ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЯ[1]

С. М. Асеев

Рассматривается класс задач оптимального управления на бесконечном интервале времени с возможно неограниченным множеством ограничений на управление. При помощи конечно-временных аппроксимаций и аппарата принципа максимума Понтрягина в общем нелинейном случае получены достаточные условия существования оптимального управления, а также условия, гарантирующие равномерную локальную ограниченность оптимальных управлений.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, неограниченные управления, существование решения, принцип максимума Понтрягина.

S. M. Aseev. Existence of an optimal control in infinite-horizon problems with unbounded set of control constraints.

We consider a class of infinite-horizon optimal control problems with not necessarily bounded set of control constraints. Sufficient conditions for the existence of an optimal control are derived in the general nonlinear case by means of finite-horizon approximations and the tools of the Pontryagin maximum principle. Conditions guaranteeing the uniform local boundedness of optimal controls are also obtained.

Keywords: optimal control, infinite horizon, unbounded controls, existence of a solution, the Pontryagin maximum principle.

MSC: 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-18-27

Введение

Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени (с бесконечным горизонтом) естественно возникают в экономике при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов (см., например, [11; 18; 19]). В последнее десятилетие в этой области оптимального управления был достигнут значительный прогресс. В частности, при помощи метода конечно-временных аппроксимаций (см. [4; 5; 13]) и метода игольчатых вариаций (см. [14–16]) были получены различные варианты принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащие явное описание сопряженной переменной при помощи формулы, аналогичной известной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем (см. [10]). Такое описание сопряженной переменной дает удобное аналитическое средство для исследования многих задач оптимального экономического роста. В ряде ситуаций оно позволяет обосновать применение стандартных условий трансверсальности на бесконечности (см. [5; 14]), а если эти условия нарушаются, представление сопряженной переменной при помощи формулы типа Коши может быть использовано в качестве их альтернативы (см. [2, пример 3] и обсуждение примера Халкина в [15]). Заметим также, что в задачах оптимального экономического роста данная формула позволяет придать сопряженной переменной принципа максимума экономический смысл, причем без каких-либо априорных предположений о гладкости функции оптимального значения (см. [2]).

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10018).

В настоящей работе описание сопряженной переменной посредством формулы Коши используется для доказательства теоремы существования оптимального управления в задаче на бесконечном интервале времени в ситуации, когда множество геометрических ограничений на управления не обязательно ограничено. Такие задачи с неограниченными управлениями возникают во многих экономических приложениях, например, при рассмотрении моделей оптимального экономического роста, включающих невозобновляемые и возобновляемые природные ресурсы, когда темп добычи ресурса может быть произвольно большим, а ограничения, накладываемые на допустимые управления, имеют интегральный вид (см., например, [12;22]). Оптимальные значения управлений в этих моделях представляют особый интерес, поскольку они могут быть использованы для определения квот добычи используемого ресурса. При этом неограниченность множества ограничений на управления существенно затрудняет применение как известных теорем существования оптимального управления (см. [4; 5; 17]), так и некоторых вариантов принципа максимума Понтрягина [4–6; 13], основанных на конечно-временных аппроксимациях.

Ранее вопрос об ограниченности оптимальных управлений и тесно связанный с ним вопрос о регулярности (липшицевости) оптимальных траекторий в задачах на конечных интервалах времени рассматривался в работах [21;23;24]. В случае задач на бесконечном интервале времени вопрос об ограниченности оптимальных управлений изучался в работе [25]. Доказанные в данной работе достаточные условия существования и равномерной локальной ограниченности оптимальных управлений обобщают на общий нелинейный случай и усиливают предыдущий результат в этом направлении, полученный для аффинной по управлению системы и вогнутой функции мгновенной полезности (см. [3]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$u(t) \in U. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора и вектора управления в момент времени $t \geq 0$ соответственно, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы, U — произвольное непустое замкнутое (не обязательно ограниченное) множество в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$.

Будем считать, что векторная функция $f\colon [0,\infty)\times G\times U \mapsto \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $f^0\colon [0,\infty)\times G\times U \mapsto \mathbb{R}^1$ удовлетворяют следующему условию регулярности.

(A1) *При п.в.* $t \in [0,\infty)$ *частные производные* $f_x(t,x,u)$ *и* $f^0_x(t,x,u)$ *существуют для любых* $(x,u)\in G\times U$. *Функции* $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ *и* $f^0_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ *измеримы по Лебегу по* t *для любых* $(x,u)\in G\times U$, *непрерывны по* (x,u) *при п.в.* $t\in[0,\infty)$ *и локально ограничены*[2].

