ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.962.24

ОБ ОТТАЛКИВАЮЩИХ ЦИКЛАХ И ХАОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Л. И. Родина

Рассматриваются разностные уравнения, правая часть каждого из которых в данный момент времени зависит не только от значения в предыдущий момент, но и от случайного параметра, принимающего значения в заданном множестве Ω. Для данной вероятностной модели исследованы различные динамические режимы развития, которые имеют определенные отличия от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных физических системах. Получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение со случайными параметрами либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

Ключевые слова: разностные уравнения со случайными параметрами, притягивающий и отталкивающий циклы, хаотическая траектория.

L. I. Rodina. On repelling cycles and chaotic solutions of difference equations with random parameters.

We consider difference equations with right-hand sides depending at each moment not only on the value at the preceding moment but also on a parameter that takes random values in a given set Ω. For this probabilistic model, we study various dynamic scenarios, which are in a certain way different from scenarios of deterministic models and give a more comprehensive presentation of the processes in real physical systems. We derive conditions for the existence of attracting and repelling cycles of length $k \geqslant 1$ that hold for all values of the random parameter and conditions that hold with probability one. We also derive conditions under which the solutions are chaotic with probability one. It is shown that the chaotic solutions exist in the case where either the equation with random parameters has no cycles or all the cycles are repelling with probability one.

Keywords: difference equations with random parameters, attracting and repelling cycles, chaotic trajectory.

MSC: 37H10, 34F05, 60H25, 93E03

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235

Введение

Известно, что многие системы различной природы обладают дискретным по времени режимом работы. Примерами таких систем являются: экономические модели, в которых используются периодически определяемые индексы и показатели; модели популяционной динамики, характеризующие изменения в популяциях от поколения к поколению; дискретные технические системы управления цифровыми сигналами (системы телеметрии, передающие периодические данные с различных метеостанций, космических зондов или нефтяных скважин). При математическом моделировании дискретных динамических систем возникают автономные разностные (или рекуррентные) уравнения. Например, развитие многих биологических популяций с неперекрывающимися поколениями (к которым можно отнести популяции некоторых видов насекомых, рыб, однолетних растений) определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{0.1}$$

где x_{n+1} — размер популяции в момент времени $n+1$, который выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений описаны, в частности, в работах [1–3]. К наиболее известным результатам можно отнести теорему

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части.

А. Н. Шарковского [2, гл. 3; 4] о сосуществовании циклов различной длины и утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [5] о связи между наличием цикла периода три и существованием несчетного множества хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (0.1) в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n, принимающего значения в множестве Ω. Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{0.2}$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$, $I = [a, b]$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где} \;\; \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \; j = 0, \ldots, n,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_n) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (например, [6, гл. 2, § 3]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$. Отметим, что подобные вероятностные модели, построенные для управляемых систем со случайными параметрами, исследованы в [7; 8].

В настоящей работе получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geqslant 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение (0.2) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

1. О притягивающих и отталкивающих циклах разностных уравнений со случайными параметрами

Сначала приведем определение и основные свойства *притягивающего и отталкивающего циклов* для детерминированного уравнения (0.1) (см. [2, с. 7–9]).

Точка $\beta_0 \in I$ называется *периодической точкой периода* $k \in \mathbb{N}$ для уравнения (0.1), если $f^k(\beta_0) = \beta_0$ и $f^m(\beta_0) \neq \beta_0$ при $m = 1, \ldots, k-1$. Если $k \geqslant 2$, то каждая из точек $\beta_m = f^m(\beta_0)$, $m = 1, \ldots, k-1$ также является периодической точкой периода k, т. е. точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *периода* k (здесь $f^1 = f$, $f^k = f(f^{k-1}), k = 2, 3, \ldots$).

Положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (0.1) называется точка $x_* \in I$ такая, что $f(x_*) = x_*$. Положение равновесия x_* является точкой периода $k = 1$.

Цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ уравнения (0.1) называется *притягивающим,* если существует окрестность U этого цикла такая, что $f(U) \subset U$ и $\bigcap\limits_{n \geqslant 0} f^n(U) = B$. В этом случае для каждой точки $x_0 \in U$ траектория $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ распадается на k последовательностей, сходящихся к точкам $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ соответственно.

