ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 519.65

О РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Для линейного дифференциального оператора третьего порядка $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ $(\alpha > 0)$ вычислены точно константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) для двух видов локальных (неинтерполяционных) тригонометрических сплайнов с равномерными узлами.

Ключевые слова: константы Лебега, тригонометрические сплайны, дифференциальные операторы третьего порядка.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. On uniform Lebesgue constants of third-order local trigonometric splines.

For the linear differential third-order operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ $(\alpha > 0)$, Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) are calculated exactly for two types of local (noninterpolational) trigonometric splines with uniform knots.

Keywords: Lebesgue constants, trigonometric splines, differential operators of the third order.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-245-254

Введение

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ $(r \in \mathbb{N},\ D$ — символ дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор r-го порядка с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1). Он может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{s=1}^{k}(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2) \prod_{j=1}^{r-2k}(D - \beta_j), \tag{0.1}$$

где α_s, β_j и γ_s — некоторые действительные числа (при $k = 0$ первое произведение в этом равенстве отсутствует), причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ $(s = \overline{1,k})$. Пусть $S(\mathcal{L}_r)$ — множество $\mathcal{L}$-сплайнов $S \in C^{(r-2)}(\mathbb{R})$ порядка $r \geq 2$ (минимального дефекта), соответствующих оператору $\mathcal{L}_r$, с узлами $\{lh\}_{l\in\mathbb{Z}}$ (h — фиксированное положительное число). То есть любая функция $S \in S(\mathcal{L}_r)$ такова, что для любого числа $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_r(D)S(x) = 0, \quad lh < x < (l+1)h.$$

Пусть θ — фиксированное число, $0 \leq \theta < 1$. Сплайн S называется *интерполяционным*, если он удовлетворяет условиям

$$S((\theta + l)h) = y_{l+\theta} \quad (l \in \mathbb{Z}), \tag{0.2}$$

где $\{y_{l+\theta}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ — некоторая последовательность действительных чисел. Вопросам существования и единственности интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов (в случае $\mathcal{L}_r(D) = D^r$ они являются полиномиальными) посвящено значительное число работ (см., например, [1; 2] и имеющуюся там библиографию). Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_{l+\theta} = f((\theta+l)h)$ $(l \in \mathbb{Z})$. Интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн $S(x) = S(f, x) \in S(\mathcal{L}_r)$, удовлетворяющий условиям (0.2), задает на числовой

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

оси $\mathbb{R}$ линейный метод аппроксимации функции f. Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства C непрерывных на всей оси $\mathbb{R}$ функций f в C), а именно величины

$$L_1 = L_1(\mathcal{L}_r, \theta) = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|S(f, \cdot)\|_C. \tag{0.3}$$

Число L_1 называется константой Лебега метода S. Важной задачей является ее точное вычисление (как функции, зависящей от $\mathcal{L}_r, \theta$ и h) в том случае, когда интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн $S \in S(\mathcal{L}_r)$ существует, или нахождение эффективных оценок сверху, если константу Лебега точно вычислить не удается. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость сплайна к изменению интерполяционных условий (0.2). Оценкой констант Лебега интерполяционных полиномиальных и экспоненциальных сплайнов (они получаются, если в равенстве (0.1) положить $k = 0$) занимались многие авторы (см., например, библиографию в [3; 4]). В последние годы в теории приближения функций проявился интерес к локальным (неинтерполяционным) $\mathcal{L}$-сплайнам и их свойствам (в частности, вычислению для них соответствующих констант Лебега). Существование таких сплайнов, точных на всем ядре оператора $\mathcal{L}$ или на его подпространствах, установлено (см. [5]), если все корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}$ являются действительными и попарно различными (т. е. для определенного вида экспоненциальных сплайнов). В [4] авторами начато изучение констант Лебега таких сплайнов, и эти константы вычислены точно в случае оператора третьего порядка $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$ для двух видов локальных экспоненциальных сплайнов, построенных в [5; 6].