В качестве *допустимых управлений* в задаче (P) будем рассматривать локально ограниченные функции $u(\cdot)\in L^\infty_{loc}([0,\infty),\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие условию (1.3) для любого $t\geq 0$. Здесь, как обычно, локальная ограниченность измеримой функции $u(\cdot)$ означает, что она существенно ограничена на любом конечном интервале $[0,T]$, $T>0$. Для произвольного допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему *допустимая* траектория $x(\cdot)$ есть локально абсолютно

[2] Локальная ограниченность функции $\phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ переменных $t\in[0,\infty)$, $x\in G$ и $u\in U$ означает, что для любого $T>0$, произвольного компакта $D\subset G$ и произвольного ограниченного множества $V\subset U$ существует такая постоянная $M\geq 0$, что $\|\phi(t,x,u)\|\leq M$ при п.в. $t\in[0,T]$ и всех $x\in D$ и $u\in V$.

непрерывное решение (в смысле Каратеодори) задачи Коши (1.2), определенное на некотором конечном или бесконечном интервале $[0,\tau)$, $\tau > 0$, и лежащее в G. В силу $(A1)$ такая траектория существует и единственна (см. [1]). В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз, будем считать, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему допустимая траектория $x(\cdot)$ определена на всем бесконечном интервале времени $[0,\infty)$. Пару $(x(\cdot),u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория, будем называть *допустимой парой* (в задаче (P)). В силу $(A1)$ для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ функция $t\mapsto f^0(t,x(t),u(t))$ — локально интегрируема. Таким образом, для произвольной допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ и любого $T>0$ интеграл

$$J_T(x(\cdot),u(\cdot)) := \int\limits_0^T f^0(t,x(t),u(t))\,dt$$

определен.

Оптимальность допустимой пары $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ в задаче (P) будем понимать в сильном смысле (см. [19]). Именно допустимую пару $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ будем называть *сильно оптимальной* в задаче (P) (или, для краткости, просто *оптимальной*), если соответствующий несобственный интеграл в (1.1) сходится (к конечному числу) и для любой другой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$J(x_*(\cdot),u_*(\cdot)) \geq \limsup_{T\to\infty} \int\limits_0^T f^0(t,x(t),u(t))\,dt.$$

Относительно любой допустимой (не обязательно оптимальной) пары $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ будем предполагать выполненным следующее условие роста (см. [15; 16]).

(A2) *Существуют такие число $\beta>0$ и неотрицательная интегрируемая функция $\lambda:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta\in G$, удовлетворяющего неравенству $\|\zeta-x_0\|<\beta$, задача Коши (1.2) с $u(\cdot)=u_*(\cdot)$ и начальным условием $x(0)=\zeta$ (вместо $x(0)=x_0$) имеет решение $x(\zeta;\cdot)$ на $[0,\infty)$ в G и*

$$\max{}_{x\in[x(\zeta;t),x_*(t)]} \left|\langle f^0_x(t,x,u_*(t)), x(\zeta;t)-x_*(t)\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta-x_0\|\lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta;t),x_*(t)] = conv\{x(\zeta;t),x_*(t)\}$ – отрезок с вершинами $x(\zeta;t)$ и $x_*(t)$.

Заметим, что в условии (A2) число $\beta>0$ и функция $\lambda(\cdot)$ могут зависеть от рассматриваемой допустимой пары $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$.

Далее, будем считать, что выполняется следующее условие выпуклости.

(A3) *Для любого $M>0$ существует такой компакт $U_M\subset U$, что $\{u\in U\colon \|u\|\leq M\}\subset U_M$ и при п.в. $t\geq 0$ для всех $x\in G$ множество*

$$Q_M(t,x) = \left\{(z^0,z)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon\ z^0\leq f^0(t,x,u),\ z=f(t,x,u),\ u\in U_M\right\}$$

является выпуклым.

Наконец, будем предполагать, что выполняется следующее условие, характеризующее сходимость интегрального функционала (1.1) на множестве допустимых пар $(x(\cdot),u(\cdot))$ в задаче (P).

(A4) *Существует такая положительная функция $\omega(\cdot)$ на $[0,\infty)$, что $\omega(t)\to+0$ при $t\to\infty$ и для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ имеем*

$$\int\limits_T^{T'} f^0(t,x(t),u(t))\,dt \leq \omega(T), \quad 0\leq T\leq T'.$$

