ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ В ЛИНЕЙНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В. Л. Розенберг

Задача восстановления неизвестных внешних воздействий в линейном стохастическом дифференциальном уравнении исследуется с позиций подхода теории динамического обращения. Рассматривается постановка, в которой одновременная реконструкция возмущений в детерминированном и стохастическом членах уравнения проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций части координат случайного процесса. Задача сводится к обратной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица исходного процесса. Предлагается конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей. Получена оценка его точности относительно количества доступных измерению реализаций.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, стохастическое дифференциальное уравнение, управляемая модель.

V. L. Rozenberg. Reconstruction of external actions under incomplete information in a linear stochastic equation.

The problem of reconstructing unknown external actions in a linear stochastic differential equation is investigated on the basis of the approach of the theory of dynamic inversion. We consider the statement when the simultaneous reconstruction of disturbances in the deterministic and stochastic terms of the equation is performed with the use of discrete information on a number of realizations of a part of coordinates of the stochastic process. The problem is reduced to an inverse problem for systems of ordinary differential equations describing the mathematical expectation and covariance matrix of the original process. A finite-step software-oriented solution algorithm based on the method of auxiliary controlled models is proposed. We derive an estimate for its convergence rate with respect to the number of measured realizations.

Keywords: dynamical reconstruction, stochastic differential equation, controlled model.

MSC: 49K15, 60H10, 93E12

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-236-244

Введение

Необходимость восстановления неизвестных параметров управляемых систем в режиме реального времени на основе неполной и/или неточной информации о фазовом состоянии возникает во многих научных и прикладных исследованиях. Задачи реконструкции вкладываются в проблематику обратных задач динамики управляемых систем; как правило, они являются некорректными и требуют применения регуляризирующих процедур. В настоящей статье применяется подход, предложенный в работах Ю. С. Осипова и его коллег (см. [1–6] и библиографию в них) и получивший название метода динамического обращения. Он основан на сочетании принципов теории позиционного управления [7] и идей теории некорректных задач [8]. Задача реконструкции сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью). Адаптация модельного управления к результатам текущих наблюдений обеспечивает аппроксимацию (в подходящем смысле) неизвестного входа. Метод динамического обращения был реализован для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), дифференциально-функциональными уравнениями, уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами и др. Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для некоторых классов частично наблюдаемых систем (в случае конечномерной системы роль входного сигнала могли играть измерения части координат фазового вектора, а в случае бесконечномерной — значения решения на некоторых подмножествах области определения). Такие задачи были сформулированы и решены, например, в [4–6].

Что касается приложения теории динамического обращения к стохастическим объектам, то впервые задача позиционного моделирования неизвестного стохастического управляющего воздействия в системе, описываемой ОДУ, была рассмотрена в [9]. Настоящая работа фактически продолжает исследования (в рамках указанной теории) задач реконструкции неизвестных детерминированных возмущений, действующих в системе линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [10; 11]. В [10] для линейного СДУ рассматривалась задача динамического восстановления возмущения, входящего в интеграл Ито и характеризующего амплитуду случайной помехи, на основе измерений реализаций всего фазового вектора. В [11] исследовалась система второго порядка специального вида, в качестве входной информации использовались измерения одной координаты случайного процесса. Новизна данной статьи состоит в рассмотрении достаточно общей постановки обратной задачи для линейного СДУ, предполагающей реконструкцию возмущений, входящих и в детерминированный, и в стохастический члены уравнения, на основе дискретной по времени информации о некотором количестве реализаций части координат случайного процесса. Обосновывается применимость алгоритма восстановления неизвестных параметров, разработанного ранее для частично наблюдаемой системы ОДУ [4; 5], и предлагается соответствующая модификация.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейное СДУ следующего вида:

$$dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t))\,dt + B_2(t)U_2(t)\,d\xi(t,\omega), \quad x(0,\omega) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь $t \in T = [0,\vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$; x_0 — известный детерминированный или случайный (нормально распределенный) вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство [12]; $\xi(t,\omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k\times k}$)); $f(t)$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n\times 1$, $n\times n$, $n\times r$ и $n\times k$ соответственно. На систему действуют два внешних возмущения: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \ldots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \ldots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, принимающие значения из заданных выпуклых компактов S_{u1} и S_{u2} и имеющие ограниченную на T вариацию. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21}d\xi_1, u_{22}d\xi_2, \ldots, u_{2k}d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2k})$ характеризует амплитуду случайных помех.

Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. Как известно, при сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [13, теорема 5.2.1]. Отметим, что уравнения типа (1.1) описывают простейшие линеаризованные модели, например изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде или динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0:l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(\tau_i)$, причем измерению доступны только q ($q \le n$) первых координат, т. е. вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$. Полагаем, что $l = l(N)$ и существуют оценки m^N_{qi} q-подвектора $m_q(t) = \{m_j(t)\}$, $j \in [1:q]$, вектора математического ожидания процесса $m(t) = Mx(t)$ и D^N_{qi} $(q\times q)$-подматрицы $D_q(t) = \{d_{jp}(t)\}$, $j, p \in [1:q]$, ковариационной матрицы

$D(t) = M(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))'$ (штрих означает транспонирование) такие, что выполняется соотношение

$$P\Big(\max_{i\in[1:l(N)]}\Big\{\big\|m_{qi}^N - m_q(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^q}, \big\|D_{qi}^N - D_q(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^{q\times q}}\Big\} \le h(N)\Big) = 1 - g(N), \qquad (1.2)$$

причем $h(N)$, $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Стандартные статистические процедуры [14, гл. 22] построения оценок m_{qi}^N и D_{qi}^N допускают модификации, обеспечивающие выполнение (1.2).

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, определяющих случайный процесс $x(t)$, по неполной дискретной информации о его реализациях, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомых входов в метрике соответственно пространств $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ и $L_2(T;\mathbb{R}^k)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

Специфика линейного уравнения (1.1) допускает сведение (с помощью метода моментов [15]) сформулированной задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Это позволяет организовать процедуру одновременной реконструкции возмущений в детерминированном и стохастическом членах правой части. Для решения задачи используются идеи теории динамического обращения [1;2;4], а именно конструируется конечношаговый программно реализуемый разрешающий алгоритм, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей.

Указанную обратную задачу можно трактовать как динамическое восстановление внешнего управляющего воздействия и амплитуды случайных помех в условиях неполной информации, когда измерению доступна только часть координат процесса, а динамика системы допускает одновременные измерения достаточно большого количества траекторий (например, движения однотипных частиц).

2. Сведение задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ

Следуя [10; 11], сведем задачу восстановления для СДУ к задаче для систем ОДУ.

Введем обозначения: $m_0 = Mx_0$, $D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)'$. В силу линейности исходной системы и равенства нулю математического ожидания интеграла Ито величина $m(t)$ зависит только от $u_1(t)$; ее динамика описывается уравнением

$$\dot m(t) = A(t)m(t) + B_1(t)u_1(t) + f(t), \quad t \in T, \quad m \in \mathbb{R}^n, \quad m(0) = m_0. \qquad (2.1)$$

Напомним, что измерению доступны первые q координат исходного n-мерного вектора x, что обеспечивает получение оценки (1.2) для первых q координат вектора m; количество неизмеряемых координат равно $n-q$. Используя стандартную схему теории динамического обращения [4; 5], запишем уравнение (2.1) в виде системы с разделением измеряемой и неизмеряемой компонент. Введем следующие матрицы:

$$C_1^m = \{c_{1ps}^m\},\ p \in [1:q],\ s \in [1:n], \quad c_{1ps}^m = 1, \text{ если } s = p,\ c_{1ps}^m = 0 \text{ в противном случае};$$

$$D_1^m = \{d_{1ps}^m\},\ p \in [1:(n-q)],\ s \in [1:n], \quad d_{1ps}^m = 1, \text{ если } s = q+p,\ d_{1ps}^m = 0 \text{ в противном случае};$$

$$C_2^m = (C_1^m)'; \quad D_2^m = (D_1^m)'.$$

Тогда q-мерный вектор $C_1^m m$ — измеряемая часть m, а $(n-q)$-мерный вектор $D_1^m m$ — его неизмеряемая часть. Обозначим $y_m = C_1^m m$, $z_m = D_1^m m$. Умножая уравнение (2.1) поочередно на матрицы C_1^m и D_1^m, учитывая равенство $m = C_2^m y_m + D_2^m z_m$, приходим к системе с разделением измеряемых и неизмеряемых компонент:

$$\dot y_m(t) = A_{1y}^m(t)y_m(t) + A_{1z}^m(t)z_m(t) + B_1^m(t)u_1(t) + C_1^m f(t), \quad y_m(0) = y_{m0}, \qquad (2.2)$$

$$\dot{z}_m(t) = A^m_{2y}(t)y_m(t) + A^m_{2z}(t)z_m(t) + B^m_2(t)u_1(t) + D^m_1 f(t), \quad z_m(0) = z_{m0}, \tag{2.3}$$

где $A^m_{1y} = C^m_1 AC^m_2$, $A^m_{1z} = C^m_1 AD^m_2$, $B^m_1 = C^m_1 B_1$, $y_{m0} = C^m_1 m_0$, $A^m_{2y} = D^m_1 AC^m_2$, $A^m_{2z} = D^m_1 AD^m_2$, $B^m_2 = D^m_1 B_1$, $z_{m0} = D^m_1 m_0$.

Ковариационная матрица $D(t)$ зависит только от $U_2(t)$; ее динамика описывается с помощью уравнения метода моментов [15] следующим образом:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t)+D(t)A'(t) + B_2(t)U_2(t)U'_2(t)B'_2(t), \quad t \in T, \quad D(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad D(0) = D_0. \tag{2.4}$$

Матричное уравнение (2.4) переписываем в виде более традиционного для рассматриваемых задач векторного уравнения, размерность которого, с учетом симметричности матрицы $D(t)$, определяется как $n_{yz} = (n^2 + n)/2$. Вводится вектор $d(t) = \{d_s(t)\}$, $s \in [1 : n_{yz}]$, состоящий из последовательно записанных и пронумерованных элементов матрицы $D(t)$, взятых построчно, начиная с элемента, расположенного на главной диагонали; его координаты находятся по элементам матрицы $D(t) = \{d_{ij}(t)\}$, $i, j \in [1 : n]$:

$$d_s(t) = d_{ij}(t), \quad i \le j, \quad s = (n - i/2)(i - 1) + j. \tag{2.5}$$

Преобразования, подробно описанные в [16], позволяют переписать систему (2.4) в виде

$$\dot{d}(t) = \bar{A}(t)d(t) + \bar{B}(t)v(t), \quad t \in T, \quad d(t) \in \mathbb{R}^{n_{yz}}, \quad d(0) = d_0, \tag{2.6}$$

где матрицы $\bar{A}(t) : T \to \mathbb{R}^{n_{yz}\times n_{yz}}$ и $\bar{B}(t) : T \to \mathbb{R}^{n_{yz}\times k}$ могут быть выписаны явно [16], а начальное состояние d_0 получено из D_0 по формуле (2.5). Произведение диагональных матриц $U_2(t)U'_2(t)$ приводит к появлению управляющего вектора $v(t) = (u^2_{21}(t), u^2_{22}(t), \ldots , u^2_{2k}(t))$, имеющего ограниченную на T вариацию и для всех $t \in T$ принимающего значения из некоторого выпуклого компакта $S_v \in \mathbb{R}^k$. В общем случае восстанавливается именно вектор-функция $v(t)$. При дополнительных, достаточно естественных, ограничениях на реальный вектор $u_2(t)$ возможна и его реконструкция.

Измерения первых q координат вектора x обеспечивают оценку типа (1.2) для $(q^2+q)/2$ координат вектора d, номера которых находятся из (2.5). Обозначим $n_y = (q^2+q)/2$, $n_z = n_{yz}-n_y$. Определим I_y как n_y-мерный упорядоченный по возрастанию массив индексов, соответствующих измеряемым координатам вектора d:

$$I_y = \{s_p\}, \quad s_p \in [1 : n_{yz}], \quad p \in [1 : n_y], \quad s_p = (n - i/2)(i - 1) + j, \quad i, j \in [1 : q], \quad i \le j,$$

а также I_z как n_z-мерный упорядоченный по возрастанию массив индексов, соответствующих неизмеряемым координатам вектора d.