В настоящей работе исследуются вопросы устойчивости локальных (неинтерполяционных) $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих оператору

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2) \quad (\alpha > 0). \tag{0.4}$$

Их естественно назвать *тригонометрическими*, поскольку базисом ядра оператора $\mathcal{L}_3$ являются функции $1, \sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$. Далее в следующем разделе для указанного оператора мы по значениям $\{y_{l+1/2}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ построим локальные тригонометрические сплайны, точные на всем ядре оператора (0.4), и в разд. 2 при $0 < h < \pi/\alpha$ вычислим точно их равномерные константы Лебега (как функции параметров h и α). Затем в разд. 3 точно вычисляются константы Лебега других локальных тригонометрических сплайнов оператора (0.4), построенных ранее в работе [7] К. В. Костоусова и В. Т. Шевалдина. Тригонометрические сплайны [7], как следует из результатов [3, гл. 5], реализуют *простейшую схему* локальной сплайн-аппроксимации и сохраняют не все ядро оператора $\mathcal{L}_3$, а только подпространство, натянутое на две функции $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$.

1. Локальные тригонометрические сплайны третьего порядка, сохраняющие ядро оператора $\mathcal{L}_3$

Линейному дифференциальному оператору вида (0.4) поставим в соответствие обобщенную конечную разность (см., например, [1])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_3} f(x) = (T - E)(T^2 - 2T\cos\alpha h + E)f(x) = \sum_{s=0}^{3} (-1)^{3-s} \mu_s^{(3)}(h) f(x + sh), \tag{1.1}$$

определенную на множестве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. Обобщенная разность (1.1) обращается в нуль на функциях $1, \sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$. При этом

$$\mu_3^{(3)}(h) = \mu_0^{(3)}(h) = 1, \quad \mu_2^{(3)}(h) = \mu_1^{(3)}(h) = 1 + 2\cos\alpha h.$$

Пусть φ_3 — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$, удовлетворяющее следующим условиям: $\varphi_3^{(j)}(0) = \delta_{j,2}$ $(j = 0, 1, 2)$, где $\delta_{j,2}$ — символ Кронекера. Нетрудно понять, что

$$\varphi_3(x) = \frac{1 - \cos\alpha x}{\alpha^2}.$$

Тригонометрический базисный сплайн (B-сплайн) $B(x) = B_{\mathcal{L}_3}(x)$, соответствующий оператору $\mathcal{L}_3$ вида (0.4), определяется формулой

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_3}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_3}\varphi_3((x - 3h)_+),$$

где $t_+ = \max\{0; t\}$. Из (1.1) следует, что B-сплайн может быть записан в следующем виде:

$$B(x) = \frac{1}{\alpha^2}\begin{cases} 1 - \cos\alpha x, & 0 \le x \le h, \\ \cos\alpha(x - h) + \cos\alpha(x - 2h) - 2\cos\alpha h, & h \le x \le 2h, \\ 1 - \cos\alpha(x - 3h), & 2h \le x \le 3h, \\ 0, & x \notin [0; 3h]. \end{cases}$$

Отметим простейшие свойства построенной функции: $B \in C^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} B = [0; 3h]$, $B(3h - x) = B(x)$ $(0 \le x \le 3h)$, $\mathcal{L}_3(D)B(x) = 0$ при $0 < x < h$, $h < x < 2h$, $2h < x < 3h$. Для функции $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+1/2} = f((j + 1/2)h) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

и рассмотрим систему функционалов

$$I_j = c_1 y_{j+1/2} + c_2 y_{j+3/2} + c_3 y_{j+5/2} \quad (j \in \mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

где c_1, c_2 и c_3 — некоторые действительные числа. Локальный тригонометрический сплайн третьего порядка, задающий линейный метод приближения функции f, определим формулой

$$S_{\mathcal{L}_3}(x) = S_{\mathcal{L}_3}(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