Сформулированные условия (A1)–(A4) хорошо известны в оптимальном управлении. Условие (A1) является стандартным условием регулярности, используемым в доказательствах различных вариантов принципа максимума Понтрягина [1; 8]. Условие (A2) было введено в [15] в связи с доказательством варианта принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P), содержащего явное описание сопряженной переменной при помощи аналога формулы Коши для решений линейных дифференциальных систем (подробнее см. [15; 16]). Условие (A3) является вариантом условия выпуклости, фигурирующего в различных теоремах существования оптимального управления как на конечном, так и бесконечном интервалах времени (см. [17; 20]). Наконец, условие (A4) используется в качестве равномерной по всем допустимым парам оценки на "хвост" интегрального функционала (1.1) в доказательствах различных вариантов принципа максимума Понтрягина и теорем существования оптимального управления в задаче (P), основанных на использовании конечно-временных аппроксимаций (см. [4;6;7]). Нетрудно показать, что в силу (A4) для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ несобственный интеграл в (1.1) либо сходится (к конечному числу), либо расходится к $-\infty$, и, кроме того,

$$\sup_{(x(\cdot),u(\cdot))} J(x(\cdot),u(\cdot)) \le \omega(0) < \infty.$$

Здесь верхняя грань берется по всем допустимым в задаче (P) парам $(x(\cdot),u(\cdot))$.

В следующем разд. 2 формулируется и доказывается основной результат работы — теорема о существовании и равномерной локальной ограниченности оптимальных управлений в задаче (P).

2. Существование и локальная ограниченность оптимальных управлений

Вдоль произвольной допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot z(t) = -\left[f_x(t,x(t),u(t))\right]^* z(t). \tag{2.1}$$

В силу условия (A1) частная производная $f_x(\cdot,x(\cdot),u(\cdot))$ измерима и локально интегрируема на $[0,\infty)$. Поэтому для любого $\tau \ge 0$ и произвольного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное локально абсолютно непрерывное решение $z(\cdot)$ уравнения (2.1) с начальным условием $z(\tau)=\xi$, определенное на всем интервале $[0,\infty)$. Отсюда вытекает, что на всем бесконечном интервале времени $[0,\infty)$ определена нормированная в момент $t=0$ фундаментальная матрица $Z(\cdot)$ системы (2.1) (т. е. матричное решение $Z(\cdot)$ системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $Z(0)=I$, где I — единичная диагональная матрица).

Для произвольной допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot))$ из условия (A2) вытекает оценка (см. [15, Lemma 3.1])

$$\left\|Z^{-1}(t) f^0_x(t,x(t),u(t))\right\| \le \sqrt{n}\lambda(t), \quad t \ge 0. \tag{2.2}$$

Поскольку функция $\lambda(\cdot)$ интегрируема на $[0,\infty)$, то в силу (2.2) для любого $T>0$ равенство

$$\psi_T(t) = Z(t)\int_t^T Z^{-1}(s) f^0_x(s,x(s),u(s))\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

определяет абсолютно непрерывную функцию $\psi_T : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$. Аналогично получаем, что в силу (2.2) для любого $t \ge 0$ равенство

$$\psi(t) = Z(t)\int_t^\infty Z^{-1}(s) f^0_x(s,x(s),u(s))\,ds, \quad t \ge 0, \tag{2.4}$$

определяет локально абсолютно непрерывную функцию $\psi\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$.

Определим *функцию Гамильтона — Понтрягина* в нормальной форме $\mathcal{H}: [0,\infty)\times G\times U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ для задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi)=f^0(t,x,u)+\langle\psi,f(t,x,u)\rangle,\quad t\in[0,\infty),\quad x\in G,\quad u\in U,\quad \psi\in\mathbb{R}^n.$$

Следующий результат дает достаточные условия существования и локальной равномерной ограниченности оптимальных управлений в задаче (P) в случае, когда множество U не обязательно ограниченное. Его доказательство основано на использовании метода конечно-временных аппроксимаций [4; 5; 13] и аппарата принципа максимума Понтрягина [8; 15; 16].

Теорема. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A4) *и существует по крайней мере одна допустимая пара* $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$, *для которой значение* $J(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ *конечно. Пусть, кроме того, существуют такие непрерывная неотрицательная функция* $M\colon [0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^1$, $t\ge 0$, *и положительная функция* $\delta\colon [0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^1$, $t\ge0$, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\delta(t)}{t}=0$, *что для любой допустимой пары* $(x(\cdot),u(\cdot))$, *удовлетворяющей на некотором множестве* $\mathfrak{M}\subset[0,\infty)$, $\operatorname{meas}\mathfrak{M}>0$, *для всех* $t\in\mathfrak{M}$ *неравенству* $\|u(t)\|>M(t)$, *для п.в.* $t\in\mathfrak{M}$ *для всех* $T\ge t+\delta(T)$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{u\in U:\|u\|\le M(t)}\mathcal{H}(t,x(t),u,\psi_T(t))-\mathcal{H}(t,x(t),u(t),\psi_T(t))>0. \tag{2.5}$$

