

УДК 517.977

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ<sup>1</sup>****Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников**

В работе рассмотрена задача идентификации параметров динамической системы при известной зашумленной истории замеров фазовой траектории. Предложен новый подход к решению этой задачи, основанный на возможности конструирования вспомогательной задачи оптимального управления, для которой экстремали аппроксимируют историю замеров с заданной точностью. С помощью решений соответствующей характеристической системы получены оценки невязки, т.е. разности координат экстремалей и замеров фазовой траектории. Получена оценка результата идентификации параметров динамической системы. Приведен иллюстративный численный пример.

Ключевые слова: идентификация, функционал невязки, уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, характеристическая система.

N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. The method of characteristics in an identification problem.

We consider the problem of identifying the parameters of a dynamic system from a noisy history of measuring the phase trajectory. We propose a new approach to the solution based on the construction of an auxiliary optimal control problem such that its extremals approximate the measurement history with a given accuracy. Using the solutions of the corresponding characteristic system, we obtain estimates for the residual, which is the difference between the coordinates of the extremals and the measurements of the phase trajectory. An estimate for the result of identifying the parameters of the dynamic system is obtained. An illustrative numerical example is given.

Keywords: identification, residual functional, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, characteristic system.

**MSC:** 49N90, 49L20, 93B30

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-2-255-266

**1. Введение**

Теория идентификации параметров динамических систем к настоящему времени имеет богатую историю и обширную библиографию (см., например, [1, гл. 11, п. 1; 2, гл. 5]). Однако, исследования в этой области сохраняют свою актуальность, и новые методы востребованы как в теории, так и в многочисленных приложениях.

В данной работе предложен новый подход к решению задачи идентификации параметров динамической системы, использующий метод характеристик [3] для подходящего, согласованного с задачей уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Ранее подобный подход, опирающийся на метод характеристик, был предложен и обоснован авторами для решения обратной задачи теории управления, а именно, задачи реконструкции динамики и управления при известной истории зашумленных замеров траекторий управляемых систем [4]. Отметим, что в работах Ю. С. Осипова и А. В. Кряжмского [5; 6, гл. 7] был предложен другой подход к решению задачи реконструкции, также опирающийся на использование методов теории оптимального управления. Этот метод реконструирует управления с помощью регуляризированной процедуры “управления с поводырем”, динамично развивающейся *в прямом времени* и имеющей истоки в работах школы Н. Н. Красовского по теории оптимального позиционного

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14–01–00168) и Программы фундаментальных научных исследований Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления” (проект 0387-2015-0059).

управления. [7; 8]. Оба эти подхода могут быть рассмотрены как варианты метода регуляризации А. Н. Тихонова [9]. Особенностью метода, предлагаемого в данной работе, является введение и решение вспомогательной задачи оптимального управления со специально подобранным регуляризованным интегральным функционалом невязки, для которого экстремали аппроксимируют историю замеров с любой заданной точностью. Используемые при этом конструкции опираются на *попятные процедуры* динамического программирования, принцип максимума Л.С. Понтрягина [10, гл. I] и метод характеристик для соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана [11, гл. I, II].

Предлагаемый метод развит для конечномерных детерминированных систем, в которых идентифицируемые параметры входят линейно в описание динамики, а фазовые переменные могут входить нелинейно. Для решения задачи идентификации параметров динамической системы при известной истории замеров траектории системы вводится задача оптимального управления на минимум интегрального регуляризованного функционала для невязки динамики и интерполированной истории замеров. Неизвестные параметры системы трактуются как управляющие параметры. Решается задача реконструкции этих управлений. Для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, соответствующего рассматриваемой задаче оптимального управления, с помощью метода характеристик вырабатываются траектории системы, аппроксимирующие непрерывные интерполяции замеров. Порождающие их управления являются аппроксимациями искоемых параметров системы.

Разработан численный алгоритм построения этих аппроксимаций. Получены достаточные условия на параметры аппроксимаций (оценку точности измерений, регуляризирующий параметр), при согласованном стремлении которых к нулю предлагаемые аппроксимации управления сходятся в  $L_2$  к идентифицируемым параметрам.

Ниже для иллюстрации работы метода рассмотрено решение задачи идентификации параметра для одного класса механических систем при известной истории дискретных неточных замеров фазовой переменной и известной погрешности этих замеров. Приведены результаты численного решения задачи идентификации для механической колебательной системы.

Заметим, что предложенный подход может быть распространен на модели, линейные по управлениям и существенно нелинейные по фазовым переменным, в частности, для решения задачи идентификации параметров макроэкономической модели Э. Г. Альбрехта, рассмотренной в работе [12].

## 2. Постановка задачи идентификации

Рассмотрим следующую задачу идентификации для систем вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k_*^2 f(x(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}$  — фазовый вектор,  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а  $k_* > 0$  — неизвестный постоянный параметр, причем известны константы  $K_* > 0$ ,  $K^* > 0$  такие, что

$$k_*^2 \in [K_*, K^*]. \quad (2.2)$$

Известна история замеров фазовой переменной  $x(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , реализованного (базового) решения  $x_*(t)$  уравнения (2.1):  $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N)$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , причем известно, что

$$|x(t_i) - x_*(t_i)| \leq \delta, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где  $\delta > 0$  — параметр погрешности измерений.