Введем следующие матрицы:

$$C^d_1 = \{c^d_{1ps}\},\ p \in [1 : n_y],\ s \in [1 : n_{yz}], \quad c^d_{1ps} = 1, \text{ если } s = I_y[p],\ c^d_{1ps} = 0 \text{ в противном случае;}$$

$$D^d_1 = \{d^d_{1ps}\},\ p \in [1 : n_z],\ s \in [1 : n_{yz}], \quad d^d_{1ps} = 1, \text{ если } s = I_z[p],\ d^d_{1ps} = 0 \text{ в противном случае;}$$

$$C^d_2 = (C^d_1)'; \quad D^d_2 = (D^d_1)'.$$

Тогда n_y-мерный вектор $C^d_1 d$ — измеряемая часть d, а n_z-мерный вектор $D^d_1 d$ — его неизмеряемая часть. Обозначим $y_d = C^d_1 d$, $z_d = D^d_1 d$. Умножая уравнение (2.6) поочередно на матрицы C^d_1 и D^d_1, учитывая равенство $d = C^d_2 y_d + D^d_2 z_d$, приходим к системе с разделением измеряемых и неизмеряемых компонент:

$$\dot{y}_d(t) = A^d_{1y}(t)y_d(t) + A^d_{1z}(t)z_d(t) + B^d_1(t)v(t), \quad y_d(0) = y_{d0}, \tag{2.7}$$

$$\dot{z}_d(t) = A^d_{2y}(t)y_d(t) + A^d_{2z}(t)z_d(t) + B^d_2(t)v(t), \quad z_d(0) = z_{d0}, \tag{2.8}$$

где $A^d_{1y} = C^d_1 \bar{A} C^d_2$, $A^d_{1z} = C^d_1 \bar{A} D^d_2$, $B^d_1 = C^d_1 \bar{B}$, $y_{d0} = C^d_1 d_0$, $A^d_{2y} = D^d_1 \bar{A} C^d_2$, $A^d_{2z} = D^d_1 \bar{A} D^d_2$, $B^d_2 = D^d_1 \bar{B}$, $z_{d0} = D^d_1 d_0$.

Теперь для систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) можно переформулировать исходную задачу восстановления. По ходу развития процесса в дискретные моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l(N)$, $i \in [0 : l(N)]$ поступает информация, позволяющая оценить части фазового состояния указанных систем, соответственно, векторы $y_m(\tau_i)$ и $y_d(\tau_i)$. Полагаем, что выполняется следующее соотношение, соответствующее (1.2):

$$P\Big(\max_{i\in[1:l(N)]} \big\{ \big\| \xi^N_{mi} - y_m(\tau_i) \big\|_{\mathbb{R}^q}, \big\| \xi^N_{di} - y_d(\tau_i) \big\|_{\mathbb{R}^{n_y}} \big\} \le h(N) \Big) = 1 - g(N), \tag{2.9}$$

где оценочные векторы $\xi^N_{mi} \in \mathbb{R}^q$ и $\xi^N_{di} \in \mathbb{R}^{n_y}$ естественным образом получены из оценок m^N_{qi} и D^N_{qi}, а $h(N) \to 0$ и $g(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $v(t)$ по информации (2.9), причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомых входов в метрике соответственно пространств $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ и $L_2(T; \mathbb{R}^k)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

В такой формулировке задача соответствует задаче, рассмотренной, например, в [4]. В настоящей работе показано, что конечношаговый разрешающий алгоритм, предложенный в [2] для случая измерения всех координат фазового вектора в ОДУ и распространенный в [4] на случай измерения части координат, применим к решению полученной для систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) задачи, поскольку допускает конструктивное согласование своих параметров с количеством доступных измерению реализаций исходного случайного процесса, при этом легко проверяемые достаточные условия разрешимости задачи фактически формулируются в терминах исходной системы (1.1). Отметим, что задача гарантирующего позиционного управления в условиях дефицита информации для линейного СДУ при наличии управлений в детерминированном и стохастическом членах уравнения рассмотрена в [16].

3. Алгоритм восстановления неизвестных возмущений

Разрешающий алгоритм будем строить в случае выполнения следующего условия.