Цикл B называется *отталкивающим,* если существует его окрестность U, которую каждая точка из множества $U \setminus B$ покидает за конечное время, т. е. для каждого $x \in U \setminus B$ найдется номер $N = N(x)$, при котором $f^N(x) \notin U$.

Если отображение f дифференцируемо, существуют простые достаточные условия для различения притягивающих и отталкивающих циклов: нужно вычислить величину

$$\lambda(B) = f'(\beta_0) \cdot \ldots \cdot f'(\beta_{k-1}),$$

называемую *мультипликатором* цикла B, и если окажется, что $|\lambda(B)| < 1$, то цикл B притягивающий, а если $|\lambda(B)| > 1$, то цикл B отталкивающий. В случае $|\lambda(B)| = 1$ цикл может быть как притягивающим, так и отталкивающим, может иметь место и более сложное поведение траекторий в его окрестности.

В данном разделе получены достаточные условия существования *притягивающего и отталкивающего циклов* для уравнения со случайными параметрами (0.2), выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma^n \doteq (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}), \quad f^n(\sigma^n, x) \doteq f\big(\omega_{n-1}, \ldots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))\big).$$

Будем также пользоваться обозначениями $f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x)$ и $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x)$, подразумевая, что значения функции $f^n(\sigma, x)$ зависят только от первых n членов последовательности $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots)$.

Определение 1. Точки $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода $k \geqslant 1$* для уравнения (0.2), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0, \quad f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m \quad \text{для всех} \quad m = 1, \ldots, k-1 \tag{1.3}$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода. *Положением равновесия* (неподвижной точкой) уравнения (0.2) назовем точку $x_* \in I$ такую, что $f(\omega, x_*) = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ назовем *притягивающим циклом* для уравнения (0.2), если существует окрестность U этого цикла такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Цикл B назовем *притягивающим с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность $U = U(\sigma)$ цикла B такая, что $\bigcap\limits_{n \geqslant 1} f^n(\sigma, U) = B$.

Определение 3. Цикл B назовем *отталкивающим циклом* уравнения (0.2), если существует его окрестность U, которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время, т.е. для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$. Цикл B назовем *отталкивающим с вероятностью единица,* если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Предложение 1. *Если уравнение* (0.2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *и*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \varlimsup_{x \to \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} \big|f'_x(\omega, x)\big| < 1,$$

то B является притягивающим циклом данного уравнения.

Доказательство. Найдем производную функции $f^k(\sigma, x)$ в точке β_j, $j = 0, \ldots, k-1$, учитывая равенство (1.3):

$$\big(f^k(\sigma, \beta_j)\big)'_x = f'_x(\omega_0, \beta_j) f'_x(\omega_1, \beta_{j+1}) \cdot \ldots \cdot f'_x(\omega_{k-1}, \beta_{j+k-1}),$$

где $\beta_m = \beta_{m-k}$, если $m \geqslant k$. Тогда для любого $j = 0, \ldots, k-1$

$$\varlimsup_{x \to \beta_j} \sup_{\sigma_k \in \Omega^k} \big|\big(f^k(\sigma, x)\big)'_x\big| = \prod_{i=0}^{k-1} \varlimsup_{x \to \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| < 1.$$

Следовательно, существует окрестность U цикла B и постоянная $C < 1$ такие, что

$$\sup_{\sigma_k \in \Omega^k} \big|\big(f^k(\sigma, x)\big)'_x\big| \leqslant C < 1 \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Можно предполагать, что U является объединением некоторых окрестностей $U_0, \ldots, U_{k-1}$ точек $\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}$ соответственно, т. е. $U = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} U_i$.