При $x \in [lh; (l + 1)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ такой сплайн в силу определения B-сплайна может быть записан в виде

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}_3}(x) &= I_l B(x - lh) + I_{l-1}B(x - (l - 1)h) + I_{l-2}B(x - (l - 2)h) \\ &= (c_1 y_{l+1/2} + c_2 y_{l+3/2} + c_3 y_{l+5/2})B(x - lh) + (c_1 y_{l-1/2} + c_2 y_{l+1/2} + c_3 y_{l+3/2})B(x - (l - 1)h) \\ &\quad + (c_1 y_{l-3/2} + c_2 y_{l-1/2} + c_3 y_{l+1/2})B(x - (l - 2)h) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\Big\{(c_1 y_{l+1/2} + c_2 y_{l+3/2} + c_3 y_{l+5/2})(1 - \cos\alpha(x - lh)) \\ &\quad + (c_1 y_{l-1/2} + c_2 y_{l+1/2} + c_3 y_{l+3/2})(\cos\alpha(x - lh) + \cos\alpha(x - lh - h) - 2\cos\alpha h) \\ &\quad + (c_1 y_{l-3/2} + c_2 y_{l-1/2} + c_3 y_{l+1/2})(1 - \cos\alpha(x - lh - h))\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Лемма 1. *Пусть* $0 < h < \pi/\alpha$ *и*

$$c_1 = c_3 = -\frac{\alpha^2 \sin^2\dfrac{\alpha h}{4}}{8\sin^4\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}, \quad c_2 = \frac{\alpha^2\Big(1 - \cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}\Big)}{8\sin^4\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$S_{\mathcal{L}_3}(1, \cdot) = 1, \quad S_{\mathcal{L}_3}(\sin\alpha x, \cdot) = \sin\alpha x, \quad S_{\mathcal{L}_3}(\cos\alpha x, \cdot) = \cos\alpha x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Пусть $x \in [lh;(l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$). Обозначим $x - lh = t \in [0;h]$. Тогда из (1.4) следует, что

$$S_{\mathcal{L}_3}(1,\cdot) = \frac{2(1-\cos\alpha h)}{\alpha^2}(c_1+c_2+c_3) = \frac{2(1-\cos\alpha h)\Big(-2\sin^2\dfrac{\alpha h}{4} + 1 - \cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}\Big)}{8\sin^4\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}} = 1.$$

При доказательстве двух других равенств леммы 1 можно, не ограничивая общности, считать, что $l = 0$. Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{L}_3}(\sin\alpha x,\cdot) = S_{\mathcal{L}_3}(\sin\alpha t,\cdot) = \frac{1}{\alpha^2}\Big\{c_1\Big[\Big(-\sin\frac{3\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\Big(-\sin\frac{\alpha h}{2}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \sin\frac{\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\\
+c_2\Big[\Big(-\sin\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\sin\frac{\alpha h}{2}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \sin\frac{3\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\\
+c_3\Big[\sin\frac{\alpha h}{2}(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\sin\frac{3\alpha h}{2}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \sin\frac{5\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\Big\}\\
= A_1 + B_1\cos\alpha t + C_1\cos\alpha(t-h),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где A_1, B_1 и C_1 — некоторые константы, зависящие от h и α. Элементарные вычисления показывают, что

$$A_1 = 0, \quad B_1 = -\frac{\cos\alpha h}{\sin\alpha h}, \quad C_1 = \frac{1}{\sin\alpha h}. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) выводим равенство

$$S_{\mathcal{L}_3}(\sin\alpha t,\cdot) = -\frac{\cos\alpha h}{\sin\alpha h}\cos\alpha t + \frac{\cos\alpha(t-h)}{\sin\alpha h} = \sin\alpha t,$$

