ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО НАВЕДЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ[1]

В. И. Максимов

Обсуждается задача гарантированного наведения линейной управляемой системы к фиксированному моменту времени в предположении, что на систему действует неизвестное возмущение. Рассматривается случай, когда измеряется часть фазовых координат, а множество неизвестных начальных состояний состоит из конечного числа элементов. Указывается алгоритм решения задачи, который основан на комбинации пакетного подхода, теории динамического обращения и принципа экстремального сдвига.

Ключевые слова: задача наведения, линейная система.

V. I. Maksimov. On a guaranteed guidance problem under incomplete information.

We discuss the problem of guaranteed guidance of a linear control system by a fixed time under the assumption that the system is subject to an unknown disturbance. We consider the case when a part of state coordinates are measured and the set of unknown initial states is finite. We specify a solution algorithm based on the combination of the package approach, the theory of dynamic inversion, and the extremal shift method.

Keywords: guidance problem, linear system.

MSC: 49J35, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-199-210

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu - Cv + f(t). \tag{1.1}$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$ — переменная времени, $t_0 < \vartheta < \infty$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент t; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в этот момент времени; $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — возмущение; $f(\cdot)$ — функция, заданная и непрерывная на T, принимающая значения в пространстве $\mathbb{R}^n$; A, B и C — постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$ и $n \times q$ соответственно. Управляющей стороне известно априори, что истинное начальное состояние системы $\hat{x}_0$ содержится в заданном конечном множестве $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ — множестве *допустимых начальных состояний*. Само истинное начальное состояние системы управляющей стороне неизвестно.

Содержательно рассматриваемая в настоящей работе задача может быть сформулирована следующим образом. На систему (1.1) действуют управление $u = u(t) \in P$, формируемое по ходу развития процесса, и неизвестное возмущение $v = v(t) \in Q$. Здесь $P \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ — ограниченные замкнутые множества — "ресурсы" управления и возмущения соответственно. На промежутке времени T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$ с шагом δ. Заданы непустое замкнутое *целевое* множество $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, а также непустое множество $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ (множество фазовых ограничений). Перед управляющей стороной стоит задача *гарантированного позиционного наведения* к моменту ϑ: привести состояние $x(t)$ системы к моменту $t = \vartheta$ в малую окрестность целевого множества M_1, оставаясь внутри множества N_1.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

В процессе движения управляющая сторона формирует свое управление позиционно, наблюдая (с ошибкой) текущий сигнал $y(t) = Dx(t)$ о состоянии $x(t)$ системы (1.1). В соответствии с формализацией, принятой в теории управления по принципу обратной связи [1–3], позиционная стратегия управления позволяет управляющей стороне корректировать значения управления $u(\cdot)$ в дискретные моменты времени $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \vartheta$. В каждый момент τ_i $(i = 0, \ldots, m-1)$ значения управления на полуинтервале $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ определяются исходя из предыстории наблюдения $y(t)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_i]$ и предыстории $t \to u(t)$ управления на полуинтервале $[\tau_0, \tau_i)$ (при $i = 0$ предыстория управления отсутствует).

Таким образом, задача гарантированного позиционного наведения состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, что для любого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ и любого возмущения $v(\cdot) \in Q(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^q) \colon v(t) \in Q$ при п.в. $t \in T\}$ движение $x(\cdot)$ системы (1.1), исходящее из этого состояния под действием выбранной позиционной стратегии, к моменту времени $t = \vartheta$ приходит в ε-окрестность целевого множества M_1, оставаясь до этого момента внутри множества N_1.

Всюду ниже считаем, что целевое множество имеет вид $M_1 = \mathbb{R}^{n_1} \times M, n_1 < n$, где M — некоторое фиксированное множество в пространстве $\mathbb{R}^{n-n_1}$. Полагаем также, что система (1.1) имеет структуру

$$\dot{z}(t) = A_1 z(t) + A_0 p(t) + C_0 v(t) + f_1(t), \tag{1.2}$$

$$\dot{p}(t) = A_3 p(t) + B_1 u(t) - C_1 v(t) + f_2(t). \tag{1.3}$$

Следовательно, $x = \{z, p\}$, $z \in \mathbb{R}^{n_1}$, $p \in \mathbb{R}^{n-n_1}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица D имеет размерность $N \times n$, а множество начальных состояний $X_0 = \{z_0, P_0\}$, где $P_0 \subset \mathbb{R}^{n-n_1}$ — конечное множество, z_0 — заданный вектор, известный лицу, формирующему управление. В таком случае мы считаем, что известно начальное состояние подсистемы (1.2), но неизвестно начальное состояние подсистемы (1.3). Результаты измерений величин $y(\tau_i)$ в моменты τ_i есть векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_N \le h. \tag{1.4}$$