Обозначим через $J(x_0, \beta_j)$ интервал с концами x_0 и β_j. По формуле конечных приращений для любого $x_0 \in U_j$ существует точка $\widehat{x}_0 \in J(x_0, \beta_j) \subset U_j$ такая, что

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| = \left|f^k(\sigma, x_0) - f^k(\sigma, \beta_j)\right| = \left|\left(f^k(\sigma, \widehat{x}_0)\right)'_x\right| \cdot |x_0 - \beta_j|$$

$$\leqslant \sup_{\sigma^k \in \Omega^k} \left|\left(f^k(\sigma, \widehat{x}_0)\right)'_x\right| \cdot |x_0 - \beta_j| \leqslant C|x_0 - \beta_j|.$$

Поскольку $C < 1$, то $x_k = x_k(\sigma, x_0) \in U_j$. Далее, найдется точка $\widehat{x}_1 \in J(x_k, \beta_j) \subset U_j$, для которой

$$|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| = |f^k(\sigma, x_k) - f^k(\sigma, \beta_j)| = \left|\left(f^k(\sigma, \widehat{x}_1)\right)'_x\right| \cdot |x_k - \beta_j|,$$

следовательно, $|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leqslant C|x_k - \beta_j| \leqslant C^2|x_0 - \beta_j|$. Аналогично для всех $\sigma \in \Sigma$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leqslant C^n|x_0 - \beta_j|, \ \text{ где } \ C < 1,$$

из которого получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = 0$ для любого $x_0 \in U_j$, всех $\sigma \in \Sigma$ и каждого $j = 0, \ldots, k-1$, т. е. цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ является притягивающим. □

Предложение 2. *Если уравнение* (0.2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *и*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \varliminf_{x\to\beta_i} \inf_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1, \tag{1.4}$$

то цикл B является отталкивающим циклом уравнения (0.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (1.4) следует, что для любого $j = 0, \ldots, k-1$ имеет место неравенство

$$\varliminf_{x\to\beta_j} \inf_{\sigma_k\in\Omega^k} \left|\left(f^k(\sigma, x)\right)'_x\right| = \prod_{i=0}^{k-1} \varliminf_{x\to\beta_i} \inf_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1.$$

Следовательно, существуют окрестность U цикла B и постоянная $D > 1$ такие, что

$$\inf_{\sigma_k\in\Omega^k} \left|\left(f^k(\sigma, x)\right)'_x\right| \geqslant D > 1 \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Пусть $U = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} U_i$, где U_i — окрестность точки β_i, $i = 0, \ldots, k-1$ и $x_0 \in U_j$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 1, получаем, что для всех $\sigma \in \Sigma$ и тех $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_{nk}(\sigma, x_0) \in U_j$, выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \geqslant D^n|x_0 - \beta_j|, \ \text{ где } \ D > 1.$$

Поэтому для каждой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x_0)$, для которого $x_{Nk}(\sigma, x_0) = f^{Nk}(\sigma, x_0) \notin U$, т. е. цикл B является отталкивающим. □

Далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. *Если уравнение* (0.2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *и существует окрестность U этого цикла такая, что*

$$M\Big(\ln \sup_{x\in U} \left|\left(f^k(\sigma, x)\right)'_x\right|\Big) < 0, \tag{1.5}$$

то цикл B является притягивающим с вероятностью единица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\sigma_1^k = (\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})$, $\sigma_2^k = (\omega_k, \ldots, \omega_{2k-1}), \ldots$, тогда любое $\sigma \in \Sigma$ можно представить в виде $\sigma = (\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k, \ldots)$. Пусть $U = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} O_\Delta(\beta_i)$, где $O_\Delta(\beta_i) = (\Delta - \beta_i, \Delta + \beta_i)$, $\Delta > 0$. Для фиксированного $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{C_n(\sigma)\}_{n=1}^\infty$, где

$$C_n(\sigma) = C_n(\sigma_n^k) = \sup_{x \in O_\Delta(\beta_j)} \left|\left(f^k(\sigma_n^k, x)\right)_x'\right|$$

и последовательность $\{S_n(\sigma)\}_{n=0}^\infty$:

$$S_0(\sigma) = 0, \quad S_n(\sigma) = \ln C_1(\sigma_1^k) + \ldots + \ln C_n(\sigma_n^k), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