Полагаем, что для каждого  $\delta$  известна дважды непрерывно дифференцируемая функция  $y^\delta(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — интерполяция истории замеров фазовой переменной  $x_*(t)$ , причем

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in \Pi_T : |x - y^\delta(t)| \leq 2\delta, \quad t \in [t_0, T]\}. \quad (2.4)$$

**Предположение 1.** *Полагаем, что существует такая константа  $\bar{Y}$  и такое число  $\delta_0 > 0$ , что для всех  $\delta \leq \delta_0$  выполняются следующие условия:*

$$|y^\delta(t)| \leq \bar{Y}, \quad \left| \frac{dy^\delta(t)}{dt} \right| \leq \bar{Y}, \quad \left| \frac{d^2y^\delta(t)}{dt^2} \right| \leq \bar{Y}, \quad t \in [t_0, T], \quad \bar{Y} > 0. \quad (2.5)$$

**Предположение 2.** *Полагаем, что существует отрезок  $\Phi = [\Phi_*, \Phi^*]$  такой, что для любого  $\delta \leq \delta_0$ , где  $\delta_0$  — из предположения 1, справедливо*

$$\Omega_\delta \in [t_0, T] \times \Phi,$$

где  $\Omega_\delta$  — из (2.4), а также справедливо, что существуют такие константы  $X^* > 0$ ,  $X_* > 0$ , что

$$0 \leq X_* \leq |f(x)| \leq X^* \quad \forall x \in \Phi.$$

Задача идентификации состоит в нахождении по истории  $y^\delta(\cdot)$  такой аппроксимации  $k(\delta)$  неизвестного параметра  $k_*$ , что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} k(\delta) = k_*$ .

### 3. Вспомогательные конструкции

#### 3.1. Вспомогательная задача оптимального управления

Для решения задачи идентификации (2.1), (2.5) рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для системы

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -u(t)f(x_1(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.1)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq K\}, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.2)$$

где  $K > 0$  — коэффициент, определяющий ограничения на управления, выбор которого будет пояснен ниже (см. замечание 2). Решения системы (3.1), (3.2) и уравнения (2.1) связаны соотношениями  $x_1(t) = x(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}(t)$ , роль неизвестного параметра исполняет вспомогательное управление  $u(\cdot)$ , которое выбирается так, чтобы перевести систему (3.1) из произвольного состояния  $(t_0, x_{10}, x_{20}) = (t_0, x_0) \in \Pi_T$  в состояние  $(T, x_1(T) = y_1(T), x_2(T) = y_2(T))$  и при этом минимизировать функционал невязки

$$I_{t_0, x_{01}, x_{02}}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \left[ -\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} - \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} u(t)^2 \right] dt. \quad (3.3)$$

Здесь  $y_1(t) = y^\delta(t)$ ,  $y_2(t) = \dot{y}^\delta(t)$  — аппроксимация замеров;  $\alpha > 0$  — регуляризирующий параметр,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = x(t; t_0, x_{01}, x_{02}, u(\cdot))$  — траектория системы (3.1), (3.2) вышедшая из точки  $x_1(t_0) = x_{01}$ ,  $x_2(t_0) = x_{02}$  под воздействием измеримого управления  $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$ , где  $U$  определено в (3.2). Выбор знаков минус в подынтегральном выражении позволяет в итоге получить решение рассматриваемой задачи идентификации, устойчивое к возмущению входных данных.

#### 3.2. Задача реконструкции

Задача реконструкции состоит в том, чтобы как можно более точно восстановить по истории замеров  $y(\cdot) = y^\delta(\cdot)$  базовое движение  $x_*(\cdot)$ , т. е. нужно построить измеримое управление

$u^{\delta,\alpha}(\cdot): [t_0, T] \rightarrow U$  и порождаемую им траекторию системы (3.1), (3.2)  $x^{\delta,\alpha}(\cdot) = (x_1^{\delta,\alpha}(\cdot), x_2^{\delta,\alpha}(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  такие, что

$$\|x_1^{\delta,\alpha}(\cdot) - x_*(t)\|_C = \max_{t \in [t_0, T]} |x_1^{\delta,\alpha}(t) - x_*(t)| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

$$\|u^{\delta,\alpha}(\cdot) - u_*(t)\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^T |u^{\delta,\alpha}(t) - u_*(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Здесь  $u_*(t) \equiv k_*^2$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Решение задачи реконструкции управления  $u_*(t) \equiv k_*^2$  позволяет сконструировать усреднения  $k(\delta, \alpha)$  — аппроксимации решения исходной задачи идентификации (2.1), (2.3)

$$k(\delta, \alpha) = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T u^{\delta,\alpha}(t) dt} \rightarrow k_* \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

### 3.3. Характеристическая система

Для решения задачи реконструкции используем [4; 12] решения характеристической системы для задачи (3.1)–(3.3).

Гамильтониан  $H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$  для задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = \min_{u \in U} \left[ -s_2 f(x_1)u + \frac{\alpha^2}{2} u^2 \right] + s_1 x_2 - \frac{(x_1 - y_1(t))^2 + (x_2 - y_2(t))^2}{2}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = s_1 x_2 - \frac{(x_1 - y_1(t))^2 + (x_2 - y_2(t))^2}{2} - s_2 f(x_1) u^{\alpha,\delta} + \frac{\alpha^2}{2} (u^{\alpha,\delta})^2.$$

Здесь  $u^{\alpha,\delta} = u^{\alpha,\delta}(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$  :

$$u^{\alpha,\delta} = \begin{cases} -K, & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \leq -K, \\ r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2), & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \in [-K, K], \\ K, & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \geq K, \end{cases}$$

где  $r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = -\frac{1}{\alpha^2} f(x_1) s_2$ .