Здесь $h \in (0,1)$ — величина погрешности измерения, символ $|\cdot|_N$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Ниже полагаем $z = \{z_1, z_2\}, z_1 \in \mathbb{R}^{n_2}, z_2 \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}$, $n_2 < n_1$, $N = q + n_1 - n_2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} A^{(0)} & 0 \\ 0 & A^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $A^{(0)}, A^{(1)}, A_2, C^{(0)}, D_1$, E (единичная матрица) и D имеют следующие размерности: $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$, $(n_1 - n_2) \times (n - n_1)$, $n_2 \times q$, $q \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$ и $N \times n$. Таким образом, подсистема (1.2) имеет вид

$$\dot{z}_1(t) = A^{(0)} z_1(t) + C^{(0)} v(t) + f_{11}(t),$$

$$\dot{z}_2(t) = A^{(1)} z_2(t) + A_2 p(t) + f_{12}(t), \tag{1.5}$$

где $f_1(t) = \{f_{11}(t), f_{12}(t)\}$, $z_0 = \{z_{10}, z_{20}\}$, $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$. Кроме того, $\xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in \mathbb{R}^N$, $\xi_{1i}^h \in \mathbb{R}^q$, $\xi_{2i}^h \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}$. При этом неравенство (1.4) принимает вид

$$\big(|\xi_{1i}^h - D_1 z_1(\tau_i)|_q^2 + |\xi_{2i}^h - z_2(\tau_i)|_{n_1-n_2}^2\big)^{1/2} \le h. \tag{1.6}$$

В дальнейшем считаем, что выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует строго выпуклое множество $W \subset \mathbb{R}^{n-n_1}$ такое, что $B_1P = W + C_1Q$.

Задачи подобного типа исследовались многими авторами с помощью различных подходов [1–5]. В настоящей работе указывается алгоритм решения описанной задачи, который основан на методе динамического обращения [5–7], пакетном подходе [8–11] и известном в теории позиционного управления методе стабильных дорожек [2]. В связи с неполнотой информации (а именно с невозможностью измерения в моменты τ_i всего фазового состояния системы $x(\tau_i)$), мы будем строить оценку $p(\cdot)$ на основе результатов измерения величин $y(\tau_i) = Dx(\tau_i)$. Эта оценка будет использоваться при формировании управления u по закону обратной связи.

Заметим, что основы теории позиционного управления в формализации, восходящей к Н. Н. Красовскому, были заложены в [1–4]. Однако в этих работах обсуждались проблемы гарантированного управления в случаях измерения с ошибкой всего фазового состояния (т. е. при "полной" информации о фазовых состояниях). В данной работе исследуется задача о приведении фазовой траектории системы на заданное множество, называемая в теории позиционных дифференциальных игр задачей наведения, при измерении "части" координат фазового состояния. Другие алгоритмы решения задач игрового управления при неполной информации о фазовом состоянии системы без привлечения пакетного подхода в формализации екатеринбургской школы приведены в работах [12–14].

2. Вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи, сначала приведем некоторые результаты из работ [10; 11], сформулировав их в удобной для нас форме. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{p}(t) = A_3p(t) + w(t) + f_2(t), \quad t \in T. \tag{2.1}$$

Под *программным управлением* (*программой*) (для системы (2.1)) понимается всякая измеримая по Лебегу функция $w(\cdot) : T \to W$. Введем фундаментальную матрицу $F(\cdot,\cdot)$ однородной системы $\dot{p}(t) = A_3p(t)$. Для каждого $p_0 \in P_0$ обозначим

$$g_{p_0}(t) = A_2F(t,t_0)p_0, \quad t \in T;$$

функция $g_{p_0}(\cdot)$ называется *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию p_0. Однородный сигнал, соответствующий какому-либо допустимому начальному состоянию, называется просто *однородным сигналом*. Множество всех допустимых начальных состояний p_0, соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ *до момента времени* $\tau \in [t_0,\vartheta]$, обозначаем символом $P_0(\tau|g(\cdot))$. Таким образом,

$$P_0(\tau|g(\cdot)) = \bigl\{p_0 \in P_0 : g(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g_{p_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]}\bigr\}.$$

Здесь и далее $g(\cdot)|_{[t_0,\tau]}$, где $\tau \in [t_0,\vartheta]$, — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\tau_0,\tau]$. Семейство $(w_{p_0}(\cdot))_{p_0\in P_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0,\vartheta]$ и допустимых начальных состояний $p_0', p_0'' \in P_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\tau_0,\tau)$ выполняется равенство $w_{p_0'}(t) = w_{p_0''}(t)$. Пакет $(w_{p_0}(\cdot))_{p_0\in P_0}$ программ называем *наводящим* (для системы (2.1)), если существует число $t_* \le \vartheta$ такое, что для любого $p_0 \in P_0$ имеет место включение $p(\vartheta; t_*, p_0, w_{p_0}(\cdot)) \in M$. Если существует наводящий пакет программ, говорят, что *разрешима задача пакетного наведения*.

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ вводим множество $T(g(\cdot)) = \{t_j(g(\cdot))\colon j = 1,\dots,k_{g(\cdot)}\}$ всех моментов его расслоения и полагаем

$T_* = \cup_{g(\cdot)\in G} T(g(\cdot))$. Ввиду конечности множества G для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \ge 1$ такой, что $t_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$. Тогда

$$T_* = \{t_0, \dots, t_K\},$$

где $t_j < t_{j+1}$ $(j = 0, \dots, K-1)$, $t_K = t_*$. Для каждого $k = 1, \dots, K$ вводим множество

$$\mathcal{P}_0(t_k) = \{P_0(t_k|g(\cdot))\colon g(\cdot) \in G\}.$$

Элементы $P_{0,k}$ множества $\mathcal{P}_0(t_k)$ называются *кластерами начальных состояний* в момент t_k. Для каждого $k = 0, \dots, K$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества P_0 всех допустимых начальных состояний, т. е. $P_0 = \cup_{P_{0,k}\in\mathcal{P}_0(t_k)} P_{0,k}$, $P'_{0,k} \cap P''_{0,k} = \varnothing$ $(P'_{0,k}, P''_{0,k} \in \mathcal{P}_0(t_k),\ P'_{0,k} \ne P''_{0,k})$.