которая является случайным блужданием на прямой. Из неравенства (1.5) следует, что с вероятностью единица $S_n(\sigma)$ уходит в минус бесконечность и достигает конечного максимума $S \geqslant 0$. Это означает, что существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и постоянная $S \geqslant 0$ такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\sigma) = -\infty$ и $S_n(\sigma) \leqslant S$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ (см. [9, с. 447–449]). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} C_1(\sigma_1^k) \cdot \ldots \cdot C_n(\sigma_n^k) = 0$ и неравенство

$$C_1(\sigma_1^k) \cdot \ldots \cdot C_n(\sigma_n^k) \leqslant e^S \tag{1.6}$$

выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma = (\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k, \ldots) \in \Sigma_0$.

Возьмем $x_0 \in O_\delta(\beta_j)$, где $\delta = \Delta e^{-S} \leqslant \Delta$. Так же, как при доказательстве предложения 1, получаем

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| \leqslant \sup_{x \in J(x_0, \beta_j)} \left|\left(f^k(\sigma_1^k, x)\right)_x'\right| \cdot |x_0 - \beta_j| \leqslant C_1(\sigma_1^k) \cdot |x_0 - \beta_j|,$$

где $J(x_0, \beta_j)$ — интервал с концами x_0 и β_j. Из (1.6) следует, что $x_k = x_k(\sigma, x_0) \in O_\Delta(\beta_j)$; найдем такую точку $\widehat{x}_1 \in J(x_k, \beta_j) \subset O_\Delta(\beta_j)$, что $|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| = \left|\left(f^k(\sigma_2^k, \widehat{x}_1)\right)_x'\right| \cdot |x_k - \beta_j|$, тогда

$$|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leqslant C_2(\sigma_2^k) \cdot |x_k - \beta_j| \leqslant C_1(\sigma_1^k) C_2(\sigma_2^k) \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leqslant C_1(\sigma_1^k) \cdot \ldots \cdot C_n(\sigma_n^k) \cdot |x_0 - \beta_j|. \tag{1.7}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} C_1(\sigma_1^k) \cdot \ldots \cdot C_n(\sigma_n^k) = 0$ с вероятностью единица, из (1.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = 0$$

для любого $x_0 \in O_\delta(\beta_j)$ также с вероятностью единица. Таким образом, цикл B является притягивающим с вероятностью единица. □

Теорема 2. *Если уравнение* (0.2) *имеет цикл* $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ *и существует окрестность* U *этого цикла такая, что*

$$M\Big(\ln \inf_{x \in U} \left|\left(f^k(\sigma, x)\right)_x'\right|\Big) > 0, \tag{1.8}$$

то цикл B *является отталкивающим с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} O_\delta(\beta_i)$, где $O_\delta(\beta_i) = (\delta - \beta_i, \delta + \beta_i)$, $\delta > 0$. Для фиксированного $j \in \{0, \dots, k-1\}$ рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{c_n(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$c_n(\sigma) = c_n(\sigma_n^k) = \inf_{x \in O_\delta(\beta_j)} \left| \left(f^k(\sigma_n^k, x) \right)_x' \right|$$

и последовательность $\{s_n(\sigma)\}_{n=1}^{\infty} : s_n(\sigma) = \ln c_1(\sigma_1^k) + \ldots + \ln c_n(\sigma_n^k)$. Из (1.8) следует, что с вероятностью единица $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\sigma) = +\infty$, т. е. существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(\sigma) = +\infty$ для каждого $\sigma \in \Sigma_0$. Пусть $x_0 \in O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j$, $D = \delta/|x_0 - \beta_j|$. Тогда для любого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется такой номер $N = N(\sigma, x_0)$, что имеет место неравенство $s_N(\sigma) > \ln D$, а значит, и равносильное ему неравенство

$$e^{s_N(\sigma)} = c_1(\sigma_1^k) \cdot \ldots \cdot c_N(\sigma_N^k) > D.$$

По формуле конечных приращений для любого $x_0 \in O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j$ найдется $\widehat{x}_0 \in J(x_0, \beta_j)$, для которого