Введение регуляризирующего параметра  $\alpha$  при выборе любого вектора  $s \in \mathbb{R}^2$  доставляет единственный аргумент  $u^{\alpha,\delta}$  операции минимума в выражении для гамильтониана  $H^\alpha(t, x, s)$  и тем самым обеспечивает непрерывность этого аргумента  $u^{\alpha,\delta}(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$  на  $\text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^2$ .

**Предположение 3.** Поскольку рассматриваемая задача оптимального управления носит вспомогательный характер, будем полагать, что ограничения на управления столь велики, что в построенных далее конструкциях  $r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \in [-K, K]$ ,  $t \in [t_0, T]$ .

Выполнение этого предположения позволяет использовать наиболее простую форму записи характеристической системы.

**З а м е ч а н и е 2.** Численные эксперименты в рамках рассматриваемого класса динамических систем (2.1) показали, что предположение 3 выполняется для широкого спектра моделей при достаточно малых параметрах  $\alpha$  и  $\delta$  при выборе  $K = 2X^*K^*/X_*^2$ , где  $K^*$  — из (2.2), а  $X^*$ ,  $X_*$  — из предположения 1.

Рассмотрим характеристическую систему для задачи (3.1)–(3.3) в предположении 3:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)}{\partial s_i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = -\frac{\partial H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.7)$$

с краевыми условиями

$$x_1(T) = y_1(T), \quad x_2(T) = y_2(T), \quad s_1(T) = 0, \quad s_2(T) = \xi_k. \quad (3.8)$$

В качестве точек  $\xi_k$  берутся точки из отрезка  $S_\delta = [s_{\min}, s_{\max}]$ . Границы  $s_{\min}$  и  $s_{\max}$  выбраны из условия  $|\dot{x}_2(T) - \dot{y}_2(T)| \leq \delta$  и будут пояснены ниже в (3.12).

Из предположения 3 вытекает, что характеристическая система (3.7) для задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{f(x_1(t))^2}{\alpha^2} s_2(t), \\ \dot{s}_1(t) &= \frac{s_2(t)^2 f(x_1(t))}{\alpha^2} \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x_1} + (x_1(t) - y_1(t)), \quad \dot{s}_2(t) = -s_1(t) + (x_2(t) - y_2(t)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Предположение 4.** Пусть при  $0 < \delta \leq \delta_0$ , где  $\delta_0$  – из предположения 1, и для любого  $x_1(t, \xi_k)$  – решения системы (3.9) с краевыми условиями (3.8) справедливо

$$x_1(t, \xi_k) \in \Phi \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Введем невязки:  $z_1(t) = x_1(t) - y_1(t)$ ,  $z_2(t) = x_2(t) - y_2(t)$ . Вспомнив, что  $y_2(t) = \dot{y}_1(t)$ , из (3.9) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = -\frac{f(x_1(t))^2}{\alpha^2} s_2(t) - \dot{y}_2(t), \\ \dot{s}_1(t) &= z_1(t) + \frac{s_2(t)^2 f(x_1(t))}{\alpha^2} \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x_1}, \quad \dot{s}_2(t) = -s_1(t) + z_2(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.8) получаем краевые условия

$$z_1(T) = 0, \quad s_1(T) = 0, \quad z_2(T) = 0, \quad s_2(T) = \xi_k, \quad (3.11)$$

где  $\xi_k$  выбираются из условия  $|\dot{z}_2(T)| \leq \delta$  на компакте  $S_\delta = [s_{\min}, s_{\max}]$ ,

$$s_{\min} = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) - \delta), \quad s_{\max} = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) + \delta). \quad (3.12)$$

Иначе говоря,  $\xi_k = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) + \theta_k \delta)$ ,  $\theta_k \in [-1, 1]$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть выполняются предположения 1–4 и выбрано  $(z_1(t, \xi_k), z_2(t, \xi_k), s_1(t, \xi_k), s_2(t, \xi_k))$  – решение системы (3.10) с краевым условием (3.11). Тогда существуют такие ограниченные кусочно-непрерывные функции  $\bar{z}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{z}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , которые на каждом полуинтервале непрерывности  $(\tau_{j+1}, \tau_j]$  либо имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{z}_1(t) &= z_1(\tau_j, \xi_k) + \alpha^6 M, \quad \bar{z}_2(t) = \alpha^2 M, \quad \underline{z}_1(t) = z_1(\tau_j, \xi_k) - \alpha^6 M, \quad \underline{z}_2(t) = -\alpha^2 M, \\ \bar{s}_1(t) &= \alpha^2 M, \quad \bar{s}_2(t) = \alpha^4 M, \quad \underline{s}_1(t) = -\alpha^2 M, \quad \underline{s}_2(t) = -\alpha^4 M, \end{aligned}$$

где константа  $M$  определяется из предположений 2 и 3, либо являются решениями систем вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1(t) &= \bar{z}_2(t), \quad \dot{\bar{z}}_2(t) = -X^2 \bar{s}_2(t) / \alpha^2 - \dot{y}_2(t), \\ \dot{\underline{s}}_1(t) &= \underline{z}_1(t) + \alpha^2 R, \quad \dot{\underline{s}}_2(t) = -\bar{s}_1(t) + \bar{z}_2(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где в качестве постоянной  $X$  берется одна из постоянных  $X_*$ ,  $X^*$  (где  $X_*$  и  $X^*$  — из предположения 2), а в качестве постоянной  $R$  берется либо  $R = K^2 f^*/X_*$ , либо  $R = -K^2 f^*/X_*$ , где  $f^* = \max_{x \in \Phi} |f'_x(x)|$ .

