ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО КОНТРОЛЬНОГО ПРИМЕРА Л. С. ПОНТРЯГИНА ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР[1]

М. С. Никольский

В статье изучается обобщение известного в теории дифференциальных игр контрольного примера Л. С. Понтрягина. Исследование ведется с позиций первого прямого метода Л. С. Понтрягина, который был развит им для конструктивного решения задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования-убегания.

Ключевые слова: дифференциальные игры, контрольный пример Л. С. Понтрягина, первый прямой метод Л. С. Понтрягина.

M. S. Nikol'skii. A study of the generalized Pontryagin test example from the theory of differential games.

A generalization of L.S. Pontryagin's test example from the theory of differential games is considered. The study is based on Pontryagin's first direct method, which was developed for the constructive solution of the performance problem in linear pursuit–evasion differential games.

Keywords: differential games, Pontryagin's test example, Pontryagin's first direct method.

MSC: 49N70, 49N75, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-211-217

Введение

Как известно (см., например, [1–7]), в поздние годы своей жизни Л. С. Понтрягин занимался теорией дифференциальных игр преследования-убегания. В работе [1] он рассмотрел, в частности, контрольный пример, на котором опробовал свою весьма сложную нелинейную теорию решения задач качества (этот термин введен Р. Айзексом в [8]). Понтрягинскому контрольному примеру весьма повезло в литературе по теории дифференциальных игр: его часто используют для иллюстрации новых методов решения задачи качества (см., например, [9]). В работах [3–5] Л. С. Понтрягин разработал два конструктивных прямых метода решения задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования-убегания. Для этих методов характерно широкое использование теории многозначных отображений и выпуклого анализа. С помощью прямых методов исследование контрольного примера проводится весьма просто и конструктивно (см., например, [5; 7]).

Отметим, что эти результаты получены Л. С. Понтрягиным в его специальной формализации дифференциальной игры. С точки зрения общей теории позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского и его школы (см., например, [10]), прямые методы Л. С. Понтрягина позволяют конструктивно построить так называемое u-стабильное множество, с помощью которого можно эффективно решать задачу качества, используя соответствующую позиционную стратегию Н. Н. Красовского. Л. С. Понтрягин неоднократно отмечал это важное обстоятельство, как существенно расширяющее возможности его методов.

Настоящая статья посвящена изучению некоторого обобщения исходного контрольного примера Л. С. Понтрягина с помощью его первого прямого метода. Обобщение состоит в том, что числовые коэффициенты заменяются на матричные.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

1. Об исходном контрольном примере Л. С. Понтрягина

Здесь мы коротко рассмотрим исходный контрольный пример Л. С. Понтрягина из [1].

Пусть динамика догоняющего объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_1 &= \overline{x}_2, \\ \dot{\overline{x}}_2 &= -\alpha\overline{x}_2 - u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, u — k-мерные ($k \geqslant 1$) векторы из стандартного действительного евклидова арифметического пространства $\mathbb{R}^k$, элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов; $\alpha > 0$ — числовой коэффициент. Пусть динамика убегающего объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\overline{y}}_1 &= \overline{y}_2, \\ \dot{\overline{y}}_2 &= -\beta\overline{y}_2 + v, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, v — k-мерные ($k \geqslant 1$) векторы из $\mathbb{R}^k$, $\beta > 0$ — числовой коэффициент. В $\mathbb{R}^{4k}$ выделено терминальное множество M из векторов $z = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{pmatrix}$ таких, что

$$\overline{x}_1 = \overline{y}_1. \tag{3}$$

Систему линейных уравнений (3) можно переписать в виде

$$Nz = 0, \tag{4}$$

где блочная матрица N размерности $k \times 4k$ имеет вид

$$N = (E_k, O_k, -E_k, O_k). \tag{5}$$

Здесь E_k — единичная матрица порядка k, O_k — нулевая матрица порядка k.

Целью догоняющего объекта (1) является по возможности быстрое выведение вектора

$$z(t) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \\ \overline{y}_1(t) \\ \overline{y}_2(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

на M из начального состояния

$$z_0 = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(0) \\ \overline{x}_2(0) \\ \overline{y}_1(0) \\ \overline{y}_2(0) \end{pmatrix} \tag{7}$$

с помощью подходящего выбора измеримого управления $u(t) \in P$, $t \geqslant 0$, на основании доступной информации о ходе игры.

Убегающий объект (2) применяет произвольное измеримое управление $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, и он, вообще говоря, противодействует цели догоняющего объекта.

Для краткого изложения конструкций первого прямого метода Л.С. Понтрягина применительно к исследуемой дифференциальной игре рассмотрим следующие блочные матрицы (ср. с (1), (2)):

$$A = \begin{pmatrix} A_1, & O_{2k} \\ O_{2k}, & A_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_k, & E_k \\ O_k, & -\alpha E_k \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} O_k, & E_k \\ O_k, & -\beta E_k \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$B = \begin{pmatrix} O_k \\ E_k \\ O_k \\ O_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} O_k \\ O_k \\ O_k \\ E_k \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем считаем, что

$$u \in P \subset \mathbb{R}^k, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^k, \tag{11}$$

где

$$P = \rho S_1(0), \quad Q = \sigma S_1(0), \tag{12}$$

причем константы $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $S_1(0)$ — шар из $\mathbb{R}^k$ с центром в 0 и радиуса 1.

В соответствии с первым прямым методом Л. С. Понтрягина при $r \geqslant 0$ надо вычислить множество

$$\hat{w}(r) = Ne^{rA}BP \overset{*}{-} Ne^{rA}CQ, \tag{13}$$

где e^{rA} — экспоненциал матрицы rA (см. [11]), символ “ $\overset{*}{-}$ ” означает геометрическую разность множеств. Напомним известное

Определение 1. Пусть X, Y — непустые множества из $\mathbb{R}^k$. Тогда геометрическая разность $X \overset{*}{-} Y$ определяется формулой

$$X \overset{*}{-} Y = \bigcap_{y \in Y} (X - y).$$

Можно показать, что в рассматриваемой дифференциальной игре при $r \geqslant 0$ имеет место формула (см. (13))

$$\hat{w}(r) = \rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} S_1(0) \overset{*}{-} \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta} S_1(0). \tag{14}$$

Чтобы при данном $r \geqslant 0$ множество $\hat{w}(r)$ было непустым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} \geqslant \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta}. \tag{15}$$

Многозначное отображение $\hat{w}(r)$ (см. (13), (14)) используется в первом прямом методе следующим образом. Пусть $\hat{w}(r) \neq \varnothing$ при $r \in [0, \theta]$, где $\theta > 0$ — некоторое число. Пусть при некотором $\tau \in [0, \theta]$ для начальной точки z_0 (см. (7)) рассматриваемой дифференциальной игры, не принадлежащей терминальному множеству M (см. (3)–(5)), выполняется включение

$$Ne^{\tau A} z_0 \in \int_0^{\tau} \hat{w}(r)\, dr, \tag{16}$$

где интеграл от $\hat{w}(r)$ на $[0, \tau]$ понимается в смысле теории многозначных отображений (см., например, [11]).

Нам будет полезно следующее

Определение 2. Векторная функция $U(t, v)\colon [0, +\infty) \times Q \to P$ называется суперпозиционно измеримой, если функция $U(t, v(t))$ при $t \geqslant 0$ является измеримой по Лебегу для произвольной измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$.

В теории дифференциальных игр важным является выбор множеств стратегий игроков. В [7] мы фиксировали в качестве стратегий догоняющего суперпозиционно измеримые функции $U(t,v)$ и в качестве стратегий убегающего — программные измеримые функции $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$. В этих классах стратегий при выше сделанных предположениях для начальной точки z_0 (см. (16)) с помощью первого прямого метода Л. С. Понтрягина обосновывается утверждение: существует такая суперпозиционно измеримая стратегия $U(t,v)$, что при любой измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geqslant 0$, соответствующее решение (6) системы (1), (2) с начальным условием (7) попадает на терминальное множество M (см. (3)–(5)) не позже момента τ, т. е. окончание преследования произойдет не позже момента τ.

Большой интерес для приложений представляет нахождение условий на положительные константы α, β, ρ, σ, при которых при всех $r \geqslant 0$ выполняется неравенство (15). Л.С. Понтрягин в [1] нашел такие условия в виде одновременного выполнения двух неравенств

$$\rho \geqslant \sigma, \quad \frac{\rho}{\alpha} \geqslant \frac{\sigma}{\beta}. \tag{17}$$

При выполнении этих неравенств множество $\hat{w}(r)$ (см. (13)) непусто при всех $r \geqslant 0$ и вычисляется по формуле

$$\hat{w}(r) = \Big(\rho\frac{1-e^{-\alpha r}}{\alpha} - \sigma\frac{1-e^{-\beta r}}{\beta}\Big)S_1(0),$$

при этом соотношение (16) переписывается в виде включения

$$\overline{x}_1(0) + \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}\,\overline{x}_2(0) - \overline{y}_1(0) - \frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta}\,\overline{y}_2(0) \in \int\limits_0^\tau \left(\rho\frac{1-e^{-\alpha r}}{\alpha} - \sigma\frac{1-e^{-\beta r}}{\beta}\right) dr\, S_1(0). \tag{18}$$

Отсюда нетрудно видеть (ср. с (17)), что при $\rho \geqslant \sigma$, $\dfrac{\rho}{\alpha} > \dfrac{\sigma}{\beta}$ включение (18) выполняется для каждого начального состояния $z_0 \notin M$ при достаточно большом $\tau > 0$, т. е. в исследуемой дифференциальной игре преследование может быть гарантированно завершено за конечное время τ.

2. Изучение обобщенного контрольного примера Л. С. Понтрягина

Здесь мы рассмотрим следующее обобщение задачи преследования-убегания (1)–(5). Пусть динамика догоняющего объекта описывается системой дифференциальных уравнений (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_1 &= \overline{x}_2, \\ \dot{\overline{x}}_2 &= \mathfrak{A}\overline{x}_2 - u, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ — k-мерные ($k \geqslant 1$) векторы из $\mathbb{R}^k$, $\mathfrak{A}$ — квадратная матрица порядка k.

Пусть динамика убегающего объекта описывается системой дифференциальных уравнений (ср. с (2))

$$\begin{aligned} \dot{\overline{y}}_1 &= \overline{y}_2, \\ \dot{\overline{y}}_2 &= \mathfrak{B}\overline{y}_2 + v, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, v — k-мерные векторы из $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 1$), $\mathfrak{B}$ — квадратная матрица порядка k. Пусть терминальное множество M из $\mathbb{R}^{4k}$ описывается соотношениями (3)–(5). В (19), (20) на управляющие векторы догоняющего и убегающего u, v из $\mathbb{R}^k$ накладываются геометрические ограничения (11), (12). Для этой новой дифференциальной игры мы проведем вычисления в соответствии с конструкциями первого прямого метода Л. С. Понтрягина по образцу разд. 1, в котором было $\mathfrak{A} = -\alpha E_k$, $\mathfrak{B} = -\beta E_k$.

В настоящем разделе блочную матрицу A (см. (8)) мы определим несколько иначе (ср. с (9), (10)):

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_k, & E_k \\ O_k, & \mathfrak{A} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} O_k, & E_k \\ O_k, & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

Для множества $\hat{w}(r)$ (см. (13)) при $r \geqslant 0$ можно обосновать формулу

$$\hat{w}(r) = D(r)P \overset{*}{-} F(r)Q, \tag{21}$$

где

$$D(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{A}}\, ds, \quad F(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{B}}\, ds, \tag{22}$$

здесь $e^{s\mathfrak{A}}$, $e^{s\mathfrak{B}}$ — экспоненциалы матриц $s\mathfrak{A}$, $s\mathfrak{B}$ соответственно. Отметим, что $D(0) = O_k$, $F(0) = O_k$. Поэтому множество $\hat{w}(0) \neq \varnothing$ при произвольных $\rho > 0$, $\sigma > 0$.

Для дальнейшего важную роль играет следующая

Лемма. *Матрицы $D(r)$, $F(r)$* (см. (22)) *являются невырожденными при $r > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство для матрицы $D(r)$. Для матрицы $F(r)$ оно проводится аналогично. Хорошо известно (см., например, [12; 13]), что существует такая невырожденная квадратная матрица L порядка k (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), что

$$\mathfrak{A} = L^{-1}\Lambda L, \tag{23}$$

где квадратная матрица Λ порядка k является жордановой формой для матрицы $\mathfrak{A}$ и, следовательно, имеет блочно-диагональный вид. Соответствующие квадратные блоки называются клетками Жордана. Клетки Жордана для матрицы Λ обозначим $G_1, \ldots, G_m$. Отметим, что $1 \leqslant m \leqslant k$ и что для их порядков r_j $(j = 1, \ldots, m)$ справедливы соотношения

$$1 \leqslant r_j \leqslant k, \quad r_1 + \ldots + r_m = k.$$

Напомним некоторые известные факты о строении клетки Жордана J_λ порядка $l \geqslant 1$, соответствующей собственному значению λ. Если $l = 1$, то J_λ — это число λ. Если $l \geqslant 2$, то элементы главной диагонали J_λ совпадают с λ, элементы $d_{i,i+1} = 1$, где $i = 1, \ldots, l-1$, и все остальные элементы J_λ являются нулевыми.

Итак, на главной диагонали клеток Жордана G_j, $i = 1, \ldots, m$, стоят собственные значения λ_j матрицы $\mathfrak{A}$. Учитывая сказанное, можно обосновать следующую формулу (см. (23)) при $t \geqslant 0$:

$$e^{t\mathfrak{A}} = L^{-1}e^{t\Lambda}L, \tag{24}$$

причем матрица $e^{t\Lambda}$ имеет блочно-диагональный вид

$$e^{t\Lambda} = \mathrm{diag}\{e^{tG_1}, \ldots, e^{tG_m}\}. \tag{25}$$

Отметим, что матрицы e^{tG_j}, $j = 1, \ldots, m$, могут быть вычислены в явном виде (см. [13, формула (1), с. 243]). Для нас важно, что матрица e^{tG_j}, $j = 1, \ldots, m$, имеет верхнетреугольный вид и что на ее главной диагонали стоит величина $e^{t\lambda_j}$. Из соотношений (24), (25) получаем при $r \geqslant 0$

$$\int_0^r e^{s\mathfrak{A}}\, ds = L^{-1}\int_0^r e^{s\Lambda}\, ds\, L = L^{-1}\,\mathrm{diag}\Big\{\int_0^r e^{sG_1}\, ds, \ldots, \int_0^r e^{sG_m}\, ds\Big\}L.$$

Из сказанного вытекает, что матрица $\int_0^r e^{sG_j}\,ds$, $j = 1,\dots,m$, является верхнетреугольной, причем на ее главной диагонали стоит величина $\int_0^r e^{s\lambda_j}\,ds$, а для детерминанта матрицы $D(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{A}}\,ds$ при $r \geqslant 0$ справедлива формула

$$\det D(r) = \prod_{j=1}^{m} f_j(r), \tag{26}$$

где

$$f_j(r) = \Bigl(\int\limits_0^r e^{s\lambda_j}\,ds\Bigr)^{r_j}. \tag{27}$$

Отметим, что при $r \geqslant 0$ справедливы формулы

$$\int\limits_0^r e^{s\lambda}\,ds = \begin{cases} \dfrac{e^{r\lambda}-1}{\lambda}, & \text{если } \lambda \neq 0,\\ r, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Из соотношений (26)–(28) вытекает невырожденность матрицы $D(r)$ (см. (22)) при $r > 0$.

Лемма доказана.

Используя лемму и формулу (21), нетрудно показать, что при $r > 0$

$$\hat{w}(r) = D(r)(P \overset{*}{-} D^{-1}(r)F(r)Q). \tag{29}$$

Таким образом, чтобы обеспечить непустоту $\hat{w}(r)$ при данном $r > 0$, достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$P \overset{*}{-} H(r)Q \neq \varnothing,$$

где

$$H(r) = D^{-1}(r)F(r) \tag{30}$$

при $r > 0$.

Изучим поведение матричной функции $H(r)$ при $r \to 0+$. Отметим, что

$$e^{s\mathfrak{A}} = E_k + O_1(s), \quad e^{s\mathfrak{B}} = E_k + O_2(s), \tag{31}$$

где для матричных функций $O_1(s)$, $O_2(s)$ при $s \in [0,1]$ имеют место неравенства

$$\|O_1(s)\| \leqslant c_1 s, \quad \|O_2(s)\| \leqslant c_2 s;$$

здесь $\|\cdot\|$ означает операторную норму матрицы, $c_i > 0$ — положительные константы. Из (31) при $r \in [0,1]$ вытекают соотношения (см. (22))

$$\begin{aligned} D(r) &= r(E_k + O_3(r)),\\ F(r) &= r(E_k + O_4(r)), \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\|O_3(r)\| \leqslant c_3 r, \quad \|O_4(r)\| \leqslant c_4 r,$$

c_3, c_4 — положительные константы. Из формул (30), (32) при $r \in (0,1]$ следует соотношение

$$H(r) = (E_k + O_3(r))^{-1}(E_k + O_4(r)).$$

Отсюда с помощью известного результата об обратимости матрицы, близкой к единичной матрице (см., например, в [14, гл. IV, § 5, теорема 5]), при $r \in (0,1]$ получаем формулу

$$H(r) = E_k + O_5(r),$$

где для матрицы $O_5(r)$ выполнено неравенство

$$\|O_5(r)\| \leqslant c_5 r,$$

c_5 — положительная константа. Из сказанного вытекает, что матричную функцию $H(r)$ (см. (30)) естественно доопределить при $r = 0$ в виде $H(0) = E_k$. После такого доопределения матричная функция $H(r)$ становится непрерывной при $r \geqslant 0$. Отсюда получаем, что при произвольном фиксированном $\theta > 0$ корректно определена величина

$$\gamma(\theta) = \max_{r \in [0,\theta]} \|H(r)\|.$$

Из сказанного следует

Теорема. *При произвольном фиксированном $\theta > 0$ и выполнении неравенства*

$$\rho \geqslant \gamma(\theta)\sigma$$

множество $\hat{w}(r)$ (см. (29)) *непусто при $r \in [0,\theta]$, т. е. первый прямой метод Л. С. Понтрягина можно применять на $[0,\theta]$ в рассматриваемой дифференциальной игре преследования-убегания.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, вып. 4. С. 219–274.
2. **Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.** Линейные дифференциальные игры // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 1. С. 27–29.
3. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.
4. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
5. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, вып. 3. С. 307–330.
6. **Понтрягин Л.С.** Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 30–63.
7. **Никольский М.С.** Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх: учеб. пособ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 65 с.
8. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
9. **Пшеничный Б.Н.** Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
10. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
12. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
13. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Изд-во Удм. ГУ, 2000. 368 с.
14. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник МИАН РАН
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 08.12.2015