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| = \left| f^k(\sigma_1^k, x_0) - f^k(\sigma_1^k, \beta_j) \right| = \left| \left(f^k(\sigma_1^k, \widehat{x}_0) \right)_x' \right| \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Следовательно,

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| \geqslant \inf_{x \in J(x_0, \beta_j)} \left| \left(f^k(\sigma_1^k, x) \right)_x' \right| \cdot |x_0 - \beta_j| \geqslant c_1(\sigma_1^k) \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Аналогично получаем, что

$$|x_{Nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = |x_{Nk}(\sigma, x_0) - x_{Nk}(\sigma, \beta_j)| > D|x_0 - \beta_j| = \delta,$$

т. е. $x_{Nk}(\sigma, x_0) \notin O_\delta(\beta_j)$ для всех $(\sigma, x_0) \in \Sigma_0 \times (O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j)$ и любого $j = 0, \dots, k-1$. $\square$

2. Об отталкивающих циклах и хаотическом поведении решений уравнения со случайными коэффициентами

Для детерминированного уравнения (0.1) кроме циклических решений и решений, приближающихся или отталкивающихся от циклических, существует еще один тип поведения решения. Это так называемые хаотические решения, которые не являются периодическими и даже не стремятся ни к какому положению равновесия или циклу. Решение $x_n(x_0)$ уравнения (0.1) называется хаотическим [10, с. 35], если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(x_0)$ не существует. Имеет место следующая зависимость между наличием цикла периода три и существованием хаотических решений уравнения (0.1).

Теорема (Т. Ли, Дж. Йорк [5]). *Предположим, что существует точка $x_0 \in I$, для которой $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$ и $x_3 = f^3(x_0)$ удовлетворяют неравенству $x_3 \leqslant x_0 < x_1 < x_2$ (или $x_3 \geqslant x_0 > x_1 > x_2$). Тогда справедливы следующие утверждения*:

1. *Для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует периодическая точка в I, имеющая период k.*

2. *Существует несчетное множество $G \subset I$ (содержащее непериодические точки), которое удовлетворяет условиям*

1) *для любых $p, q \in G$, $p \neq q$ имеют место соотношения*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |x_n(p) - x_n(q)| > 0, \quad \varliminf_{n\to\infty} |x_n(p) - x_n(q)| = 0,$$

2) *для каждой точки $p \in G$ и периодической точки $q \in I$ выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |x_n(p) - x_n(q)| > 0.$$

Вернемся к рассмотрению вероятностной модели (0.2). Так же, как и в детерминированном случае, решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (0.2) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует.

О п р е д е л е н и е 4. Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (0.2), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические. Таким образом, множество хаотических решений $x_n(\sigma, x_0)$, порожденных апериодической с вероятностью единица точкой x_0, имеет меру единица.

Аналогично определению работы [5] точку y назовем *со временем периодической* точкой уравнения (0.2), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geqslant 1$.

Например, для логистического уравнения

$$x_{n+1} = \omega_n x_n(1 - x_n/K), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0, K], \quad n = 0, 1, \ldots,$$

точка $x = 0$ является точкой положения равновесия (точкой периода $k = 1$), а точка $x = K$ — со временем периодическая.

У с л о в и е 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \ldots, v_r\}$, где $r \geqslant 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$, $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ и каждая из функций $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $I = [a, b]$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* 1 *и либо уравнение* (0.2) *не имеет ни одного цикла* (*периода* $k \geqslant 1$), *либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть* Y *— множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка* $x_0 \in I \setminus Y$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ обозначим через X_k множество, состоящее из неподвижных точек каждой из функций $f^k(\sigma^k, x)$, где $\sigma^k \in \Omega^k$. В силу условия 1 это множество содержит конечное число точек.