и второе равенство леммы 1 также доказано. Далее

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{L}_3}(\cos\alpha x,\cdot) = S_{\mathcal{L}_3}(\cos\alpha t,\cdot) = \frac{1}{\alpha^2}\Big\{c_1\Big[\cos\frac{3\alpha h}{2}(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\cos\frac{\alpha h}{2}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \cos\frac{\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\\
+c_2\Big[\cos\frac{\alpha h}{2}(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\cos\frac{\alpha h}{2}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \cos\frac{3\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\\
+c_3\Big[\cos\frac{\alpha h}{2}(1-\cos\alpha(t-h))\\
+\cos\frac{3\alpha h}{2}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) + \cos\frac{5\alpha h}{2}(1-\cos\alpha t)\Big]\Big\}\\
= A_2 + B_2\cos\alpha t + C_2\cos\alpha(t-h).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

С помощью элементарных преобразований получаем, что

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом, из (1.7) и (1.8) выводим последнее утверждение леммы 1.

З а м е ч а н и е 1. Легко показать, что

$$\lim_{\alpha\to 0} c_1 = \lim_{\alpha\to 0} c_3 = -\frac{1}{8h^2}, \quad \lim_{\alpha\to 0} c_2 = \frac{5}{4h^2}.$$

Именно такие коэффициенты были указаны Н. П. Корнейчуком [8] (см. также [9, гл. 7]) в аналогичной схеме локальной параболической ($\mathcal{L}_3(D) = D^3$) сплайн-аппроксимации, точной на алгебраических многочленах второй степени. Подобные результаты для локальных экспоненциальных сплайнов изложены в [3, гл. 1] и [4].

2. Константы Лебега тригонометрических сплайнов, сохраняющих ядро оператора $\mathcal{L}_3$

Построенные в лемме 1 локальные тригонометрические сплайны не являются интерполяционными, так как

$$S_{\mathcal{L}_3}\Big(\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big) \neq y_{l+1/2} = f\Big(\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big) \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

но они (как и интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны) задают линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ локальный тригонометрический сплайн вида (1.3). Определим норму этого оператора при помощи равенства

$$L_2(\mathcal{L}_3) = \|S_{\mathcal{L}_3}\|_C^C = \sup_{\|f\|_C\le 1} \|S_{\mathcal{L}_3}(f,\cdot)\|_C.$$

Величину $L_2(\mathcal{L}_3)$ будем называть константой Лебега локального тригонометрического сплайна $S_{\mathcal{L}_3}(f,x)$ и рассмотрим вопрос о ее точном вычислении при фиксированных значениях h и α.

Теорема 1. *При $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место равенство*

$$L_2(\mathcal{L}_3) = \frac{1-\cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [lh;(l+1)h]$ ($l\in\mathbb{Z}$) и $x - lh = t \in [0;h]$. Из (1.4) с учетом определения коэффициентов c_1, c_2 и c_3 получаем

$$S_{\mathcal{L}_3}(x) = \frac{1}{8\sin^4\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}\big[y_{l-3/2}q_1(t)+y_{l-1/2}q_2(t)+y_{l+1/2}q_3(t)+y_{l+3/2}q_4(t)+y_{l+5/2}q_5(t)\big], \quad (2.1)$$

где

$$q_1(t) = (1-\cos\alpha(t-h))\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big),$$

$$q_2(t) = \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h)) - \sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t+\cos\alpha(t-h)-2\cos\alpha h),$$

$$q_3(t) = \Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)(1-\cos\alpha(t-h)+1-\cos\alpha t)+\Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(\cos\alpha t+\cos\alpha(t-h)-2\cos\alpha h),$$

$$q_4(t) = \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha t) - \sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t+\cos\alpha(t-h)-2\cos\alpha h),$$

$$q_5(t) = (1-\cos\alpha t)\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big). \quad (2.2)$$