При этом имеют место следующие оценки:

$$\underline{z}_i(t) \leq z_i(t, \xi_k) \leq \bar{z}_i(t), \quad \underline{s}_i(t) \leq s_i(t, \xi_k) \leq \bar{s}_i(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.14)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Нетрудно показать, что временной отрезок  $[t_0, T]$  можно представить в виде объединения компактов  $T_1$  и  $T_2$ , где  $T_1$  содержит конечное число нулей функции  $s_2(t, \xi_k)$ , расстояние между которыми не меньше, чем  $2\alpha^4$ , а  $T_2$  представим в виде объединения конечного числа отрезков, длина каждого из которых не больше, чем  $2\alpha^4$  и каждый из которых содержит хотя бы два нуля функции  $s_2(t, \xi_k)$ , причем на компакте  $T_2$  верно

$$|s_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^4 M_1, \quad (3.15)$$

где константа  $M_1$  определяется из предположений 2 и 3.

Построение кусочно-гладких функций  $\bar{z}_i(t)$ ,  $\bar{s}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\underline{z}_i(t)$ ,  $\underline{s}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , которые будем называть соответственно верхними и нижними оценочными функциями, производится последовательно на каждом  $j$ -м отрезке  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ , принадлежащем компакту  $T_1$  либо  $T_2$ , причем  $s_2(\tau_j, \xi_k) = s_2(\tau_{j+1}, \xi_k) = 0$ . Построение ведется в обратном времени, начиная с первого участка  $[\tau_2, \tau_1]$ ,  $\tau_1 = T$ .

Если рассматриваемый отрезок  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$  принадлежит компакту  $T_2$ , то на нем выполняется условие (3.15). При этом, используя схему доказательства, аналогичную схеме доказательства леммы и теоремы из работы [13], можно доказать оценку  $|s_1(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2$ ,  $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$ , где константа  $M_2$  определяется из предположений 2 и 3. Заметим, что по теореме Ролля в силу построения рассматриваемых отрезков и свойств компакта  $T_2$  найдется хотя бы одна точка  $\tau_0 \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$  такая, что  $\dot{s}_2(\tau_0, \xi_k) = 0$ . В силу уравнений (3.10)  $z_2(\tau_0, \xi_k) = s_1(\tau_0, \xi_k) \leq \alpha^2 M_2$ . Отсюда следует, что при  $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$

$$|z_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2 + 2\alpha^4 \max_{t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]} |\dot{z}_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2 + 2\alpha^4 (\alpha^2 X^* M_1 + \bar{Y}) = \alpha^2 M_3,$$

где  $M_3 = M_2 + 2\alpha^2 (\alpha^2 X^* M_1 + \bar{Y})$ . Нетрудно показать, что

$$z_1(\tau_j, \xi_k) - 2\alpha^6 M_3 \leq z_1(t) \leq z_1(\tau_j, \xi_k) + 2\alpha^6 M_3.$$

В качестве константы  $M$  выберем константу  $M = \max\{M_1, M_2, 2M_3\}$ .

В случае, если рассматриваемый отрезок  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$  принадлежит компакту  $T_1$ , для выбранного решения  $z(t, \xi_k)$ ,  $s(t, \xi_k)$  либо  $s_2(t, \xi_k) > 0$ , либо  $s_2(t, \xi_k) < 0$  при  $t \in (\tau_{j+1}, \tau_j)$ . При этом  $s_2(\tau_{j+1}, \xi_k) = s_2(\tau_j, \xi_k) = 0$ . В таком случае построим оценочную функцию в виде решения системы (3.13) с краевыми условиями вида

$$\bar{z}_1(T) = 0, \quad \bar{z}_2(T) = 0, \quad \bar{s}_1(T) = 0, \quad \bar{s}_2(T) = \xi_k \quad (3.16)$$

для отрезка  $[\tau_2, \tau_1]$ ,  $\tau_1 = T$ . На последующих интервалах знакопостоянства функции  $s_2(t, \xi_k)$   $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$ ,  $j \geq 2$ , принадлежащих компакту  $T_1$ , в качестве краевых условий берутся условия вида

$$\bar{z}_1(\tau_j) = z_1(\tau_j, \xi_k), \quad \bar{z}_2(\tau_j) = z_2(\tau_j, \xi_k), \quad \bar{s}_1(\tau_j) = 0, \quad \bar{s}_2(\tau_j) = 0, \quad (3.17)$$

где  $z_1(t, \xi_k)$ ,  $z_2(t, \xi_k)$  — координаты решения  $z(t, \xi_k)$ ,  $s(t, \xi_k)$  системы (3.10) с краевым условием (3.11).

Доказательство справедливости оценок (3.14) для случая  $[\tau_{j+1}, \tau_j] \in T_1$  можно провести, используя схему доказательства, аналогичную схеме доказательства леммы из работы [13]. Предположения 2–4 обеспечивают существование и продолжимость решений рассматриваемых систем на каждом отрезке  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ . Лемма 1 доказана.