Определим *расширенное пространство* $\mathcal{R}_{n-n_1}$ как конечномерное гильбертово пространство всех семейств $l = (l_{p0})_{p0\in P_0}$ векторов l_{p0} из $\mathbb{R}^{n-n_1}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{R}_{n-n_1}}$ вида $\langle l', l''\rangle_{\mathcal{R}_{n-n_1}} = \sum_{p0\in P_0}(l'_{p0}, l''_{p0})$, $l' = (l'_{p0})_{p0\in P_0} \in \mathcal{R}_{n-n_1}$, $l'' = (l''_{p0})_{p0\in P_0} \in \mathcal{R}_{n-n_1}$. Здесь и далее $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

В дальнейшем нам понадобится условие

$$\sup_{(l_{p0})_{p0\in P_0}\in\mathcal{L}} \gamma_1((l_{p0})_{p0\in P_0}) \le 0. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\gamma_1((l_{p0})_{p0\in P_0}) = \Big(l_{p0}, F(t_*, t_0)p_0 + \int_{t_0}^{t_*} F(t_*,\tau) f_2(\tau)\,d\tau\Big)_{\mathbb{R}^{n-n_1}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_{P_{0,k}\in\mathcal{P}(t_k)} \varrho^-\Big(D(\tau)\sum_{p0\in P_{0,k}} l_{p0}|W\Big)\,d\tau - \sum_{p0\in P_0} \varrho^+(l_{p0}|M), \quad D(\tau) = B'_2 F'(t_*,\tau),$$

$\varrho^-(l|W) = \inf\{(l,x)\colon x \in W\}$, $\varrho^+(l|M) = \sup\{(l,x)\colon x \in M)\}$ — нижняя и верхняя опорные функции, штрих означает транспонирование, $\mathcal{L}$ — некоторое множество в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{R}_{n-n_1}$, свойства которого приведены в [10]. Как установлено в [11], если выполнено условие (2.2) и нулевой пакет программ $t \to (w^0_{p0}(t))_{p0\in P_0}$, $w^0_{p0}(t) = 0$ при п.в. $t \in T$ для всех $p_0 \in P_0$, не является наводящим для системы (2.1), то существует число $a \in (0,1]$ такое, что

$$\max_{(l_{p0})_{p0\in P_0}\in\mathcal{L}} \gamma_a((l_{p0})_{p0\in P_0}) = 0. \tag{2.3}$$

Всем начальным состояниям системы (2.1) из одного кластера $P_{0,k+1}$ на $[t_k, t_{k+1})$ отвечает одно и то же управление из сужения пакета программ множества управлений $(w_{p0}(\cdot))_{p0\in P_0}$ на полуинтервал $[t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, K-1$, которое будем обозначать $w_{P_{0,k}}(\cdot)$.

Теорема 1 [11, теорема 2]. *Пусть множество W содержит в себе нулевой элемент. Пусть также выполнено условие* (2.2), *$(l^*_{p0})_{p0\in P_0} \in \mathcal{L}$ является вектором, на котором достигается максимум в выражении* (2.3), *причем вектор $D(\tau)\sum_{p0\in P_{0,k}} l^*_{p0}$ отличен от нуля при всех $\tau \in [t_0, t_*]$. Пусть нулевой пакет программ не является наводящим для системы* (2.1), *а пакет программ $t \to (w_{p0}(t))_{p0\in P_0}$ таков, что $w_{p0}(t) \in aW$ (для всех $p_0 \in P_0$) и для произвольного $k = 1, \dots, K$ и произвольного кластера $P_{0,k} \in \mathcal{P}(t_k)$ выполняется равенство*

$$\Big(D(\tau)\sum_{p0\in P_{0,k}} l^*_{p0}, w_{P_{0,k}}(\tau)\Big) = \varrho^-\Big(D(\tau)\sum_{p0\in P_{0,k}} l^*_{p0}|aW\Big), \quad \tau \in [t_{k-1}, t_k). \tag{2.4}$$

Тогда пакет программ $t \to (w_{p0}(t))_{p0\in P_0}$ является наводящим для системы (2.1).

3. Алгоритм решения

Пусть взято семейство разбиений отрезка $[t_0, t_*]$: $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \tau_{0,h} = t_0, \tau_{m_h,h} = \vartheta, h \in (0,1)$, а также функция $\alpha = \alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$. Фиксируем числа $\gamma \in (0, \min\{t_{j+1} - t_j\colon j = 0,\dots,K-1\})$, $h^* \in (0,1)$ и $\beta = \beta(\gamma) \in (0,1)$ такие, что $\delta^\beta(h) \le \gamma$ при всех $h \in (0, h^*)$. Символом $\tau_{i(j),h}$ обозначим максимальный момент разбиения Δ_h, не превосходящий t_j. При этом считаем $\tau_{i(0),h} = \min\{\tau_{i,h}\colon t_0 + \delta^\beta(h) \le \tau_{i,h}\}$. Пусть

$$\tau_{i(j,\gamma),h} = \min\{\tau_{i,h} : t_j + \gamma \le \tau_{i,h}\}, \tag{3.1}$$