Для любой непрерывной на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функции f такой, что $\|f\|_C \leq 1$ из (2.1) выводим оценку

$$|S_{\mathcal{L}_3}(x)| \leq \frac{1}{8\sin^4\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}\big[|q_1(t)|+|q_2(t)|+|q_3(t)|+|q_4(t)|+|q_5(t)|\big]. \tag{2.3}$$

Таким образом, доказательство теоремы 1 сводится к изучению знаков функций $q_s(t)$ $(s=\overline{1,5})$ на отрезке $[0;h]$. Ясно, что

$$q_1(t)\leq 0, \quad q_5(t)\leq 0 \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Исследуем функцию $q_2(t)$. Из (2.2) следует, что при $0\leq t\leq h$ эта функция может быть записана в виде

$$q_2(t)=A_3+B_3\cos\alpha t+C_3\sin\alpha t,$$

где A_3, B_3 и C_3 — некоторые константы. Из этого представления заключаем, что $q_2(t)$ при $0\leq t\leq h<\pi/\alpha$ имеет не более двух нулей (с учетом кратностей). Легко проверяются неравенства

$$q_2(0)>0, \quad q_2\Big(\frac{h}{2}\Big)>0, \quad q_2(h)<0.$$

Следовательно, уравнение $q_2(t)=0$ имеет на отрезке $[0;h]$ единственный простой корень t_1, причем

$$\frac{h}{2}<t_1<h,$$

и функция q_2 в этой точке меняет знак с “плюса” на “минус”. Из (2.2) нетрудно заметить, что

$$q_4(t)=q_2(h-t).$$

Следовательно, функция q_4 также имеет на отрезке $[0;h]$ единственный простой корень t_2, причем

$$0<t_2<\frac{h}{2}.$$

Кроме того, при переходе через этот корень функция q_4 меняет знак с “минуса” на “плюс”. Из проведенного исследования выводим неравенство

$$0<t_2<\frac{h}{2}<t_1<h.$$

Исследуем функцию $q_3(t)$ на отрезке $[0;h]$. Из (2.2) замечаем, что эта функция четная относительно точки $t=h/2$. Поскольку

$$q_3'(t)=(-2\alpha)\sin\alpha\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\cos\frac{\alpha h}{2}\Big(\sin^2\frac{\alpha h}{4}+1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)>0$$

при $0<t<h/2$, то функция q_3 возрастает при $0<t<h/2$ и убывает при $h/2<t<h$. Кроме того,

$$q_3(0)=q_3(h)=(1-\cos\alpha h)\cos\frac{\alpha h}{2}\Big(\cos\frac{\alpha h}{2}-\cos\alpha h\Big)>0$$

при $0<h<\pi/\alpha$. Следовательно, $q_3(t)>0$ при $0\leq t\leq h$. Обозначим через $Q(t)$ выражение в квадратных скобках в равенстве (2.3), т. е.

$$Q(t)=|q_1(t)|+|q_2(t)|+|q_3(t)|+|q_4(t)|+|q_5(t)|. \tag{2.4}$$

С учетом проведенного анализа знаков функций $q_s(t)$ $(s=\overline{1,5})$ получаем, что

$$Q(t)=\begin{cases} Q_1(t), & 0\leq t\leq t_2,\\ Q_2(t), & t_2\leq t\leq t_1,\\ Q_3(t), & t_1\leq t\leq h,\end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$Q_1(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) - q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_2(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_3(t) = -q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t).$$