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** При выполнении предположений 1–4 при  $0 < \delta \leq \delta_0$  и  $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , для оценочных функций  $\bar{z}_i(t)$ ,  $\underline{z}_i(t)$ ,  $\bar{s}_i(t)$ ,  $\underline{s}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , из (3.14) справедливы соотношения:

$$|\bar{z}_1(t)| = O(\alpha^2(\delta)), |\underline{z}_2(t)| = O(\alpha^2(\delta)), |\bar{s}_1(t)| = O(\alpha^2(\delta)), |\underline{s}_2(t)| = O(\alpha^2(\delta)), t \in [t_0, T]. \quad (3.18)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** для верхних и нижних оценочных функций проводится одинаково. В силу построения оценочные функции на каждом участке  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$  совпадают с решениями системы вида (3.13) с краевыми условиями (3.16) или (3.17). При этом на интервале  $[\tau_{j+1}, \tau_j]$  константа  $X$  в (3.13) равна либо  $X^*$ , либо  $X_*$ . Для упрощения дальнейших пояснений используем общий символ  $X$ .

Рассмотрим первый участок  $[\tau_2, T]$ . Предположим, что он принадлежит компакту  $T_1$ . Краевые условия для системы (3.13) на этом участке тогда имеют вид (3.16). Построим решение этой системы в таком случае.

Общее решение системы (3.13) будем искать как сумму общего решения  $\bar{w}_O(t) = (\bar{z}_{1O}(t), \bar{z}_{2O}(t), \bar{s}_{1O}(t), \bar{s}_{2O}(t))^T$  однородной системы и частного  $\bar{w}_H(t) = (\bar{z}_{1H}(t), \bar{z}_{2H}(t), \bar{s}_{1H}(t), \bar{s}_{2H}(t))^T$  неоднородной.

Сначала найдем общее решение  $\bar{w}_O(t)$  однородной системы. Характеристический многочлен для соответствующей однородной системы будет иметь вид

$$\lambda^4 + \lambda^2 \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 0.$$

Он имеет два чисто мнимых корня и два действительных:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm r, & r &= \frac{X}{\sqrt{2}\alpha} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2/X^2}}, & \lim_{\alpha \rightarrow 0} r &= X, \\ \lambda_{3,4} &= \pm ip, & p &= \frac{X}{\sqrt{2}\alpha} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha^2/X^2}}, & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha p &= X. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Зная собственные значения характеристической матрицы (3.19), можно найти собственные векторы и с их помощью записать фундаментальную матрицу  $F(t)$ . Нетрудно показать, что в качестве такой матрицы можно взять матрицу

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} & e^{-rt} & \cos(pt) - \sin(pt) & -\sin(pt) - \cos(pt) \\ e^{rt} & e^{-rt} & -p \cos(pt) - p \sin(pt) & p \sin(pt) - p \cos(pt) \\ e^{rt} & e^{-rt} & \cos(pt)/p + \sin(pt)/p & -\sin(pt)/p + \cos(pt)/p \\ e^{rt} & e^{-rt} & p^2 \alpha^2 (\cos(pt) - \sin(pt))/X^2 & -p^2 \alpha^2 (\sin(pt) - \cos(pt))/X^2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Общее решение  $\bar{w}_O(t)$  тогда можно записать как  $\bar{w}_O(t) = F(t)C$ , где  $C$  — столбец свободных коэффициентов. Для того чтобы найти частное решение в удобном нам виде (ниже будет пояснено, почему именно такой вид удобен для доказательства), произведем замену переменных

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1H}(t) &= \bar{z}_1(t) + \alpha^2 R, & \tilde{z}_{2H}(t) &= \bar{z}_2(t), \\ \tilde{s}_{1H}(t) &= \bar{s}_1(t) - \alpha^2 \ddot{y}_2(t)/X^2, & \tilde{s}_{2H}(t) &= \bar{s}_2(t) + \alpha^2 \dot{y}_2(t)/X^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставим новые переменные в систему (3.13)

$$\dot{\tilde{z}}_{1H} = \tilde{z}_{2H}, \quad \dot{\tilde{z}}_{2H} = -X^2 \tilde{s}_2/\alpha^2, \quad \dot{\tilde{s}}_{1H} = \tilde{z}_{1H} - \dot{y}_2(t), \quad \dot{\tilde{s}}_{2H} = -\tilde{s}_{1H} + \tilde{z}_{2H}. \quad (3.22)$$

В силу того что в качестве частного решения  $\bar{w}_H(t)$  можно рассматривать решение системы (3.13) при любых краевых условиях  $\bar{w}_H(T)$ , то частное решение системы в новых переменных (3.22) будем искать при нулевых краевых условиях. Тогда по формуле Коши такое решение можно искать в форме

$$\bar{w}_H = F_H(t) \int_{t_0}^T F_H^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