У с л о в и е. Размерность неизвестной вектор-функции $u_1(\cdot)$ не превосходит размерности компоненты $y_m(\cdot)$ (см. (2.2)) $(r \le q)$, и при всех $t \in T$ матрица $B^m_1(t)$ имеет ранг, равный r, т. е. является матрицей полного ранга. Размерность неизвестной вектор-функции $v(\cdot)$ не превосходит размерности компоненты $y_d(\cdot)$ (см. (2.7)) $(k \le n_y)$, и при всех $t \in T$ матрица $B^d_1(t)$ имеет ранг, равный k, т. е. является матрицей полного ранга.

Такое условие гарантирует единственность функций $u_1(\cdot)$ и $v(\cdot)$, определяющих решения $(y_m(\cdot), z_m(\cdot))$ и $(y_d(\cdot), z_d(\cdot))$ систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) соответственно. Обоснование этого утверждения опирается на свойства псевдообратной матрицы для матрицы полного ранга [4; 17] и, за вычетом малозначительных деталей, следует аналогичным рассуждениям из [4; 5]. Отметим, что количество измеряемых координат q исходной системы (1.1) должно быть не меньше размерности возмущения $u_1(\cdot)$, но может быть меньше размерности возмущения $v(\cdot)$.

Алгоритм, приведенный ниже, является приложением вычислительной процедуры из [4] к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). В начальный момент $\tau_0 = 0$ фиксируется значение N, определяются величины $l^N = l(N)$, $h^N = h(N)$ и $g^N = g(N)$ (см. (2.9)) и строится равномерное разбиение промежутка T с шагом $\delta^N = \vartheta/l^N$: $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta^N$, $i \in [0 : l^N]$. Вводится управляемая система-модель, фактически содержащая два независимых блока, относящихся к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). Фазовый вектор модели обозначим через $w(t)$; он состоит из двух троек: (i) q-мерного вектора $w_{my}(t)$, $(n - q)$-мерного вектора $w_{mz}(t)$, q-мерного вектора $w_{mu}(t)$ и (ii) n_y-мерного вектора $w_{dy}(t)$, n_z-мерного вектора $w_{dz}(t)$, n_y-мерного вектора $w_{dv}(t)$. Динамика модели и ее начальное состояние определяются соотношениями

$$\dot{w}_{my}(t) = \bar{u}_i^N, \quad \dot{w}_{dy}(t) = \bar{v}_i^N,$$

$$\dot{w}_{mz}(t) = A_{2y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N + A_{2z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i)$$

$$+B_2^m(\tau_i)B_1^{m+}(\tau_i)(\bar{u}_i^N - A_{1y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N - A_{1z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i) - C_1^m f(\tau_i)) + D_1^m f(\tau_i),$$

$$\dot{w}_{dz}(t) = A_{2y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N + A_{2z}^m(\tau_i)w_{dz}(\tau_i) + B_2^d(\tau_i)B_1^{d+}(\tau_i)(\bar{v}_i^N - A_{1y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N - A_{1z}^d(\tau_i)w_{dz}(\tau_i)),$$

$$\dot{w}_{mu}(t) = A_{1y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N + A_{1z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i) + B_1^m(\tau_i)\hat{u}_i^N + C_1^m f(\tau_i),$$

$$\dot{w}_{dv}(t) = A_{1y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N + A_{1z}^d(\tau_i)w_{dz}(\tau_i) + B_1^d(\tau_i)\hat{v}_i^N,$$

$$t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1], \quad w_{my}(\tau_0) = y_{m0}, \quad w_{mz}(\tau_0) = z_{m0}, \quad w_{mu}(\tau_0) = y_{m0},$$

$$w_{dy}(\tau_0) = y_{d0}, \quad w_{dz}(\tau_0) = z_{d0}, \quad w_{dv}(\tau_0) = y_{d0}. \tag{3.1}$$

Здесь $\bar{u}_i^N$, $\bar{v}_i^N$, $\hat{u}_i^N$, $\hat{v}_i^N$ — управляющие воздействия соответствующих размерностей, вычисляемые позиционно в момент τ_i по правилам, которые конкретизируются ниже.