$\hat{x}_0 = \{z_0, \hat{p}_0\}(\hat{p}_0 \in P_0)$ — истинное (неизвестное) начальное состояние системы (1.1). Для краткости ниже обозначим $\tau_{i,j,\gamma} = \tau_{i(j,\gamma),h}, m = m_h, \tau_i = \tau_{i,h}$. Наряду с системой (1.1) введем четыре вспомогательные системы. Первая описывается векторным уравнением

$$\dot{w}^h(t) = A^{(1)}\xi_{2i}^h + \tilde{v}^h(t) + f_{12}(\tau_i) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1], \tag{3.2}$$

с начальным состоянием $w^h(t_0) = z_{20}$. Вторая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{w}_0^h(t) = D_1 C^{(0)} v^h(t), \quad t \in [\tau_1, t_*],\\ &\dot{w}_1^h(t) = A^{(0)} w_1^h(t) + C^{(0)} v^h(h),\\ &\dot{w}_2^h(t) = w_1^h(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$w_j^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1], j = 0, 1, 2$. Третья система описывается векторным уравнением

$$\dot{g}_1(t) = A_3 g_1(t) + B_1 u^h(t) - C_1 v^h(t) + f_2(t), \quad t \in [t_0, t_*], \tag{3.4}$$

а четвертая — уравнением

$$\dot{g}_2(t) = A_3 g_2(t) + B_1 \tilde{u}^h(t) - C_1 v^h(t) + f_2(t), \quad t \in [t_0, t_*], \tag{3.5}$$

с начальными состояниями $g_1(t_0) = g_2(t_0) = 0$.

До начала работы алгоритма фиксируем $h \in (0, h^*)$. Вместе с h фиксируем разбиение Δ_h и число $\alpha = \alpha(h)$. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. На промежутке $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0,\dots,K-1$, выполняются следующие действия. При $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [t_j, t_{j+1})$ полагается

$$\tilde{v}_i^h = -\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h], \tag{3.6}$$

$$u_i^h \in \big\{u_i \in P\colon (\eta_i^h - \psi_i^h, B_1 u_i) \le \min\{(\eta_i^h - \psi_i^h, B_1 u)\colon u \in P\} + h\big\}, \tag{3.7}$$

$$v_i^h = 0 \quad \text{при} \quad i = 0,$$

$$v_i^h = \begin{cases} (D_1 C^{(0)})^{-1}\Big|\delta^{-1}(\xi_{1i}^h - \xi_{1i-1}^h) - D_1 A^{(0)} g_0(\tau_i) - D_1 \delta^{-1} \displaystyle\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_{11}(t)\,dt \\ - D_1 A^{(0)} w_1^h(\tau_i)\Big|_q \dfrac{s_i}{|s_i|_q}, \quad \text{если } |s_i|_q \ne 0, \\ 0, \quad \text{в противном случае} \end{cases} \tag{3.8}$$

при $i \in [1 : m-1]$. Здесь $v_i^h \in \mathbb{R}^q$, $g_0(\cdot) = g_0(\cdot; t_0, z_{10})$ — решение системы линейных уравнений

$$\dot{g}_0(t) = A^{(0)} g_0(t) + f_{11}(t), \quad t \in [t_0, t_*], \quad g_0(t_0) = z_{10},$$

$\delta = \delta(h), \tau_i = \tau_{i,h}$, вектор $s_i \in \mathbb{R}^q$ определяется соотношением

$$s_i = \xi_{1i-1}^h - \xi_{10}^h - \int\limits_{t_0}^{\tau_{i-1}} D_1[f_{11}(\tau) + A^{(0)} g_1(\tau)]\,d\tau - w_0^h(\tau_i) - D_1 A^{(0)} w_2^h(\tau_i),$$

$\psi_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ и $\eta_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ — результаты неточных измерений состояний $g_2(\tau_i)$ и $g_1(\tau_i)$:

$$|\psi_i^h - g_2(\tau_i)|_{n-n_1} \le h, \quad |\eta_i^h - g_1(\tau_i)|_{n-n_1} \le h. \tag{3.9}$$

При этих же t на вход системы (1.1) подается управление

$$u = u^h(t) = u_i^h \tag{3.10}$$

вида (3.7), на вход системы (3.2) — управление вида (3.6), т. е.

$$\tilde{v}^h(t) = \tilde{v}_i^h, \tag{3.11}$$

на вход систем (3.3) и (3.4) — управления $v^h(t)$ вида (3.8), т. е.

$$v^h(t) = v_i^h. \tag{3.12}$$

Причем на вход системы (3.4) подается также управление $u^h(t)$. В момент $\tau_{i,j,\gamma}$ находится вектор

$$\phi(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) = \tilde{v}^h(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) - A_2 \int\limits_{t_0}^{\tau_{i,j,\gamma}+\delta} F(\tau_{i,j,\gamma}+\delta,\tau)\bigl[B_1u^h(\tau) - C_1v^h(\tau) + f_2(\tau)\bigr]\,d\tau \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}.$$

Среди значений однородных сигналов $g_{p_0}(\tau_{i,j,\gamma})$ $(p_0 \in P_0)$ определяется вектор

$$g_{p_0,i,j} = \arg\min\bigl\{|g_{p_0}(\tau_{i,j,\gamma}) - \varphi(\tau_{i,j,\gamma}+\delta)|_{n_1-n_2} \colon p_0 \in P_0\bigr\}. \tag{3.13}$$