Предположим, что уравнение (0.2) не имеет ни одного цикла. Пусть Σ^* — такое подмножество Σ, что для любого $\sigma \in \Sigma^*$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ существует и равен некоторому $x_*(\sigma) \in I$. Покажем, что $\mu(\Sigma^*) = 0$. Зафиксируем $x_* \in X_k$ и покажем, что мера тех σ, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$, равна нулю. Поскольку x_* не является периодической точкой уравнения (0.2), то найдется такое множество $V \subset \Omega^k$, что $\mu(V) > 0$ и $f^k(\sigma^k, x_*) \neq x_*$ для всех $\sigma^k \in V$. Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\sigma^k \in V$ и всех $x \in O_\varepsilon(x_*)$ либо выполнено неравенство $f^k(\sigma^k, x) > x + 2\varepsilon$, либо $f^k(\sigma^k, x) < x - 2\varepsilon$.

Покажем, что если $x_0 \in O_\varepsilon(x_*)$, то с вероятностью единица найдется бесконечно много таких номеров $m \in \mathbb{N}$, что $x_{mk}(\sigma, x_0) \notin O_\varepsilon(x_*)$. Отметим, что если $x_0 \in O_\varepsilon(x_*)$ и $\sigma^k \in V$, то либо $x_k = f^k(\sigma^k, x_0) > x_0 + 2\varepsilon > x_* + \varepsilon$, либо $x_k = f^k(\sigma^k, x_0) < x_0 - 2\varepsilon < x_* - \varepsilon$. Следовательно, $x_k \notin O_\varepsilon(x_*)$, если $\sigma^k \in V$. Назовем *"успехом"* появление события $V \subset \Omega^k$ в последовательности $\sigma = (\sigma_1^k, \ldots, \sigma_n^k, \ldots)$. Поскольку $\mu(V) > 0$, то в последовательности σ с вероятностью единица появится хотя бы один "успех" (следовательно, появится бесконечно много таких "успехов") [11, с. 338]. Поэтому, если $x_{nk} \in O_\varepsilon(x_*)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то с вероятностью единица найдется бесконечно много таких $m > n$, что $x_{mk}(\sigma, x_0) \notin O_\varepsilon(x_*)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$ с вероятностью нуль.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$ и $x_* \notin X_k$. Тогда $f^k(\sigma^k, x_*) \neq x_*$ для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ и найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\sigma^k \in \Omega_k$ и всех $x \in O_\varepsilon(x_*)$ либо выполнено неравенство

$$f^k(\sigma^k, x) > x + 2\varepsilon,$$

либо $f^k(\sigma^k, x) < x - 2\varepsilon$. Аналогично доказанному выше, если $x \in O_\varepsilon(x_*)$, то $f^k(\sigma^k, x) \notin O_\varepsilon(x_*)$ для всех $\sigma^k \in \Omega_k$. Поэтому если $x_* \notin X_k$, то не существует таких $\sigma \in \Sigma$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$. Таким образом, поскольку множество X_k конечное, то $\mu(\Sigma^*) = 0$.

Пусть уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ длины $k \geqslant 1$, отталкивающий с вероятностью единица, тогда $B \subseteq Y$. В силу определения 3 существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность U данного цикла, которую каждая точка из множества $U \setminus B$ покидает за конечное время. Это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) \neq \beta_j$$

для любого $j = 0, \ldots, k-1$, всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Из определения со временем периодических точек следует, что такие точки также не могут быть пределом последовательности $\{x_{nk}(\sigma, x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ при любом $k \in \mathbb{N}$. □

Следующее утверждение является следствием теорем 2 и 3.

Следствие. *Пусть множество Y содержит все периодические и со временем периодические точки уравнения* (0.2). *Если выполнено условие* 1 *и уравнение* (0.2) *либо не имеет ни одного цикла, либо для каждого цикла B периода $k \geqslant 1$ существует окрестность U такая, что*

$$M\Big(\ln \inf_{x \in U} \big|\big(f^k(\sigma, x)\big)'_x\big|\Big) > 0,$$

то любая точка $x_0 \in I \setminus Y$ апериодическая с вероятностью единица.