Динамика (3.1) выбирается из следующих соображений. Движение вспомогательных компонент $w_{my}(t)$ и $w_{dy}(t)$ при подходящем выборе модельных управлений

$$\bar{u}^N(t) = \bar{u}_i^N, \quad \bar{v}^N(t) = \bar{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],$$

обеспечивает аппроксимацию координат $y_m(t)$ и $y_d(t)$. Тогда, пользуясь оценкой (2.9) и формальным выражением возмущений $u_1(t)$ и $v(t)$ из уравнений (2.2) и (2.7) с заменой $\dot{y}_m(t)$ и $\dot{y}_d(t)$ на $\bar{u}_i^N$ и $\bar{v}_i^N$ соответственно, ожидаем близость $w_{mz}(t)$ к $z_m(t)$ и $w_{dz}(t)$ к $z_d(t)$, что, в свою очередь, делает возможным отслеживание компонентами $w_{mu}(t)$ и $w_{dv}(t)$ координат $y_m(t)$ и $y_d(t)$ посредством выбора модельных управлений

$$\hat{u}^N(t) = \hat{u}_i^N, \quad \hat{v}^N(t) = \hat{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],$$

приближающих в нужном смысле функции $u_1(t)$ и $v(t)$. Очевидно, нетрудно записать дискретный аналог модели (3.1).

Работа алгоритма разбивается на l^N однотипных шагов. На i-м шаге, который выполняется на интервале $(\tau_i,\, \tau_{i+1}]$, исходными данными для вычислений служат оценки ξ_{mi}^N, ξ_{di}^N и сформированное к этому моменту состояние модели $w(\tau_i)$. Предполагая покоординатную ограниченность правых частей уравнений (2.2) и (2.7) константой $\bar{K}$ (ее существование очевидно), находим s-ю координату $\bar{u}_{is}^N$ вектора $\bar{u}_i^N$ и s-ю координату $\bar{v}_{is}^N$ вектора $\bar{v}_i^N$ из соотношений

$$\bar{u}_{is}^N = -\bar{K}\,\mathrm{sign}(w_{mys}(\tau_i) - \xi_{mis}^N), \quad s \in [1 : q], \quad \bar{v}_{is}^N = -\bar{K}\,\mathrm{sign}(w_{dys}(\tau_i) - \xi_{dis}^N), \quad s \in [1 : n_y]. \tag{3.2}$$

Вторая пара модельных управлений определяется следующим образом: $\hat{u}_i^N$ и $\hat{v}_i^N$ суть единственные решения соответствующих экстремальных задач

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^N &= \arg\min\left\{2\langle w_{mu}(\tau_i) - \xi_{mi}^N,\, B_1^m(\tau_i)u\rangle + \alpha^N \|u\|_{\mathbb{R}^r}^2 : u \in S_{u1}\right\} \\ \hat{v}_i^N &= \arg\min\left\{2\langle w_{dv}(\tau_i) - \xi_{di}^N,\, B_1^d(\tau_i)v\rangle + \alpha^N \|v\|_{\mathbb{R}^k}^2 : v \in S_v\right\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\alpha^N = \alpha(h^N)$ — параметр регуляризации. В нашем случае управления (3.3) очевидным образом находятся явно. После вычисления управлений по формулам (3.2) и (3.3) пересчитывается согласно дискретному аналогу (3.1) состояние модели $w(\tau_{i+1})$. Процесс заканчивается в конечный момент времени ϑ.

Теорема. *Пусть выполняются условия согласования параметров*

$$h^N \to 0, \quad g^N \to 0, \quad \delta^N \to 0, \quad \alpha^N \to 0, \quad \frac{\delta^N + h^N}{\alpha^N} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{3.4}$$

Тогда для модельных управлений $\hat{u}^N(\cdot)$ *и* $\hat{v}^N(\cdot)$*, формируемых согласно* (3.3)*, имеет место сходимость*

$$P\Big(\max\{\, \|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)},\, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^k)}\} \,\to\, 0\Big) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{3.5}$$