По вектору $g_{p_0,i,j}$ находится некоторый кластер $P_{0,j+1}$, значение однородного сигнала, отвечающее которому, в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ совпадает с $g_{p_0,i,j}$. Далее, по кластеру $P_{0,j+1}$ в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ вычисляется функция $w_{P_{0,j+1}}(t)$, $t \in [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1})$ — соответствующее управление из наводящего (для системы (2.1)) пакета программ, которое находится по правилу (2.4). После этого на вход системы (3.5) подаются управления $v^h(t)$ и $\tilde{u}^h(t)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_i^h(t), \quad \text{если} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1}),\\ &\tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_j^h, \quad \text{если} \quad t \in [\tau_{i(j)}, \tau_{i,j,\gamma}), \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_j^h \in W$ — произвольный вектор, а функция $\tilde{u}_i^h(t)$ такова, что

$$B_1\tilde{u}_i^h(t) = C_1v_i^h + w_{P_{0,j+1}}(t), \quad \text{если} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1}).$$

Работа алгоритма заканчивается в момент $t = t_*$.

Символом $\tilde{X}(\cdot; t_0, x_0)$ обозначим пучок всех решений системы (1.2), (2.1), т. е. совокупность решений $x(\cdot) = \{z(\cdot), p(\cdot)\}$ этой системы, порожденных $v(\cdot) \in Q(\cdot)$ и $w(\cdot) \in \bigl\{w(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n-n_1}) \colon w(t) \in W$ при п.в. $t \in [t_0, t_*]\bigr\}$. $\tilde{X}(t_1; t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n$ — сечение этого множества гиперплоскостью $t = t_1$.

Пусть $x(\cdot; t_0, \hat{x}_0, u^h(\cdot), v(\cdot))$ — решение системы (1.1), порожденное неизвестным возмущением $v(\cdot) \in Q(\cdot)$ и управлением $u = u^h(\cdot)$, M_1^ε — замкнутая ε-окрестность множества M_1. Здесь, как и выше, $\hat{x}_0$ — истинное (неизвестное) начальное состояние этой системы. Для простоты ниже полагаем $t_0 = 0$.

У с л о в и е 2. При всех $t \in [t_0, t_*], x_0 \in X_0$ справедливы включения $\tilde{X}(t; t_0, x_0) \subset N_1$.

У с л о в и е 3. При $h \to 0$ имеют место сходимости $\alpha(h) \to 0$, $(\delta(h) + h)\alpha^{-1}(h) \to 0$, $\alpha(h)\delta^{-\beta}(h) \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1–3, а также условия теоремы 2. Тогда можно указать число $\gamma > 0$ со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_* = h_*(\varepsilon, \gamma) \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ имеет место включение*

$$x(t_*; t_0, \hat{x}_0, u^h(\cdot), v(\cdot)) \in M_1^\varepsilon, \tag{3.14}$$

каково бы ни было $v(\cdot) \in Q(\cdot)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в три этапа.

Этап 1. Сначала покажем следующее: найдется такое число $h_1 \in (0, h^*)$, что равномерно по всем $h \in (0, h_1)$, $\xi_2^h(\cdot) \in \Xi(z_2(\cdot), h)$, $i \in [0 : m-1]$ верны неравенства

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_{n_1-n_2}\, ds \le \tilde{C}_0\delta + \tilde{C}_1\delta\alpha^{-1}\nu(h), \tag{3.15}$$

где $w^h(\cdot)$ — решение системы (3.2), порожденное управлением $\tilde{v}^h(\cdot)$ вида (3.11), (3.6), $\delta = \delta(h)$, $\nu(h) = |w^h(0) - z_{20}|_{n_1-n_2}$, $\Xi(z_2(\cdot), h)$ — множество измерений решения $z_2(\cdot)$ системы (1.5), т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi_2^h(\cdot) \to \mathbb{R}^n$, $\xi_2^h(t) = \xi_{2i}^h$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, удовлетворяющих неравенствам $|\xi_{2i}^h - z_2(\tau_i)|_{n_1-n_2} \le h$. Здесь и всюду ниже символы $\tilde{C}_i$, а также K_j означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Легко видеть, что справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - z_2(t)] = A^{(1)}\xi_{2i}^h - \frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h] - A^{(1)}z_2(t) - A_2p(t)$$

$$= -\frac{1}{\alpha}[w^h(t) - z_2(t)] + \Psi_h^{(1)}(s) \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i,$$

где

$$\Psi_h^{(1)}(s) = \Psi_h(s) + \frac{1}{\alpha}[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Psi_h(s) = -\frac{1}{\alpha}[z_2(s) - \xi_{2i}^h] + A^{(1)}\xi_{2i}^h - A^{(1)}z_2(s) - A_2p(s), \quad s \in \delta_i.$$

Ввиду (1.6), а также условия 3 семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ равномерно по всем $h \in (0, 1)$ ограничено:

$$|\Psi_h(s)|_{n_1-n_2} \le K_0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [t_0, t_*]. \tag{3.16}$$

Далее имеем

$$w^h(t) - z_2(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Psi_h^{(1)}(s)\, ds, \quad t \in [t_0, t_*], \tag{3.17}$$

