \\ (t-1)\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}(t-1)^2\varphi'_0 + \left(-\dfrac{1}{6}(t-1)^3 + t\right)\psi'_0 + \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} h(t-s)\varphi'(s)\,ds \\ (-t+1)\varphi'_0 + \left(-\dfrac{1}{2}(t-1)^2 + 1\right)\psi'_0 + \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} f(t-s)\varphi'(s)\,ds \end{pmatrix}, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Аналогичным образом находится $g_{x''}(t)$.

Поскольку начальные состояния различаются, $x' \neq x''$, то $\tau_1 = 1$ — первый момент расслоения каждого из этих однородных сигналов; при этом второй момент расслоения τ_2 — конечный момент $T = 2$, число K моментов расслоения однородных сигналов равно 2, кластерная позиция $\mathcal{X}(1)$ в момент $t = 1$ содержит единственное множество X_0, а кластерная позиция $\mathcal{X}(2)$ в момент $t = 2$ содержит два множества, $\{x'\}$ и $\{x''\}$.

Формула (4.3) примет вид

$$\gamma((l_{\varphi'}, l_{\varphi''}), s) = (l_{\varphi'}, F(s_{\varphi'}, 0)\varphi') + (l_{\varphi''}, F(s_{\varphi''}, 0)\varphi'') + \int\limits_0^1 \rho^-(D(s_{\varphi'}, \xi)l_{\varphi'} + D(s_{\varphi''}, \xi)l_{\varphi''}|P)\, d\xi$$

$$+ \int\limits_1^2 \rho^-(D(s_{\varphi'}, \xi)l_{\varphi'}(s, \xi)|P)\, d\xi + \int\limits_1^2 \rho^-(D(s_{\varphi''}, \xi)l_{\varphi''}(s, \xi)|P)\, d\xi - \rho^+(l_{\varphi'}|M(s_{\varphi'})) - \rho^+(l_{\varphi''}|M(s_{\varphi''})).$$

Используя определение множества $\mathcal{L}(s) \subset \mathcal{R}_2$ и с учетом того, что множество $M(t)$, $t \in S$, — цилиндрическое с ограниченным основанием, можно принять $((l_1' \quad l_2')^\top, (l_1'' \quad l_2'')^\top) = ((l' \quad 0)^\top, (l'' \quad 0)^\top)$. Далее, нам понадобятся

$$D\Big(\frac{1}{2}, \xi\Big) = \begin{cases} \Big(\dfrac{1}{2} - \xi \quad 1\Big), & \xi \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ (0 \quad 0), & \xi \in \Big(\dfrac{1}{2}, 2\Big]. \end{cases}$$

$$D\Big(\frac{3}{2}, \xi\Big) = \begin{cases} \Big(-\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{1}{2} - \xi\Big)^3 + \dfrac{3}{2} - \xi \quad -\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2} - \xi\Big)^2 + 1\Big), & \xi \in \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big], \\ \Big(\dfrac{3}{2} - \xi \quad 1\Big), & \xi \in \Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\Big], \\ (0 \quad 0), & \xi \in \Big(\dfrac{3}{2}, 2\Big]. \end{cases}$$

Следствие позволяет выполнить проверку критерия (4.2) разрешимости задачи (Ps) для некоторого семейства $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$. Множество S определяет четыре таких семейства: $s_1 = \Big\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big\}$, $s_2 = \Big\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\Big\}$, $s_3 = \Big\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\Big\}$ и $s_4 = \Big\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\Big\}$.

Принимая во внимание выражения (4.6) и (4.7), для значений функции $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'' из формулы (4.2) получаем для семейства s_2

$$\gamma((l' \quad 0)^\top, (l'' \quad 0)^\top) = l'z' + l''z'' - \int\limits_0^{1/2} \Big|\Big(\frac{1}{2} - \xi\Big)l' + \Big(-\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2} - \xi\Big)^3 + \frac{3}{2} - \xi\Big)l''\Big|\, d\xi$$

$$+ \int\limits_{1/2}^1 \Big(\frac{3}{2} - \xi\Big)|l''|\, d\xi + \int\limits_1^{3/2} \Big(\frac{3}{2} - \xi\Big)|l''|\, d\xi - m|l'| - m|l''|,$$

где $z' = 0.8$, $z'' = -1.8$. В результате находим

$$\gamma = \max_{l', l'' \in \mathcal{L}(s)} \gamma((l' \quad 0)^\top, (l'' \quad 0)^\top) = -0.176 \leqslant 0;$$

этот максимум достигается при $l' = 1$ и $l'' = -0.3$. Следовательно, критерий разрешимости (4.2) выполняется, т. е. задача (Pk) разрешима с семейством допустимых моментов наведения s_2. В качестве наводящего можно выбрать следующий пакет программ:

$$u_{x'}(t) = -1, \quad t \in [0, 2], \quad u_{x''}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ \ \ 1, & t \in (1, 2]; \end{cases}$$

используя его для управления, получаем движения

$$x_1\Big(\frac{1}{2}\Big|x', u_{x'}(\cdot)\Big) = z' + \int\limits_0^{1/2} \Big(\frac{1}{2} - \xi\Big) u_{x',x''}(\xi)\, d\xi = 0.925,$$

$$x_1\Big(\frac{3}{2}\Big|x'', u_{x''}(\cdot)\Big) = z'' + \int\limits_0^{1/2} \Big(-\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2} - \xi\Big)^3 + \frac{3}{2} - \xi\Big) u_{x',x''}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{1/2}^{3/2} \Big(\frac{3}{2} - \xi\Big) u_{x',x''}(\xi)\, d\xi = -0.928,$$

приводящие на целевое множество $M(t)$ к моменту времени $T = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МАКС Пресс, 1990.
6. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
7. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
8. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
9. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
10. **Максимов В.И.** Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1676–1685.
11. **Розенберг В.Л.** Об одной задаче управления при дефиците информации для линейного стохастического дифференциального уравнения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 292–302.
12. **Григоренко Н.Л., Кондратьева Ю.А., Лукьянова Л.Н.** Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 41–49.
13. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
14. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
15. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

Сурков Платон Геннадьевич
канд. физ.-мат. наук,
доцент
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: platon.surkov@gmail.com

Поступила 04.02.2016