При дополнительных предположениях справедлива следующая оценка точности алгоритма относительно количества реализаций процесса, доступных измерению:

$$P\Big(\max\{\, \|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)},\, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^k)}\} \,\le C_1\Big(\frac{1}{N}\Big)^{2/13}\Big) = 1 - C_2\Big(\frac{1}{N}\Big)^{2/13}, \tag{3.6}$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые константы, не зависящие от* N*,* $u_1(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$*.*

Доказательство. Сходимость (3.5) непосредственно следует из приложения результатов работы [4] к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) и из соотношений (2.9) и (3.4). Для вывода (3.6) используем оценки, полученные для неизмеряемых координат исходной системы [4, с. 39]. В рассматриваемом случае они переписываются следующим образом:

$$P\Big(\forall i \in [0 : l^N] \quad \max\{\, \|w_{mz}(\tau_i) - z_m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n-q}}\,,\, \|w_{dz}(\tau_i) - z_d(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n_z}}\} \le \bar{C}_1(h^N + \delta^N)\Big)$$
$$= 1 - g^N. \tag{3.7}$$

Здесь и ниже через $\bar{C}_i$ будем обозначать вспомогательные константы, которые не зависят от оцениваемых величин и могут быть выписаны явно.

Соотношения (3.7) дают возможность считать, что с вероятностью $1 - g^N$ неточно измеряются (восстанавливаются) все координаты систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). Отсюда, переписывая полученную в [18] в предположении об ограниченности вариации реальных возмущений оценку скорости сходимости алгоритма восстановления для случая измерения всех координат фазового вектора в виде

$$\max\big\{\, \|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)},\, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^k)}\big\} \,\le \bar{C}_2\Big(\frac{(h^N + \delta^N)^2}{(\alpha^N)^2} + \alpha^N\Big)^{1/2}$$

и полагая $\delta^N \le \bar{C}_3 h^N$ и $\alpha^N = \bar{C}_4 (h^N)^{2/3}$ (см. [18, с. 76]), имеем

$$P\Big(\max\{\, \|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)},\, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^k)}\} \,\le \bar{C}_5 (h^N)^{1/3}\Big) = 1 - g^N. \tag{3.8}$$

Покажем, что стандартные оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N $(N > 1)$ реализациям $x^1(\tau_i), x^2(\tau_i), \ldots, x^N(\tau_i)$ случайных величин $x(\tau_i)$, $i \in [1 : l^N]$, по следующим правилам [14, гл. 22]:

$$m_i^N = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x^r(\tau_i), \quad D_i^N = \frac{1}{N-1}\sum_{r=1}^{N}(x^r(\tau_i) - m_i^N)(x^r(\tau_i) - m_i^N)', \tag{3.9}$$

обеспечивают выполнение свойства (1.2) (и, следовательно, (2.9)).

Соотношения, которые связывают параметры из (3.4), определяющие алгоритм восстановления, и количество доступных измерению реализаций процесса N, могут быть получены в явном виде для оценок (3.9) посредством незначительной технической переработки результатов [10; 16]; приведем явные формулы:

$$E_m = \big\{\forall i \in [0 : l_m^N] \quad \big\|m_i^N - m(\tau_i)\big\|_{\mathbb{R}^n} \le h_m^N\big\}, \quad P(E_m) = 1 - g_m^N,$$

$$h_m^N = \bar{C}_6\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta_m^N = \vartheta/l_m^N = \bar{C}_7\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\alpha}, \quad g_m^N = \bar{C}_8\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1-\alpha}; \tag{3.10}$$

$$E_d = \{\forall i \in [0 : l_d^N] \quad \Big\|D_i^N - D(\tau_i)\Big\|_{\mathbb{R}^{n\times n}} \le h_d^N\}, \quad P(E_d) = 1 - g_d^N,$$

$$h_d^N = \bar{C}_9\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta_d^N = \vartheta/l_d^N = \bar{C}_{10}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\alpha(1/2+3\epsilon)}, \quad g_d^N = \bar{C}_{11}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)}, \tag{3.11}$$

где $0 < \epsilon < 1/2$, $0 < \alpha < 1$.