где  $F_H(t)$  — нормированная фундаментальная матрица этой системы. Заметим, что получить такую матрицу можно, нормировав матрицу  $F(t)$ , поскольку однородная часть системы (3.22) совпадает с таковой, соответствующей системе (3.13). Явный вид матрицы  $F_H(t)$  был найден с помощью вычислительного пакета. В силу громоздкости полученных результатов промежуточные выкладки не приводятся. Выпишем сразу оценки для интеграла из выражения (3.23):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left( \left| -\frac{\alpha^2 p^2 r \dot{y}_2(\tau) e^{-r\tau}}{2(p^2 + r^2) X^2} \right|, \left| \frac{\alpha^2 p^2 r \dot{y}_2(\tau) e^{r\tau}}{2(p^2 + r^2) X^2} \right|, \right. \\ & \left. \left| -\frac{\alpha^3 r \sqrt{pr} \dot{y}_2(\tau) (\sin(p\tau) + \cos(p\tau))}{X^3} \right|, \left| \frac{\alpha^3 r \sqrt{pr} \dot{y}_2(\tau) (\sin(p\tau) - \cos(p\tau))}{X^3} \right| \right)^T d\tau \\ & \leq \left( \frac{\alpha^2 p^2 r}{k^2 + r^2} K_1, \frac{\alpha^2 p^2 r}{k^2 + r^2} K_2, \alpha^3 r \sqrt{pr} K_3, \alpha^3 r \sqrt{pr} K_4 \right)^T, \\ & K_1 = \bar{Y}(e^{-T} + e^{-t_0})/2X^2, \quad K_2 = \bar{Y}(e^T + e^{t_0})/2X^2, \quad K_3 = 2\bar{Y}/X^3, \quad K_4 = 2\bar{Y}/X^3. \end{aligned}$$

Если подставить эти оценки в выражение (3.23), получим следующие оценки для частного решения:

$$|\tilde{z}_{1H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{z}_{2H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{s}_{1H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{s}_{2H}(t)| \leq \alpha^4 K_{p,r}, \quad t \in [t_2, T],$$

$$K_{p,r} = \frac{p^2 r^2}{2X(p^2 + r^2)} (2r K_2 e^{-rt_0} + 2r K_1 e^{rT} + 2pX(K_3 + K_4)) = O(1/\alpha). \quad (3.24)$$

Итак, общее решение системы (3.13) записывается в виде

$$\bar{w}_O(t) = F(t) C + \bar{w}_H(t). \quad (3.25)$$

Свободные коэффициенты найдем, подставив краевые условия. Для наглядного обоснования выбора краевых условий подставим краевые условия общего вида  $\bar{z}_1(T) = z_{10}$ ,  $\bar{z}_2(T) = z_{20}$ ,  $\bar{s}_1(T) = s_{10}$ ,  $\bar{s}_2(T) = s_{20}$ :

$$\begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ s_{10} \\ s_{20} \end{pmatrix} = F(T) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1H}(T) - \alpha^2 R \\ \tilde{z}_{2H}(T) \\ \tilde{s}_{1H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2 \\ \tilde{s}_{2H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2 \end{pmatrix}.$$

Разрешив эту систему относительно коэффициентов  $c_{1,2,3,4}$ , получим

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-rT} \left( \alpha^2 (p^2 (r(s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) + (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) + rz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T)) \right. \\ & \quad \left. - (s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_2 &= e^{rT} \left( \alpha^2 (p^2 (r(s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) + rz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T)) \right. \\ & \quad \left. + (s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_3 &= \sin(pT) \left( \alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) - r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. - [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right) \\ & \quad + \cos(pT) \left( \alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) + r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. + [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_4 &= \cos(pT) \left( \alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) - r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. - [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right) \\ & \quad - \sin(pT) \left( \alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) + r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. + [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left( 2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$



Согласно условиям леммы выбираем  $\alpha$  и  $\delta$  согласованно, а именно, так, чтобы  $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$ ,  $\nu \in (0, 1)$ .

Заметим, что в формулах (3.26) в числителях слагаемые младших порядков малости по  $\alpha$  выделены в квадратные скобки. Однако если подставить краевые условия (3.16) и оценки (3.24), можно показать, что на самом деле эти слагаемые имеют тот же порядок малости (а именно,  $\alpha^3(\delta)$ ), что и остальные слагаемые в числителях. Замена переменных (3.21) и выбор краевых условий (3.16) позволяют доказать, что выражения в квадратных скобках в (3.26) имеют порядок малости  $\alpha^3(\delta)$  с учетом краевых условий (3.16), оценок (3.24) и пределов (3.19), а именно

$$| [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2(\delta)\dot{y}_2(T)/X^2] | = \left| -\theta_k \frac{\delta\alpha^2(\delta)}{X^2} - \tilde{s}_{2H}(T) \right| \leq \frac{\alpha^4(\delta)}{X^2} + \alpha^4(\delta)O(1/\alpha(\delta)) = O(\alpha^3(\delta)).$$

Если воспользоваться пределами (3.19), то можно заметить, что знаменатели в выражениях (3.26) при  $\alpha \rightarrow 0$  стремятся к постоянным величинам. Из этого в свою очередь можно получить, что

$$c_1 = O(\alpha^2(\delta)), \quad c_2 = O(\alpha^2(\delta)), \quad c_3 = O(\alpha^3(\delta)), \quad c_4 = O(\alpha^3(\delta)). \quad (3.27)$$

Перепишем формулу (3.25), используя замену переменных (3.21):

$$\bar{w}_O(t) = F(t)C + \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1H}(t) - \alpha^2(\delta)R \\ \tilde{z}_{2H}(t) \\ \tilde{s}_{1H}(t) + \alpha^2(\delta)\ddot{y}_2(T)/X^2 \\ \tilde{s}_{2H}(t) - \alpha^2(\delta)\dot{y}_2(T)/X^2 \end{pmatrix}.$$

Подставив известный вид матрицы  $F(t)$  (3.20), оценки (3.27) и (3.24), можно сделать следующий вывод:

$$\|\bar{z}(t)\|_{C[\tau_2, T]} = O(\alpha^2(\delta)), \quad t \in [\tau_1, T]. \quad (3.28)$$

Аналогичная оценка получается на отрезке  $[\tau_2, T]$  и для  $\|\underline{z}(t)\|$ .

Доказательство для последующего участка времени  $[\tau_3, \tau_2]$  для случая  $[\tau_3, \tau_2] \in T_1$  можно провести аналогичным образом с той разницей, что отличаются краевые условия (3.16), новые переменные (3.21) и связанные с ними выражения (3.22), (3.24) и (3.26). При этом доказательство выполнения на этом шаге оценок (3.27) будет проводиться с использованием оценок (3.28), полученных на предыдущем этапе.

В случае, если  $[\tau_3, \tau_2] \in T_2$ , оценка (3.18) будет следовать непосредственно из леммы 1 и оценки  $z_1(t_2)$ , полученной на первом шаге.

И так далее по индукции доказательство можно продлить на весь участок  $[\tau_0, T]$ .

Лемма 2 доказана.

#### 4. Решение задачи реконструкции

Зафиксируем  $\delta \in (0, \delta_0]$  и  $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , и рассмотрим множество траекторий  $x(t, \xi_k) = (x_1(t, \xi_k), x_2(t, \xi_k))$  — фазовых координат характеристической системы (3.9) с краевыми условиями вида (3.8) и порождающих их управлений  $u(t, \xi_k)$ , где  $\xi_k \in S_\delta$  (3.12).

Рассмотрим задачу на минимум функционала (3.3)

$$I(t_0, x(\cdot, \xi^*), u(\cdot, \xi^*)) = \min_{\xi_k \in S_\delta} I(t_0, x(\cdot, \xi_k), u(\cdot, \xi_k)). \quad (4.1)$$

Из компактности множества  $x(\cdot, \xi_k)$ ,  $\xi_k \in S_\delta$ , вытекает существование  $\xi^* \in S_\delta$  и траектории  $x^{\delta, \alpha}(t) = x(t, \xi^*)$  системы (3.9), порождаемой непрерывным допустимым управлением  $u^{\delta, \alpha}(\cdot) = u(t, \xi^*)$ , которые решают задачу (4.1). Справедлива следующая

**Теорема.** Если выполняются предположения 1–4 и условие согласования параметров  $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$ , то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - x_*(t)\|_C = 0,$$

где  $x_1^{\delta, \alpha}(t)$  — решение задачи (4.1).

**Доказательство.** Для любого  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $\delta_0$  — из предположения 1, выберем согласованный с ним параметр  $\alpha = \alpha(\delta)$  такой, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$ .

В силу лемм 1 и 2 для  $x^{\delta, \alpha}(t)$  найдутся такие ограниченные оценочные функции  $\bar{z}(t)$  и  $\underline{z}(t)$  из (3.14), для которых выполняется условие (3.18), что

$$O(\alpha^2(\delta)) + y_1(t) = \underline{z}(t) + y_1(t) \leq x_1^{\delta, \alpha}(t) \leq \bar{z}(t) + y_1(t) = O(\alpha^2(\delta)) + y_1(t).$$

Из этого следует, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - y_1(t)\|_C = 0$ . Из этого соотношения и (2.4) можно сделать вывод:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - x_*(t)\|_C = 0.$$

Теорема доказана.

**Замечание 3.** Теорема верна для любого выбранного  $\xi_k \in S_\delta$ . Для решения задачи реконструкции управления при условии согласования параметров  $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$  с помощью теоремы можно провести доказательство сходимости управления

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|u^{\delta, \alpha}(t) - u_*(t)\|_{L_2} = \lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|u^{\delta, \alpha}(t) - k_*^2\|_{L_2} = 0$$

таким же образом, как это было проделано в работе [4, с. 226–228]. При этом существенную роль играет выбор  $\xi_k^*$ , решающего задачу минимизации (4.1).

Значит, траектория  $x^{\delta, \alpha}(t)$  и порождающее ее управление  $u^{\delta, \alpha}(t)$  являются решениями исходной задачи реконструкции в смысле (3.4), (3.5).

## 5. Пример

Был проведен ряд численных экспериментов, заключающихся в реализации предложенного метода решения задачи реконструкции на примере идентификации параметра  $k_*^2$  модели колебаний пружины, где  $f(x) = x$ , а  $k_*^2$  играет роль неизвестного коэффициента жесткости.

В этих экспериментах в качестве базовой траектории  $x_*(t)$  рассматривалось решение уравнения (2.1) при  $k_*^2 = 9$ . А именно, в качестве базовой траектории рассматривалась траектория

$$x_*(t) = \sin(3t), \quad t \in [9.6, 10].$$

С помощью генератора случайных чисел, имитирующего погрешность, была взята дискретная история замеров базовой траектории  $x_*(t)$ , проинтерполированная гладкой функцией  $y_1(t)$ . В качестве функции  $y_2(t)$  была взята производная  $\dot{y}_1(t)$ . На промежутке времени  $t \in [9.6, 10]$ , на котором выполняется предположение 2, были восстановлены решения  $x^{\delta, \alpha}(t)$  и порождающие их управления  $u^{\delta, \alpha}(t)$  для разных значений параметров  $\delta$ ,  $\alpha$ . Полученные результаты наглядно иллюстрируют, что при согласованном стремлении этих параметров к нулю выполняются условия (3.4), (3.5).