После элементарных вычислений имеем

$$\begin{aligned}
Q_1(t) = \Big[&\sin^2 \frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha(t-h)) + \Big(1-\cos\alpha h \cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h)) \\
&- \sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h)\Big] \\
+ \Big[\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)&(1-\cos\alpha(t-h)) + \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&- \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big] + \Big[\sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&- \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha t) + \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(t) = \Big[&\sin^2 \frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha(t-h)) + \Big(1-\cos\alpha h \cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h)) \\
&- \sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h)\Big] \\
+ \Big[\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)&(1-\cos\alpha(t-h)) + \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&- \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big] + \Big[\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&+ \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha t) + \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3(t) = \Big[&\sin^2 \frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha(t-h)) + \sin^2\frac{\alpha h}{4}(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&- \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha(t-h))\Big] + \Big[\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)(1-\cos\alpha(t-h)) \\
&+\Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) - \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big] \\
&+ \Big[\Big(-\sin^2\frac{\alpha h}{4}\Big)(\cos\alpha t + \cos\alpha(t-h) - 2\cos\alpha h) \\
&+ \Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)(1-\cos\alpha t) + \sin^2\frac{\alpha h}{4}(1-\cos\alpha t)\Big].
\end{aligned}$$

Из выписанных формул имеем

$$Q_1'(t) = -2\alpha\Big(1-\cos\alpha h\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)\sin\alpha t,$$

$$Q_3(t) = Q_1(h-t),$$

$$Q_2'(t) = 4\alpha\sin^2\frac{\alpha h}{4}\sin\alpha\Big(t-\frac{h}{2}\Big)\cos\frac{\alpha h}{2}.$$

Значит, $Q_1'(t) < 0$ при $0 < t < h$, $Q_2'(t) > 0$ при $h/2 < t < h$, и поэтому справедливо следующее равенство:

$$\max_{t\in[0;h]} Q(t) = Q(0) = Q(h) = \frac{1-\cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}. \tag{2.6}$$

Следовательно, из (2.3) с учетом (2.4)–(2.6) выводим оценку

$$|S_{\mathcal{L}_3}(x)| \le \frac{1-\cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}, \quad x\in[lh;(l+1)h] \quad (l\in\mathbb{Z}). \tag{2.7}$$

Кроме того, из приведенного доказательства следует, что на классе непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функций f таких, что $\|f\|_C \le 1$, неравенство (2.7) является точным в том смысле, что знак равенства в нем реализуется при $x = lh$ $(l\in\mathbb{Z})$, если

$$y_{l-3/2}=-1,\quad y_{l-1/2}=1,\quad y_{l+1/2}=1,\quad y_{l+3/2}=-1,\quad y_{l+5/2}=-1,$$

или при $x=(l+1)h$ $(l\in\mathbb{Z})$, если

$$y_{l-3/2}=-1,\quad y_{l-1/2}=-1,\quad y_{l+1/2}=1,\quad y_{l+3/2}=1,\quad y_{l+5/2}=-1.$$

Напомним, что $y_{j+1/2}=f((j+1/2)h)$ $(j\in\mathbb{Z})$. Следовательно, из (2.7) выводим утверждение теоремы 1

$$\sup_{\|f\|_C\le 1}\|S_{\mathcal{L}_3}(f,\cdot)\|_C = \frac{1-\cos\alpha h\cos\dfrac{\alpha h}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}.$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Константа Лебега локальных параболических сплайнов, точных на алгебраических многочленах второй степени (т. е. величина $L_2(\mathcal{L}_3)$ в случае $\mathcal{L}_3(D)=D^3$), была вычислена в [10] и оказалась равной 1.25. Заметим, что из теоремы 1 также следует, что

$$\lim_{\alpha\to 0} L_2(\mathcal{L}_3) = 1.25.$$

Кроме того, при $0<h<\pi/\alpha$ имеет место неравенство

$$L_2(\mathcal{L}_3) > 1.25.$$

3. Простейшая схема локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации

Изложим простейшую схему локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2+\alpha^2)$ $(\alpha>0)$ (см. [3, гл. 5, § 1]). В функционале (1.2) положим

$$c_1=c_3=0,\quad c_2=\frac{\alpha^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}}.$$

Тогда

$$I_j = c_2 y_{j+3/2} = \frac{\alpha^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha h}{2}\cos\dfrac{\alpha h}{2}} y_{j+3/2} \quad (j\in\mathbb{Z}),$$