С целью рассмотрения в оценках (3.10) и (3.11) одного и того же разбиения отрезка T точками τ_i положим

$$h^N = \bar{C}_{12}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\min\{\alpha,\alpha(1/2+3\epsilon)\}}, \quad g^N = \bar{C}_{14}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\min\{1-\alpha,(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)\}}.$$

Отметим, что величины h^N, δ^N и g^N совпадают по порядку малости либо с тройкой h_m^N, δ_m^N и g_m^N, либо с тройкой h_d^N, δ_d^N и g_d^N. Тогда, “загрубляя” более точную по порядку относительно $1/N$ из оценок (3.10), (3.11) и используя то, что статистические выборочные оценки (3.9) независимы [14], можем записать

$$P(E_mE_d) = P\Big(\max_{i\in[1:l^N]}\Big\{\Big\|m_i^N - m(\tau_i)\Big\|_{\mathbb{R}^n}, \Big\|D_i^N - D(\tau_i)\Big\|_{\mathbb{R}^{n\times n}}\Big\} \le h^N\Big) = (1-g^N)^2 \ge 1 - 2g^N.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $1/2 + 3\epsilon < 1$, $\epsilon < 1/6$. Тогда

$$h^N = \bar{C}_{12}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\alpha(1/2+3\epsilon)}, \quad g^N = \bar{C}_{14}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)}. \tag{3.12}$$

Для выполнения неравенства $\delta^N \le \bar{C}_3 h^N$ достаточно положить $1/2 - \epsilon = \alpha(1/2 + 3\epsilon)$, откуда $\epsilon = \dfrac{1-\alpha}{2(3\alpha+1)}$, $0 < \epsilon < 1/2$ при $0 < \alpha < 1$. Для найденного ϵ в соотношениях (3.12) показатель степени величины $1/N$ у h^N и δ^N равен $\dfrac{2\alpha}{3\alpha+1}$, а у g^N — $\dfrac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1}$. Для получения оценки (3.6), учитывая формулу (3.8), полагаем $\dfrac{2\alpha}{3(3\alpha+1)} = \dfrac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1}$, откуда $\alpha = 3/4$, $\epsilon = 1/26$ и, следовательно, показатели степени величины $1/N$ в (3.6) равны $2/13$.

2. Пусть $1/2 + 3\epsilon \ge 1$, $\epsilon \ge 1/6$. Тогда

$$h^N = \bar{C}_{12}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{\alpha}, \quad g^N = \bar{C}_{14}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{1-\alpha}.$$

Очевидно, наибольший показатель степени величины $1/N$ в аппроксимационной части оценки (3.6) равен $1/9$, что хуже, чем полученный в предыдущем случае. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе исследована достаточно общая постановка обратной задачи для линейного СДУ, предполагающая динамическую реконструкцию двух неизвестных неслучайных возмущений, входящих в детерминированный и стохастический члены уравнения. В качестве входной информации используются точные измерения некоторого количества реализаций части координат случайного процесса в дискретные моменты времени. Задача сведена к обратной задаче для двух систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица исходного процесса. Для ее решения предложена конструктивная модификация известного алгоритма восстановления, разработанного для частично наблюдаемых систем ОДУ. Основным результатом статьи является оценка точности алгоритма относительно количества доступных измерению реализаций. Отметим, что ряд вопросов, связанных с рассматриваемой постановкой, остается открытым. Например, представляются возможными улучшение порядка точности оценки (3.6) при дополнительных предположениях и исследование случая зашумленных измерений траекторий исходного СДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
3. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
4. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости / УрО АН СССР. Свердловск, 1989. С. 33–47.
5. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Некоторые алгоритмы восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
6. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 109–122.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
9. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** Позиционное моделирование стохастического управления в динамических системах // Докл. Междунар. конф. по стохастической оптимизации. Киев, 1984. С. 43–45.
10. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
11. **Розенберг В.Л.** Задача реконструкции возмущения в линейном стохастическом уравнении: случай неполной информации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 214–221.
12. **Ширяев А.Н.** Вероятность, статистика, случайные процессы. Ч. I, II. М.: Издательство Моск. ун-та, 1974. 628 с.
13. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
14. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 642 с.
16. **Rozenberg V.L.** A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 68–82.
17. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
18. **Вдовин А.Ю.** К задаче восстановления возмущения в динамической системе: дис...канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1989. 117 с.

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: rozen@imm.uran.ru

Поступила 16.02.2016