где E — единичная матрица размерности $n_1 \times n_1$. Обозначим

$$\mu(t) = \max_{0 \le \tau \le t} |w^h(\tau) - z_2(\tau)|_{n_1-n_2}, \quad f_h(t) = A^{(1)}\xi_{2i}^h \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_{n_1-n_2}\, ds \le K_1\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i) + h), \quad \mu(\tau_i) \le \mu(\tau_{i+1}), \tag{3.18}$$

где $\sup_{t\in T}|f_h(t)|_{n_1-n_2} \le K_1$. Заметим, что

$$|\Psi_h^{(1)}(t)|_{n_1-n_2} \le |\Psi_h(t)|_{n_1-n_2} + \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_{n_1-n_2}\, ds \quad \text{при} \quad t \in \delta_i. \tag{3.19}$$

Учитывая (3.17)–(3.19), получаем

$$\mu(t) \le \nu(h) + K_2\Big(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\mu(\tau_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2}\Big)\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}\,ds \tag{3.20}$$

$$+\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}|\Psi_h(s)|_{n_1-n_2}\,ds, \quad t\in\delta_i,$$

где $K_2=\max\{1,K_1\}$. Воспользовавшись (3.16), выводим

$$\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}|\Psi_h(s)|_{n_1-n_2}\,ds \le K_0\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}\,ds. \tag{3.21}$$

Далее имеем

$$\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}\,ds \le K_3\alpha. \tag{3.22}$$

Таким образом, из (3.21), (3.22) получаем

$$\int\limits_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}|_{n_1-n_2}|\Psi_h(s)|_{n_1-n_2}\,ds \le K_3K_0\alpha. \tag{3.23}$$

В свою очередь из (3.20), считая $t=\tau_i$ и учитывая (3.23), выводим

$$\Big(1-\frac{K_2K_3\delta}{\alpha}\Big)\mu(\tau_i) \le \nu(h) + K_4\Big(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}\Big).$$

Поэтому при достаточно малых h, например, таких, что $1-\dfrac{K_2K_3\delta}{\alpha}\in\Big(\dfrac12,1\Big)$, имеем

$$\mu(\tau_i) \le 2K_4\Big(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}\Big) + 2\nu(h) \le 4K_4(\alpha+\delta) + 2\nu(h).$$

Из (3.18) следует оценка

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot w^h(s)|_{n_1-n_2}\,ds \le K_1\Big[\delta + \frac{\delta}{\alpha}\big(\mu(\tau_i)+h\big)\Big].$$

В силу условия 3 существует такое число $h_0\in(0,1)$, что при $h\in(0,h_0)$ верно неравенство $h\le K_5\alpha(h)$. Воспользовавшись последними тремя неравенствами, имеем

$$\delta + \frac{\delta}{\alpha}(\mu(\tau_i)+h) \le K_6\delta + 2\frac{\delta}{\alpha}\nu(h).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot w^h(s)|_{n_1-n_2}\,ds \le K_1K_6\delta + 2K_1\delta\alpha^{-1}\nu(h).$$

Неравенство (3.15) установлено.

Э т а п 2. Покажем, что при $h\in(0,h_1)$ справедливо неравенство

$$|\tilde v^h(t) - A_2p(t)|_{n_1-n_2} \le \varrho_*(h) \tag{3.24}$$

$$= \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3\delta(h)\alpha^{-2}(h)\nu(h) + \tilde{c}_4(h)\alpha(h)\delta^{-\beta}(h), \quad \text{если} \quad t \in [\delta^\beta(h), t_*].$$

Здесь $\tilde{c}_j > 0$, $j = 1, \ldots, 4$, — некоторые постоянные. Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\alpha}[w^h(t) - z_2(t)] = \int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Big)\Psi_h^{(1)}(s)\,ds \tag{3.25}$$

$$= -\int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds} e^{\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Big)A_2 p(s)\,ds + \sum_{j=1}^3 \int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Big)\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds,$$

где

$$\gamma_\delta^{(1)}(s) = \frac{1}{\alpha}[w^h(s) - w^h(\tau_i)], \quad \gamma_\delta^{(2)}(s) = -\frac{1}{\alpha}[z_2(s) - \xi_{2i}^h],$$

$$\gamma_\delta^{(3)}(s) = A^{(1)}(\xi_{2i}^h - z_2(s)) \quad \text{при п.в.} \quad s \in \delta_i.$$

Учитывая (3.15), заключаем

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_2\frac{\delta}{\alpha} + \tilde{C}_3\frac{\delta}{\alpha^2}\mu(h), \quad s \in [t_0, t_*]. \tag{3.26}$$

В свою очередь, воспользовавшись (1.6), будем иметь

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_4\frac{\delta+h}{\alpha}, \quad s \in [t_0, t_*]. \tag{3.27}$$

Кроме того

$$|\gamma_\delta^{(3)}(s)|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_5(\delta+h), \quad s \in [t_0, t_*]. \tag{3.28}$$

В таком случае из (3.26)–(3.28) выводим

$$\Big|\sum_{j=1}^3 \int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Big)\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds\Big|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_6\Big(\frac{\delta}{\alpha^2}(h)\nu(h) + \frac{\delta+h}{\alpha}\Big). \tag{3.29}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (3.25), получим

$$-\int\limits_0^t \Big(\frac{d}{ds} e^{\frac{1}{\alpha}E(t-s)}\Big)A_2 p(s)\,ds = e^{-\frac{1}{\alpha}Et}A_2 p(0) - A_2 p(t) + \int\limits_0^t e^{\frac{1}{\alpha}E(t-s)}A_2\dot{p}(s)\,ds,$$

где норма последнего слагаемого ограничена величиной $\tilde{C}_7\alpha(h)$. Кроме того в силу (1.6) имеем при $t \in \delta_i$

$$\Big|\frac{1}{\alpha}\{[w^h(t) - z_2(t)] - [w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h]\}\Big|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_8\Big(\frac{h+\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\nu(h)\Big). \tag{3.30}$$

Из (3.25), (3.29), (3.30) и условия 3 в силу ограниченности функции $t \to A_2\dot{p}(t)$ следует при $t \in \delta_i$ неравенство

$$\Big|-\frac{1}{\alpha}[w^h(\tau_i) - z_2(\tau_i)] - A_2 p(t)\Big|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_9\frac{h+\delta}{\alpha} + \tilde{C}_{10}\alpha + \tilde{C}_{11}\frac{\delta}{\alpha^2}\nu(h) + \Big|e^{-\frac{1}{\alpha}Et}A_2 p(0)\Big|_{n_1-n_2}. \tag{3.31}$$

Заметим, что

$$|e^{-\alpha^{-1}E\delta^\beta}A_2 p(0)|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_{12}e^{-\alpha\delta^{-\beta}} \le \tilde{C}_{12}\alpha\delta^{-\beta}.$$

Поэтому

$$|e^{-\alpha^{-1}Et}A_2 p(0)|_{n_1-n_2} \le \tilde{C}_{12}\alpha\delta^{-\beta} \quad \text{при} \quad t \in [\delta^\beta, t_*]. \tag{3.32}$$

Справедливость неравенства (3.24) следует из (3.31) и (3.32).

Э т а п 3. Как следует из результатов [15], можно указать такое $h_2 \in (0, h_1)$, что справедлива оценка

$$\sup_{t\in T}\Big|\int_0^t \big(v^h(\tau+\delta) - v(\tau)\big)\,d\tau\Big|_q \le \tilde{C}_{13}\big(\delta(h) + h\delta^{-1}(h)\big), \quad t\in[0, t_* - \delta],$$

каково бы ни было возмущение $v(\cdot) \in Q(\cdot)$. Пусть

$$\Phi(\tau_{i,j,\gamma}) = A_2 p(\tau_{i,j,\gamma}) - A_2\int_0^{\tau_{i,j,\gamma}} F(\tau_{i,j,\gamma},\tau)\big[B_1 u^h(\tau) - C_1 v(\tau) + f_2(\tau)\big]\,d\tau.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\varphi(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) - \Phi(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1-n_2} \le |\tilde{v}^h(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) - A_2 p(\tau_{i,j,\gamma}+\delta)|_{n_1-n_2} + d^h(\tau_{i,j,\gamma}), \tag{3.33}$$

где

$$d^h(\tau_{i,j,\gamma}) = \Big|A_2\int_0^{\tau_{i,j,\gamma}+\delta} F(\tau_{i,j,\gamma}+\delta,\tau)\big[B_1 u^h(\tau) - C_1 v^h(\tau) + f_2(\tau)\big]\,d\tau$$

$$-A_2\int_0^{\tau i,j,\gamma} F(\tau_{i,j,\gamma},\tau)\big[B_1 u^h(\tau) - C_1 v(\tau) + f_2(\tau)\big]\,d\tau\Big|_{n_1-n_2} + \big|A_2\big[p(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) - p(\tau_{i,j,\gamma})\big]\big|_{n_1-n_2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$d^h(\tau_{i,j,\gamma}) \le \tilde{C}_{14}\bigg\{\delta + \Big|\int_0^{\tau_{i,j,\gamma}}\big[v^h(\tau+\delta) - v(\tau)\big]\,d\tau\Big|_q\bigg\} \le \mu_*(h), \tag{3.34}$$

где

$$\mu_*(h) = \tilde{C}_{15}\big[\delta(h) + h\delta^{-1}(h)\big].$$

Кроме того,

$$\delta^\beta(h) \le \tau_{i,j,\gamma}. \tag{3.35}$$

Учитывая (3.24), (3.34) и (3.35), из (3.33) получаем

$$|\phi(\tau_{i,j,\gamma}+\delta) - \Phi(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1-n_2} \le \varrho_*(h) + \mu_*(h). \tag{3.36}$$

Легко видеть, что

$$A_2 F(\tau_{i,j,\gamma},0)\hat{p}_0 = \Phi(\tau_{i,j,\gamma}) = g_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma}). \tag{3.37}$$

Аналогично [11, лемма 5] с помощью теоремы 2, учитывая неравенство

$$\tau_{i,j,\gamma} - \tau_{i(j),h} \le \gamma + 2\delta,$$

проверяем, что при указанном выше выборе управления $\tilde{u}^h(t)$ верно включение

$$F(t_*,0)\hat{p}_0 + g_2(t_*) \in M^{K_0(\gamma+2\delta)}, \tag{3.38}$$

где постоянная K_0 может быть выписана в явном виде. Эта постоянная зависит лишь от множеств P_0, P, Q, но не зависит от h, δ,γ, $v^h(\cdot)$, $\tilde{v}^h(\cdot)$, $u^h(\cdot)$ и $\tilde{u}^h(\cdot)$. Так как множество P_0 конечно, а однородные сигналы являются непрерывными по t функциями, то по $\gamma > 0$ можно указать число $\nu_\gamma > 0$ такое, что

$$|g_{p'_{0j}}(t_j+\gamma) - g_{p''_{0j}}(t_j+\gamma)|_{n_1-n_2} \ge \nu_\gamma \quad \forall j = 0,1,\dots,K, \quad t_j+\gamma \le t_*,$$