и при $x\in[lh;(l+1)h]$ $(l\in\mathbb{Z})$ из (1.3) имеем

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(x)=\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f,x)=I_{l-2}B(x-(l-2)h)+I_{l-1}B(x-(l-1)h)+I_lB(x-lh)$$

$$=\frac{c_2}{\alpha^2}\Big[y_{l-1/2}(1-\cos\alpha(t-h))+y_{l+1/2}(\cos\alpha t+\cos\alpha(t-h)-2\cos\alpha h)+y_{l+3/2}(1-\cos\alpha t)\Big], \tag{3.1}$$

где $t = x - lh \in [0; h]$. Легко проверяются следующие равенства:

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha x, \cdot) = \sin \alpha x, \quad \widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(\cos \alpha x, \cdot) = \cos \alpha x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, простейшая схема локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации (при определенном выборе нормирующего множителя c_2) сохраняет подпространство ядра оператора $\mathcal{L}_3$, натянутое на функции $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$. Сплайн (3.1) был построен К. В. Костоусовым и В. Т. Шевалдиным [7] (в терминах обобщенной конечной разности (1.1)). Величину

$$L_3(\mathcal{L}_3) = \sup_{\|f\|_C \le 1} \|\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, \cdot)\|_C$$

назовем константой Лебега метода (3.1). Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *При* $0 < h < \pi/\alpha$ *справедливо равенство*

$$L_3(\mathcal{L}_3) = \frac{1}{\cos \dfrac{\alpha h}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in [lh; (l+1)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ с учетом того, что $B(x) \ge 0$ $(x \in \mathbb{R})$, из (3.1) получаем

$$|\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(x)| = |\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x)| \le \frac{c_2}{\alpha^2}\Big[|y_{l-1/2}|(1 - \cos \alpha(x - lh - h))$$

$$+ |y_{l+1/2}|(\cos \alpha(x - lh) + \cos \alpha(x - lh - h) - 2\cos \alpha h) + |y_{l+3/2}|(1 - \cos \alpha(x - lh))\Big]$$

$$\le \frac{c_2}{\alpha^2}(2 - 2\cos \alpha h) \max_j |y_{j+1/2}|. \tag{3.2}$$

Поскольку $y_{j+1/2} = f((j + 1/2)h)$ $(j \in \mathbb{Z})$, то для любой непрерывной функции f, удовлетворяющей условию $\|f\|_C \le 1$, из (3.2) и определения коэффициента c_2 получаем неравенство

$$|\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x)| \le \frac{1}{\cos \dfrac{\alpha h}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Последнее неравенство является точным. Знак равенства в нем реализует, например, функция $f(x) = 1$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. При $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место неравенство

$$L_3(\mathcal{L}_3) < L_2(\mathcal{L}_3).$$

З а м е ч а н и е 4. Константы Лебега $L_2(\mathcal{L}_3)$ и $L_3(\mathcal{L}_3)$ было бы интересно сравнить с константами Лебега соответствующих интерполяционных тригонометрических сплайнов. Но к настоящему времени величины $L_1(\mathcal{L}_r, \theta)$ (см. (0.3)) вычислены только в том случае, когда все корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_r$ вида (0.1) являются действительными числами (см. [11–17] и имеющиеся там ссылки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
2. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.

3. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Из-во УрО РАН, 2014. 198 с.
4. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О равномерных константах Лебега локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 261–272.
5. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
6. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные $\mathcal{L}$-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. 2008. Т. 366, № 2. С. 151–164.
7. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.
8. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.
9. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О константах Лебега локальных параболических сплайнов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 213–219.
11. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
12. **Richards F.** The Lebesque constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, no. 2. P. 83–92.
13. **Tzimbalario J.** Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
14. **Morsche H.G. ter** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. C. 232–246.
15. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
16. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 10.02.2016

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru