ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 519.63

НЕЯВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В. Г. Пименов, А. С. Хенди

В этой статье рассматривается техника построения разностных схем для уравнений в частных производных дробного порядка по времени и пространству с эффектом запаздывания по времени. Мы используем сдвинутые формулы Грюнвальда — Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству и L1-algorithm для аппроксимации дробных производных по времени. Также используется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением предыстории модели по времени. Алгоритм является аналогом чисто неявного численного метода и сводится на каждом временном шаге к решению линейных алгебраических систем. Получен порядок сходимости. Проведены численные эксперименты, которые подтверждают полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: дробные дифференциальные уравнения, функциональное запаздывание, метод сеток, интерполяция, экстраполяция, порядок сходимости.

V. G. Pimenov, A. S. Hendy. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection–diffusion equation with delay.

A technique for constructing difference schemes for time- and space-fractional partial differential equations with time delay is considered. Shifted Grünwald–Letnikov formulas and the L1-algorithm are used for the approximation of space-fractional and time-fractional derivatives, respectively. We also use piecewise constant interpolation and extrapolation by extending the model prehistory in time. The algorithm is an analog of the pure implicit numerical method and reduces to the solution of linear algebraic systems at each time step. The order of convergence is obtained. Numerical experiments are carried out to support the obtained theoretical results.

Keywords: fractional differential equation, functional delay, grid schemes, interpolation, extrapolation, convergence order.

MSC: 65N06, 65N12, 65Q20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226

Введение

Дробные дифференциальные уравнения (см., например, [1; 2]) вызывают большой интерес у исследователей в последние десятилетия ввиду их большей точности при моделировании задач во многих направлениях науки. Уравнения в частных производных дробных порядков делятся на два класса: с дробной производной по пространству и дробной производной по времени; имеется много работ, в которых конструируются численные методы для таких уравнений [3; 4]. В данной статье мы опираемся на результаты работы [4], в которой был построен неявный численный метод для решения уравнения адвекции-диффузии с дробной производной по времени и двухсторонней производной по пространству, однако в нашей работе в уравнение внесен нелинейный эффект запаздывания.

Уравнения переноса (адвекции) и диффузии с запаздыванием общего вида, постоянным или переменным, сосредоточенным или распределенным, также широко распространены в моделировании динамических процессов. В этих уравнениях сочетаются эффекты распределенности параметров по пространству и наследственности по времени [5]. Численные методы для

[1]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и гранта Российского научного фонда (проект 14-35-00005).

таких уравнений изучались во многих работах (см. обзор в [6]); мы следуем подходу этой работы.

Рассмотрим класс дробных уравнений адвекции-диффузии с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}=-V\frac{\partial u}{\partial x}+D\Big(\frac{1}{2}+\frac{q}{2}\Big)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}+D\Big(\frac{1}{2}-\frac{q}{2}\Big)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}+f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)),\qquad(0.1)$$

где $x\in[a,b]$, $t\in[t_0,T]$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot)=\{u(x,t+s),-\tau\le s<0\}$ — предыстория искомой функции, $\tau>0$ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия: $u(x,t)=\varphi(x\,t),\ x\in[a,b],\ t\in[t_0-\tau,t_0]$, а также граничные условия: $u(a,t)=\varphi_1(t),\ u(b,t)=\varphi_2(t),\ t\in[t_0,T]$.

Будем предполагать, что $\beta\ge0$, $-1\le q\le1$, $V>0$, $D>0$, $1<\alpha\le2$, $0<\gamma<1$.

Дробная производная по времени определяется в смысле Капуто [1, разд. 2.4.1]:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(m-\gamma)}\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dfrac{\partial^m u(x,\xi)}{\partial\xi^m}d\xi}{(t-\xi)^{\gamma-m+1}}, & m-1<\gamma<m,\quad m\in\mathbb{N},\\[2ex] \dfrac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & \gamma=m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Левосторонняя и правосторонняя дробные производные определяются в смысле Римана — Лиувилля [1, разд. 2.6]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_a^x\frac{u(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1,$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\,\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int\limits_x^b\frac{u(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1.$$

Обозначим через $Q=Q[-\tau,0)$ множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, с нормой $\|u(\cdot)\|_Q=\sup\limits_{s\in[-\tau,0)}|u(s)|$. Предположим, что функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$ определен на $[a,b]\times[t_0,T]\times\mathbb{R}\times Q$.

Будем предполагать, что функционал f, функции $\varphi(x,t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и коэффициенты β, q, V, D таковы, что задача (0.1) имеет единственное решение $u(x,t)$. Дополнительно предположим, что функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$ липшицев по двум последним аргументам, т. е. существуют константы L и K такие, что для всех $x\in[a,b]$, $t\in[t_0,T]$, $u^1\in\mathbb{R}$, $u^2\in\mathbb{R}$, $v^1(\cdot)\in Q$ и $v^2(\cdot)\in Q$ выполняется следующее неравенство:

$$|f(x,t,u^1,v^1(\cdot))-f(x,t,u^2,v^2(\cdot))|\le L|u^1-u^2|+K\parallel v^1(\cdot)-v^2(\cdot)\parallel_Q.\qquad(0.2)$$

1. Вывод разностной схемы

Проведем дискретизацию задачи. Пусть шаги по пространству и времени определяются соотношениями $h=(b-a)/N$, $\Delta=(T-t_0)/M$, где $N,\ M$ — целые положительные числа (без ограничения общности предположим, что $\tau/\Delta=m$ целое). Введем точки разбиения $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,N$, и $t_j=t_0+j\Delta$, $j=0,\dots,M$. Будем обозначать через u^i_j приближения функции $u(x_i,t_j)$ в узлах.

Для каждого фиксированного $i=0,\dots,N$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_j, $j=0,\dots,M,$: $\{u^i_k\}_j=\{u^i_k,j-m\le k\le j\}$. Отображение $I:\{u^i_k\}_j\to v^i(t)$,

$t \in [t_j - \tau, t_j + \Delta]$, назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Так как мы будем конструировать неявный метод первого порядка по времени, используем кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} u^i_{l-1}, & t_{l-1} \le t < t_l,\ 1 \le l \le j, \\ u^i_{j-1}, & t_j \le t \le t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \le t \le t_0. \end{cases}$$

Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением обладает следующим свойством.

Лемма 1 [7, лемма 3.1]. *Если решение $u(x_i, t)$ задачи* (0.1) *— непрерывно дифференцируемая по t функция, то существует такая константа C_1, что выполняется неравенство*

$$\max_{t_j - \tau \le t \le t_j + \Delta} |v^i(t) - u(x_i, t)| \le \max_{j-m \le k \le j} |u^i_k - u(x_i, t_k)| + C_1 \Delta.$$

Это свойство называется первым порядком погрешности оператора интерполяции-экстраполяции [7, определение 3.7].

Дискретизируем пространственные дробные производные Римана — Лиувилля с помощью сдвинутых формул Грюнвальда — Летникова [3]:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega^\alpha_j u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) + O(h^p), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega^\alpha_j u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) + O(h^p). \tag{1.2}$$

Коэффициенты ω^α_j определяются неоднозначно, в зависимости от их выбора порядок p может быть различным; положим

$$\omega^\alpha_j = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

тогда аппроксимации будут иметь порядок $p = 1$.

Дискретизируем дробную производную Капуто по времени, используя $L1$-алгоритм [4]:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} u(x, t_{k+1}) = \frac{1}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k} b^\gamma_j \big[u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})\big] + O(\Delta^{2-\gamma}), \tag{1.3}$$

где $b^\gamma_j = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$, $j = 0, 1, \ldots, M$.

Также мы будем использовать формулы численного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} + O(h), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + O(\Delta). \tag{1.5}$$

В результате получаем следующую неявную разностную схему:

$$\frac{u^i_{k+1} - u^i_k}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k} b^\gamma_j [u^i_{k+1-j} - u^i_{k-j}] = -V \frac{u^i_{k+1} - u^{i-1}_{k+1}}{h}$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\Big) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega^\alpha_j u^{i+1-j}_{k+1} + \Big(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\Big) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega^\alpha_j u^{i-1+j}_{k+1} + f^i_{k+1}, \tag{1.6}$$

$f^i_{k+1} = f(x_i, t_{k+1}, v^i(t_k + \Delta), v^i_{t_k+\Delta}(\cdot))$.