Ниже на рис. 1–4 приведены графики восстановленных фазовых переменных  $x_1^{\delta, \alpha}(t)$  и управления, порождающего их. Эти графики построены при разных значениях параметров  $\delta$ ,  $\alpha$ . Также было численно найдено  $k^{\delta, \alpha}$  — “усредненное” значение  $u^{\delta, \alpha}(t)$ , вычисленное по формуле (3.6).

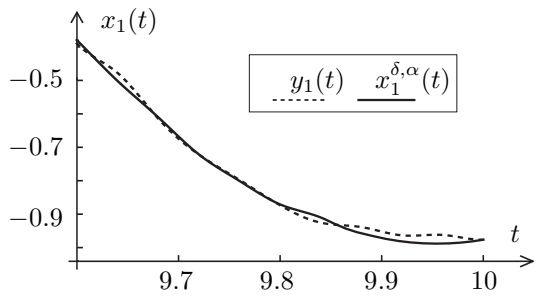


Рис. 1. График  $x_1^{\delta, \alpha}(t)$  при  $\alpha = 10^{-2}$ .

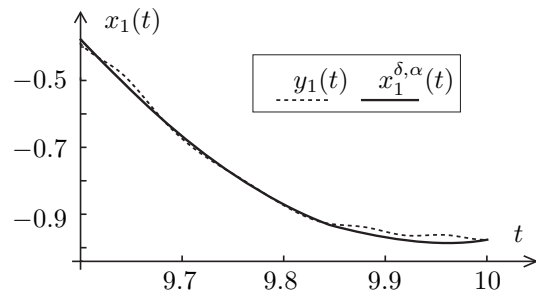


Рис. 2. График  $x_1^{\delta, \alpha}(t)$  при  $\alpha = 10^{-3}$ .

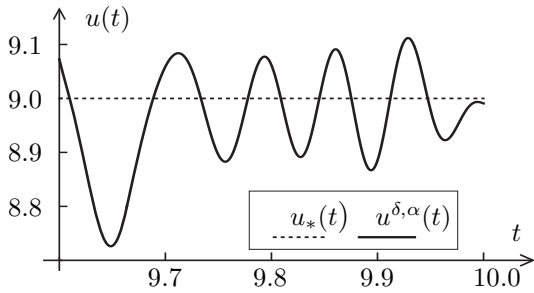


Рис. 3. График  $u^{\delta, \alpha}(t)$  при  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $k^{\delta, \alpha^2} = 8.95$ .

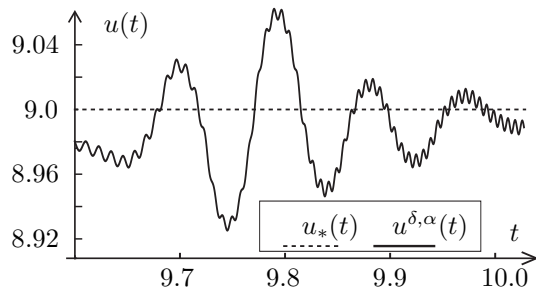


Рис. 4. График  $u^{\delta, \alpha}(t)$  при  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $k^{\delta, \alpha^2} = 8.99$ .

Помимо предложенного метода, опирающегося на решение задачи (3.1), о минимизации функционала с отрицательной невязкой (3.3), была предпринята попытка использовать функционал с положительной невязкой вида

$$I_{t_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \left[ \frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} + \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha}{2} u(t)^2 \right] dt. \quad (5.1)$$

Такой выбор функционала может казаться более естественным. Тем не менее исследование характеристической системы для задачи управления системой (3.1) на минимум функционала (5.1) дало следующие результаты: соответствующая характеристическая система является неустойчивой [14, гл. I, п. 11] по теореме о первом приближении. Это приводит к тому, что при нахождении решений этой системы невязки начинают расти по экспоненте, что очень сильно затрудняет построение аппроксимаций. Этот результат наблюдается при аналогичных исследованиях, проведенных для управляемых нелинейных систем, рассмотренных в работе [13]. Рисунок 5 иллюстрирует попытку построения такой аппроксимации.

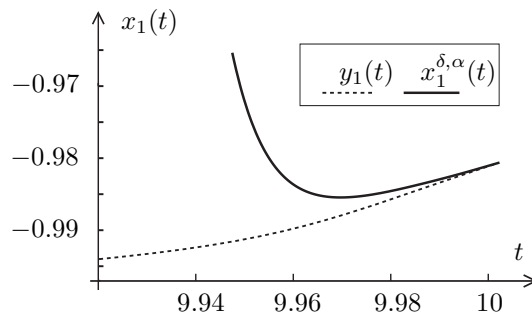


Рис. 5. График  $x_1(t)$  при  $\alpha = 10^{-3}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
2. Справочник по теории автоматического управления / ред. А.А. Красовский. М.: Наука, 1987. 712 с.
3. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.
4. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.** Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 218–233.
5. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры, М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.
10. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 391 с.
11. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютер. исследований. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
12. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б., Крупенников Е.Ф.** К решению обратных задач динамики линейно управляемых систем методом отрицательной невязки // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 266–275.
13. **Крупенников Е.А.** К обоснованию метода решения задачи реконструкции динамики макроэкономической модели // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 102–114.
14. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 225 с.

Субботина Нина Николаевна  
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук,  
зав. сектором

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
профессор Института математики и компьютерных наук  
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина  
e-mail: subb@uran.ru

Крупенников Евгений Александрович  
ведущий математик

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
аспирант  
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина  
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

Поступила 09.03.16