если $p'_{0j} \in P_0$ и $p''_{0j} \in P_0$ таковы, что t_j — момент расслоения сигналов $g_{p'_{0j}}(\cdot)$ и $g_{p''_{0j}}(\cdot)$, т. е. $g_{p'_{0j}}(t) = g_{p''_{0j}}(t)$ при $t \in [0, t_j]$, $g_{p'_{0j}}(t) \neq g_{p''_{0j}}(t)$ при $t \in (t_j, t_j + \gamma]$. В свою очередь ввиду непрерывности однородного сигнала, а также неравенства

$$|\tau_{i,j,\gamma} - t_j + \gamma| \le \delta$$

(см., (3.1)), можно указать число $h_3 \in (0, h_2)$ такое, что при всех $h \in (0, h_3)$ выполнены неравенства

$$|g_{p'_{0j}}(\tau_{i,j,\gamma}) - g_{p''_{0j}}(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1 - n_2} \ge 0.75\nu_\gamma. \tag{3.39}$$

Пусть $K_0(\gamma + 2\delta) < \varepsilon/3$. Пусть также число $h_4 \in (0, h_3)$ таково, что при всех $h \in (0, h_4)$ верно неравенство

$$\varrho_*(h) + \mu_*(h) \le 0.25\nu_\gamma. \tag{3.40}$$

Из условия 3 вытекает существование такого числа. Ввиду (3.40), (3.36) и (3.37) имеет место оценка

$$|\varphi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - q_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1 - n_2} \le 0.25\nu_\gamma. \tag{3.41}$$

Далее, в силу (3.13), (3.39), (3.41) в таком случае справедливо равенство

$$g_{p_0,i,j} = g_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma}).$$

Поскольку $t_j < \tau_{i,j,\gamma}$, а до момента t_{j+1} однородный сигнал $g_{\hat{p}_0}(\cdot)$ более не имеет моментов расслоения, то справедливо включение $\hat{p}_0 \in P_{0,j+1} = P_{0,j+1}(t_{j+1}|g_{\hat{p}_0}(\cdot)) = \{p_0 \in P_0 : g_{p_0}(\cdot)|_{[t_0,t_{j+1}]} = g_{\hat{p}_0}(\cdot)|_{[t_0,t_{j+1}]}\}$. Таким образом, в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ по величине $g_{p_0,i,j}$ мы определяем кластер $P_{0,j+1}$, которому принадлежит неизвестное начальное состояние системы (1.1), т. е. $\hat{p}_0$. Пусть

$$\varepsilon(t) = |g_1(t) - g_2(t)|^2_{n-n_1}.$$

Стандартным образом (см., например, [2]) учитывая (3.9) устанавливаем неравенство

$$\varepsilon(t_{i+1,h}) \le (1 + \tilde{C}_{16}\delta)\varepsilon(t_{i,h}) + \tilde{C}_{17}\delta(\delta + h).$$

Воспользовавшись леммой из работы [16], отсюда получаем

$$\varepsilon(t_{i+1,h}) \le [\varepsilon(0) + \tilde{C}_{17}t_{i+1,h}(\delta + h)] \exp\{\tilde{C}_{16}t_{i+1,h}\} \le \mu_1(h) \equiv \tilde{C}_{18}(h + \delta).$$

Пусть $h_5 \in (0, h_4)$ таково, что при всех $h \in (0, h_5)$

$$\mu_1^{1/2}(h) \le \varepsilon/3. \tag{3.42}$$

Тогда при всех $h \in (0, h_5)$ в силу (3.38), (3.42) и неравенства $K_0(\gamma + 2\delta) < \varepsilon/3$ следует неравенство

$$F(t_*, 0)\hat{p}_0 + g_1(t_*) \in M^{2/3\varepsilon}. \tag{3.43}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} &\big|F(t_*, 0)\hat{p}_0 + g_1(t_*) - p(t_*; 0, \hat{p}_0, u^h(\cdot), v(\cdot))\big|_{n-n_1} \\ &\le \tilde{C}_{19}\bigg\{\delta + \bigg|\int\limits_{t_0}^{t_8} [v^h(\tau) - v(\tau)]\, d\tau\bigg|_q\bigg\} \le \mu_2(h) = \tilde{C}_{20}(\delta + h\delta^{-1}). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Пусть $h_6 \in (0, h_5)$ таково, что при всех $h \in (0, h_6)$

$$\mu_2(h) \le \varepsilon/3.$$

Тогда в силу (3.43), (3.44) при всех $h \in (0, h_4)$ имеет место включение (3.14). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференцированной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
7. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
8. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 25–76.
9. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
10. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
11. **Стрелковский Н.В.** Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вест. МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 65–72.
12. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** О сочетании процессов реконструкции и гарантированного управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 26–34.
13. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одной задаче управления при неполной информации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 131–142.
14. **Каппель Ф., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 5. С. 597–603.
15. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции входных воздействий в линейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 16–25.
16. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2016