Схема дополняется начальными условиями $u^i_0 = \varphi(t_i),\ i = 0, 1, \ldots, N$, и граничными условиями $u^0_k = \varphi_1(t_k),\ u^M_k = \varphi_2(t_k),\ k = 1, 2, \ldots, M$.

Схема может быть переписана в следующем виде:

$$\mu u^i_{k+1} - r_2 u^{i-1}_{k+1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\neq 1}^{i+1} \omega^\alpha_j u^{i+1-j}_{k+1} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\neq 1}^{N-i+1} \omega^\alpha_j u^{i-1+j}_{k+1}$$

$$= u^i_{k+1} + \beta r_1 [b^\gamma_k u^i_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (b^\gamma_j - b^\gamma_{j+1}) u^i_{k-j}] + \Delta f^i_{j+1}, \tag{1.7}$$

где $r_1 = \Delta^{1-\gamma}/\Gamma(2-\gamma)$, $r_2 = V\Delta/h$, $r_3 = D\Delta/h^\alpha$, $\mu = 1 + \beta r_1 + r_2 + \alpha r_3$.

Лемма 2 [4, замечание 2]. *Коэффициенты матрицы системы* (1.7) *имеют строгое диагональное преобладание с положительными диагональными элементами, следовательно, система разрешима и имеет единственное решение.*

Таким образом, применение дискретной схемы сводится на каждом временном слое с номером k к решению линейной системы относительно неизвестных u^i_{k+1}, и эта система разрешима согласно результату леммы 2.

2. Сведение к общей разностной схеме систем с наследственностью

Чтобы исследовать метод (1.7) на сходимость и порядок сходимости, сведем его к общей разностной схеме систем с наследственностью. Эта схема была изложена для численных методов решения обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений в работе [8], для уравнений в частных производных с эффектом наследственности в работе [9]. Если уравнение содержит дробную производную только по пространству, то метод также вкладывается в общую схему, см. работу [10], где был исследован численный метод решения для уравнения с односторонней дробной производной по пространству и с эффектом наследственности по времени. Однако, если уравнение содержит дробную производную по времени, непосредственное использование результатов этой схемы затруднительно, так как возникает проблема с определением устойчивости метода в общей схеме.

Определим для каждого временного слоя с номером $j = 0, 1, \ldots, M$ послойный вектор $u_j = (u^0_j, u^1_j, \ldots, u^N_j)$.

Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойных векторов к моменту $t_j,\ j = 0, 1, \ldots, M$, вектором $y_i = \{u_k\}_j = \{u_k, 0 \le k \le j\}$.

Так как в силу леммы 2 система (1.7) разрешима, то она может быть записана в виде

$$y_{j+1} = S_j y_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)),$$

т. е. так, как в общей разностной схеме для систем с наследственностью.

Размерность вектора y_j — $(M+1) \times (j+1)$, соответственно размерность вектора y_{j+1} — $(M+1) \times (j+2)$, следовательно, матрица S_j не квадратная. Хотя можно ввести определение устойчивости метода и в этом случае, например, как в [7, определение 3.33], однако эффективные спектральные критерии отсутствуют. Поэтому будем исследовать сходимость метода (1.7) непосредственно, не используя результаты общей теоремы о порядке сходимости [6, теорема 1], однако повторяя фактически методику вложения в эту схему, согласно идеям книги [6].

3. Погрешность аппроксимации

Исследуем погрешность аппроксимации (невязку) метода (1.6).

Невязкой (без интерполяции) метода (1.6) назовем по определению сеточную функцию

$$\psi_k^i = \frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k} b_j^\gamma\big[u(x_i,t_{k+1-j})-u(x_i,t_{k-j})\big]$$

$$+V\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_{i-1},t_{k+1})}{h} - \Big(\frac{1}{2}+\frac{q}{2}\Big)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1})$$

$$-\Big(\frac{1}{2}-\frac{q}{2}\Big)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1}) - \hat f_{k+1}^i,\quad \hat f_{k+1}^i = f\big(x_i,t_{k+1},u(x_i,t_{k+1}),u_{t_{k+1}}(x_i,\cdot)\big).$$