П р и м е р. Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{x} = x(1-x)$ и в случайные моменты времени τ_n некоторая доля биомассы ψ_n изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = x(1-x), \quad t \neq \tau_n, \quad \Delta x\big|_{t=\tau_n} = -\psi_n x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.9}$$

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ между моментами заготовок и доли заготовок ψ_n, $n = 0, 1, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $[\alpha_1, \alpha_2] \subset (0, \infty)$ и имеют одинаковое распределение G, $\psi_0, \psi_1, \ldots$ принадлежат отрезку $[\gamma_1, \gamma_2] \subset (0, 1)$ и имеют одинаковое распределение H. Далее, пусть $\Omega = [\alpha_1, \alpha_2] \times [\gamma_1, \gamma_2]$, $\omega_n = (\theta_n, \psi_n) \in \Omega$, вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ определим так же, как во введении.

Пусть начальный объем биомассы популяции равен x_0, длина промежутка до следующего изъятия равна θ_0, тогда (решая уравнение $\dot{x} = x(1-x)$) находим, что перед этим изъятием объем биомассы составит $h(x_0, \theta_0) = \dfrac{x_0 e^{\theta_0}}{x_0(e^{\theta_0} - 1) + 1}$. В результате извлечения биомассы из популяции в момент τ_1 доли ψ_0 от общего объема $h(x_0, \theta_0)$ оставшаяся часть биомассы после изъятия равна $x_1 = f(\theta_0, \psi_0, x_0) = \dfrac{x_0 e^{\theta_0}(1 - \psi_0)}{x_0(e^{\theta_0} - 1) + 1}$. Аналогично если через x_n обозначим объем биомассы после изъятия в момент τ_n, то x_n удовлетворяют разностному уравнению со случайными параметрами

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0, +\infty), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.10}$$

где $f(\omega, x) = f(\theta, \psi, x) = \dfrac{x e^{\theta}(1 - \psi)}{x(e^{\theta} - 1) + 1}$. Уравнение (2.10) имеет цикл $B = \{x_*\}$ длины 1, содержащий неподвижную точку $x_* = 0$. Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины с распределениями G и H соответственно.

Предложение 3. *Имеют место следующие утверждения*:

1. *Если $e^{\alpha_2}(1 - \gamma_1) < 1$, то цикл $B = \{x_*\}$ уравнения* (2.10) *притягивающий.*

2. *Если* $e^{\alpha_2}(1-\gamma_1) \geqslant 1$, *но* $M\Theta + M\ln(1-\Psi) < 0$, *то цикл* $B = \{x_*\}$ *является притягивающим с вероятностью единица* (*при этом* $\mu(\Sigma_0) = 1$, *но* $\Sigma_0 \neq \Sigma$).

3. *Если выполнены условие* 1 *и неравенство* $M\Theta + M\ln(1-\Psi) > 0$, *то каждая точка* $x_0 \in (0, +\infty)$ *апериодическая с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для всех $x \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\sup_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega, x)| = \sup_{\omega\in\Omega} |f'_x(\omega, 0)| = e^{\alpha_2}(1-\gamma_1),$$

то первое утверждение следует из предложения 1. Второе и третье утверждения являются следствием теорем 1 и 3. □

Несложно показать, что асимптотическое поведение решений для дифференциального уравнения (2.9) "наследует" поведение решений разностного уравнения (2.10) в следующем смысле: если уравнение (2.10) имеет притягивающий цикл или его решения хаотические с вероятностью единица, то такими же свойствами будет обладать уравнение (2.9). Таким образом, предложение 3 также дает условия существования притягивающего цикла и условия хаотичности для решений уравнения (2.9). Решение $x(t, \sigma, x_0)$ уравнения (2.9) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x(\tau_{nk}, \sigma, x_0)$ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. **Ризниченко Г.Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 232 с.
4. **Шарковский А.Н.** Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16, № 1. С. 61–71.
5. **Li Tien-Yien, Yorke James A.** Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82, no. 10. P. 985–992.
6. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
7. **Мастерков Ю.В., Родина Л.И.** Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 38–49.
8. **Родина Л.И.** О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
10. **Братусь А.С., Новожилов А.С., Родина Е.В.** Дискретные динамические системы и математические модели в экологии: учеб. пособие. М.: МИИТ, 2005. 139 с.
11. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 529 с.

Родина Людмила Ивановна
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Удмуртский государственный университет
e-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила 22.12.2015