Лемма 3. *Пусть точное решение $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t и по x, а также дробные производные $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ и $\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial(-x)^\alpha}$ непрерывно дифференцируемы по t и по x. Тогда невязка без интерполяции имеет порядок $\Delta+h$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим входящие в определение невязки без интерполяции величины в окрестности точки (x_i,t_{k+1}) и воспользуемся разложениями (1.1)–(1.5). $\square$

Для каждого фиксированного $i=0,\ldots,N$ введем дискретную предысторию точного решения к моменту времени t_j, $j=0,\ldots,M$: $\{u(x_i,t_k)\}_j=\{u(x_i,t_k), j-m\le k\le j\}$. Будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением точного решения

$$w^i(t)=\begin{cases} u(x_i,t_{l-1}), & t_{l-1}\le t\le t_l,\quad 1\le l\le j,\\ u(x_i,t_{j-1}), & t_j\le t\le t_j+\Delta,\\ \varphi(x_i,t), & t_0-\tau\le t\le t_0.\end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (1.6) назовем по определению сеточную функцию

$$\nu_k^i = \frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k} b_j^\gamma\big[u(x_i,t_{k+1-j})-u(x_i,t_{k-j})\big]$$

$$+V\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_{i-1},t_{k+1})}{h} - \Big(\frac{1}{2}+\frac{q}{2}\Big)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1})$$

$$-\Big(\frac{1}{2}-\frac{q}{2}\Big)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1}) - \check f_{k+1}^i,\ \ \check f_{k+1}^i = f\big(x_i,t_{k+1},w^i(t_k+\Delta),w^i_{t_k+\Delta}(\cdot)\big).$$

Лемма 4. *В условиях предыдущей леммы невязка с интерполяцией имеет порядок $\Delta+h$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определений невязки с интерполяцией и невязки без интерполяции имеем

$$\nu_k^i=\psi_k^i+f(x_i,t_{k+1},u(x_i,t_{k+1}),u_{t_{k+1}}(x_i,\cdot))-f(x_i,t_{k+1},w^i(t_k+\Delta),w^i_{t_k+\Delta}(\cdot)).$$

Из того, что кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет первый порядок (лемма 1), получаем

$$|w^i(t)-u(x_i,t)|\le C_1\Delta,\quad t_j-\tau\le t\le t_j+\Delta.$$

Из этих соотношений с учетом условия (0.2) вытекает утверждение леммы. $\square$

4. Сходимость метода

Обозначим через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует постоянная C, не зависящая от h и Δ, такая, что $|\varepsilon_j^i| \le C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, 1, \dots, N$ и $j = 0, 1, \dots, M$.

Определим для каждого временного слоя с номером $j = 0, 1, \dots, M$ послойную погрешность — вектор $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{N-1})$ с нормой $\|\varepsilon_j\| = \max_{1\le i\le N-1} |\varepsilon_j^i|$.

Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту $t_j,\ j = 0, 1, \dots, M : \{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \le k \le j\}$ с нормой $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max_{0\le k\le j} \|\varepsilon_k\|$.

Лемма 5. *Пусть* $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1\le i\le N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$, *тогда*

$$(1+\beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| \le \Big|\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1\Big[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^{i_0}\Big] + \Delta\check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta\nu_k^{i_0}\Big|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем определение невязки с интерполяцией в виде

$$\mu u(x_i, t_{k+1}) - r_2 u(x_{i-1}, t_{k+1}) - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1})$$

$$= u(x_i, t_{k+1}) + \beta r_1\Big[b_k^\gamma u(x_i, t_0) + \sum_{j=0}^{k-1}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u(x_i, t_{k-J})\Big] + \Delta\check{f}_{j+1}^i + \Delta\nu_k^i.$$

Отсюда и из определения метода (1.7) получаем уравнение для погрешности

$$\mu\varepsilon_{k+1}^i - r_2\varepsilon_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i-1+j}$$

$$= \varepsilon_{k+1}^i + \beta r_1\Big[b_k^\gamma \varepsilon_0^i + \sum_{j=0}^{k-1}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^i\Big] + \Delta\check{f}_{j+1}^i + \Delta\nu_k^i - \Delta f_{j+1}^i.$$

Так как $1 + \beta r_1 = \mu - r_2 - \alpha r_3$, то, используя свойства коэффициентов $\omega_1^\alpha = -\alpha$, $\omega_j^\alpha > 0,\ j = 2, 3, \dots$, $\sum_{j=0}^{i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$, $\sum_{j=0}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$ [4, лемма 1], получаем

$$(1+\beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| \le \Big(\mu - r_2 - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha\Big)|\varepsilon_{k+1}^{i_0}|$$

$$\le \mu|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| - r_2|\varepsilon_{k+1}^{i_0-1}| - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j}| - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j}|$$

$$\le \Big|\mu\varepsilon_{k+1}^{i_0} - r_2\varepsilon_{k+1}^{i_0-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j\ne 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j}\Big|$$

$$= \Big|\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1\Big[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^{i_0}\Big] + \Delta\check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta\nu_k^{i_0}\Big|.$$

□

В следующем утверждении проводится оценка накопившейся предыстории послойной погрешности к моменту t_{k+1} через накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту t_k.

Лемма 6. *Предположим, что условия леммы* 3 *выполнены, тогда справедлива оценка*

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \le (1+(L+K)\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_2\Delta(h+\Delta),$$

где C_2 — некоторая константа.

Доказательство. Пусть $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1\le i\le N-1}|\varepsilon_{k+1}^{i}|$, тогда из леммы 5 получаем

$$(1+\beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| \le |\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1\Big[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^{i_0}\Big] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta\nu_k^{i_0}|$$

$$\le [1+\beta r_1(b_k^+\sum_{j=0}^{k-i}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma))]\|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta|\nu_k^{i_0}|$$

$$\le (1+\beta r_1)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta|\nu_k^{i_0}|.$$

Разделим обе части этого неравенства на $(1+\beta r_1)$, получим

$$\|\varepsilon_{k+1}\| \le \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \frac{\Delta}{1+\beta r_1}(|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|) \le \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta(|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|). \quad (4.1)$$

Из липшицевости функции f по двум последним аргументам (из неравенства (0.2)) и свойств кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением следует неравенство

$$|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| \le (L+K)\|\{\varepsilon_j\}_k\|. \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) и леммы 4 следует утверждение доказываемой леммы. □

Теорема. *Пусть точное решение $u(x,t)$ уравнения* (0.1) *является достаточно гладким* (*выполнено предположение леммы* 3), *тогда метод* (1.7) *сходится с порядком $h+\Delta$.*

Доказательство. Из леммы 6 имеем

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \le A\|\{\varepsilon_j\}_k\| + B,$$

где $A = 1+(L+K)\Delta$, $B = C_2\Delta(h+\Delta)$. Последовательно получаем $\|\{\varepsilon_j\}_0\| = 0$, $\|\{\varepsilon_j\}_1\| \le B$, $\|\{\varepsilon_j\}_2\| \le AB+B, \dots, \|\{\varepsilon_j\}_n\| \le (A^{n-1}+\dots+A+1)B$. Используя формулу геометрической прогрессии, получаем для всех временных слоев с номером $n \le M$

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leqslant \frac{A^n-1}{A-1}B \leqslant \frac{A^M-1}{A-1}B.$$

Подставим в эту оценку выражения для A и B, воспользуемся также связью $\Delta M = T - t_0$:

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leqslant \frac{(1+(L+K)\Delta)^{(T-t_0)/\Delta}-1}{(L+K)\Delta}C_2\Delta(h+\Delta).$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leqslant \frac{C_2}{L+K}e^{(L+K)(T-t_0)}(h+\Delta),$$

равномерную по всем $n = 1,2\dots,M$. Эта оценка означает сходимость метода с порядком $h+\Delta$. □

5. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial(-x)^\alpha} + f, \tag{5.1}$$

$$f = \frac{1}{\ln((t^2/4)(x-1/2)^3(3/2-x)^3)}\Big(2\Big(t+\frac{t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^3\Big(\frac{3}{2}-x\Big)^3 - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}\Big(\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^{3-\alpha}$$

$$+\Big(\frac{3}{2}-x\Big)^{3-\alpha}\Big) + \frac{1}{2}\frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)}\Big(\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^{4-\alpha} + \Big(\frac{3}{2}-x\Big)^{4-\alpha}\Big) - \frac{1}{2}\frac{3\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)}\Big(\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^{5-\alpha} + \Big(\frac{3}{2}-x\Big)^{5-\alpha}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)}\Big(\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^{6-\alpha} + \Big(\frac{3}{2}-x)^{6-\alpha}\Big)\Big)\ln\Big(u\Big(x,t-\frac{t}{2}\Big)\Big),$$

заданное при $1/2 \le x \le 3/2, \quad 1 \le t \le 5$, с начальными и граничными условиями вида

$$u(x,r) = r^2\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^3\Big(\frac{3}{2}-x\Big)^3, \quad \frac{1}{2} \le r \le 1, \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2},$$

$$u\Big(\frac{1}{2},t\Big) = 0, \quad u\Big(\frac{3}{2},t\Big) = 0, \quad 1 \le t \le 5.$$

Точным решением уравнения (5.1) является функция $u(x,t) = t^2(x-1/2)^3(3/2-x)^3$. Обозначим максимальную погрешность в узлах через

$$E(\Delta,h) = \max_{0\le j\le M,\ 0\le i\le N} |\ u(x_i,t_j) - u^i_j\ |.$$

Таблица 1

Зависимость погрешности от пространственного шага и порядок погрешности

h	$\gamma = 0.15, \quad \alpha = 1.1$		$\gamma = 0.85, \quad \alpha = 1.9$	
	$E(\Delta,h)$	$order_s$	$E(\Delta,h)$	$order_s$
1/20	0.00568		0.00437	
1/40	0.00293	0.9567	0.00222	0.9765
1/80	0.00149	0.9687	0.00112	0.9884
1/160	0.00075	0.9854	0.00056	0.9996
1/320	0.00037	0.9975	0.00028	1.0004

Таблица 2

Зависимость погрешности от временного шага и порядок погрешности

Δ	$\gamma = 0.15, \quad \alpha = 1.1$		$\gamma = 0.85, \quad \alpha = 1.9$	
	$E(\Delta,h)$	$order_t$	$E(\Delta,h)$	$order_t$
1/16	0.00074		0.000032	
1/32	0.00038	0.9432	1.625×10^{-5}	0.97743
1/64	0.00019	0.9632	8.19×10^{-6}	0.9886
1/128	0.00009	0.9778	4.098×10^{-6}	0.9988
1/256	0.00004	0.9965	2.05×10^{-6}	0.9999

Проведен численный эксперимент, в котором тестировался метод (1.7) при изменении пространственного шага h с величины 1/20 до величины 1/320 при фиксированном временном шаге $\Delta = 1/256$. Порядок сходимости относительно пространственного шага характеризуется в эксперименте величиной $order_s = \log_2\left(\dfrac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)}\right)$, изменения которой отражены в табл. 1. В эксперименте также брались разные порядки α и γ дробных производных.

Для исследования зависимости максимальной погрешности от времени временной шаг Δ менялся от 1/16 до 1/256 при фиксированном пространственном шаге $h = 1/4000$. Порядок сходимости относительно временного шага характеризуется в эксперименте величиной $order_t = \log_2\left(\dfrac{E(2\Delta, h)}{E(\Delta, h)}\right)$, изменения проиллюстрированы в табл. 2. Из этих таблиц можно заметить, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими результатами. Можно также отметить, что зависимость величины погрешности от параметра γ гораздо сильнее при изменении временного шага, чем при изменении пространственного шага.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 368 p.
2. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 524 p.
3. **Meerschaert M.M., Tadjeran C.** Finite difference approximations for two sided space fractional partial differential equations // Appl. Numer. Math. 2006. Vol. 56, no. 1. P. 80–90.
4. **Liu F., Zhuang P., Burrage K.** Numerical methods and analysis for a class of fractional advection–dispersion models // Comput. Math. Appl. 2012. Vol. 64, no. 10. P. 2990–3007.
5. **Wu J.** Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
6. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд. Уральского ун-та, 2014. 134 с.
7. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
8. **Пименов В.Г.** Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, №. 1. С. 105–114.
9. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №. 1. С. 178–189.
10. **Pimenov V.G., Hendy A.S.** Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1358–1361.

Поступила 13.03.2016

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Хенди Ахмед Саид
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ahmed.hendy@fsc.bu.edu.eg