Здесь функция $\psi_T(\cdot)$ *определена по паре* $(x(\cdot),u(\cdot))$ *на интервале* $[0,T]$, $T>0$, *равенством* (2.3). *Тогда в задаче* (P) *существует оптимальное допустимое управление* $u_*(\cdot)$ *и для п.в.* $t\ge0$ *имеем*

$$\|u_*(t)\|\le M(t). \tag{2.6}$$

Если же неравенство (2.5) *выполняется равномерно по* $T>0$: $t\le T-\delta(T)$, *т. е. для п.в.* $t\in\mathfrak{M}$ *имеем*

$$\inf_{T>0:\,t\le T-\delta(T)}\left\{\sup_{u\in U:\|u\|\le M(t)}\mathcal{H}(t,x(t),u,\psi_T(t))-\mathcal{H}(t,x(t),u(t),\psi_T(t))\right\}>0, \tag{2.7}$$

то оценка (2.6) *справедлива для всех оптимальных в задаче* (P) *управлений* $u_*(\cdot)$.

Доказательство. Из условия (A4) и конечности значения $J(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ на допустимой паре $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ следует, что величина $\sup_{(x(\cdot),u(\cdot))}J(x(\cdot),u(\cdot))$ также конечна. Здесь верхняя грань берется по всем допустимым парам $(x(\cdot),u(\cdot))$ в задаче (P).

Пусть теперь $\{(x_k(\cdot),u_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая максимизирующая последовательность допустимых пар:

$$\lim_{k\to\infty}J(x_k(\cdot),u_k(\cdot))=\sup_{(x(\cdot),u(\cdot))}J(x(\cdot),u(\cdot)). \tag{2.8}$$

Выберем такую возрастающую последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $T_k>\delta(T_k)$, $\lim\limits_{k\to\infty}T_k=\infty$, и положим

$$M_k=\max\left\{\operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,T_k]}\|u_k(t)\|,\ \max_{t\in[0,T_k]}M(t)\right\},\quad k=1,2,\dots.$$

Поскольку для любого $k=1,2,\dots$ управление $u_k(\cdot)$ локально существенно ограничено, а функция $M(\cdot)$ непрерывна, то величина M_k конечна. В силу условия (A3) существует такое компактное множество $U_k\subset U$, что $\{u\in U\colon\|u\|\le M_k\}\subset U_k$, причем при п.в. $t\in[0,T_k]$ и всех $x\in G$ множество

$$Q_k(t,x)=\left\{(z^0,z)\in\mathbb{R}^{n+1}\colon z^0\le f^0(t,x,u),\ z=f(t,x,u),\ u\in U_k\right\} \tag{2.9}$$

выпуклое. Нетрудно видеть, что для любого $k=1,2,\dots$ в силу непрерывности функции $u\mapsto f(t,x,u)$ и компактности множества U_k при п.в. $t\in[0,T_k]$ и всех $x\in G$ множество $Q_k(t,x)$ замкнутое.

Из условия (A1) вытекает, что многозначное отображение $Q_k : [0,T_k] \times G \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1,2,\ldots$, с выпуклыми замкнутыми значениями, определенное равенством (2.9), является измеримым по переменной t и полунепрерывным сверху по переменной x. Именно для любого $x \in G$ и любого открытого множества V из $\mathbb{R}^{n+1}$ множество

$$\{t \in [0,T_k] \colon Q_k(t,x) \bigcap V \neq \varnothing\}$$

измеримое, а при п.в. $t \in [0,T_k]$ и любого открытого множества V из $\mathbb{R}^{n+1}$ множество

$$\{x \in G \colon Q_k(t,x) \subset V\}$$

открытое.

Для $k = 1,2,\ldots$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P_k):

$$J_k(x(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_0^{T_k} f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U_k. \tag{2.10}$$

Здесь основное отличие задачи (P_k) от (P) состоит в том, что она рассматривается на фиксированном конечном интервале времени $[0,T_k]$, а допустимые управления в ней равномерно ограничены (см (2.10)). Все остальные данные в задаче (P_k) те же самые, что и в (P).

В силу теоремы существования оптимального управления в задаче на конечном интервале времени (см. [20, Theorem 9.3.i]) для любого $k = 1,2,\ldots$ в задаче (P_k) существует оптимальная допустимая пара $(\tilde{x}_k(\cdot),\tilde{u}_k(\cdot))$. Будем считать, что эта пара $(\tilde{x}_k(\cdot),\tilde{u}_k(\cdot))$ продолжена на весь интервал $[0,\infty)$ произвольным, допустимым для задачи (P) образом.

Поскольку $u_k(t) \in U_k$ при п.в. $t \in [0,T_k]$, то пара $(x_k(\cdot),u_k(\cdot))$ допустима в задаче (P_k) и

$$J_k(x_k(\cdot),u_k(\cdot)) \le J_k(\tilde{x}_k(\cdot),\tilde{u}_k(\cdot)), \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{2.11}$$

Покажем, что для любого $k = 1,2,\ldots$ при п.в. $t \in [0,T_k - \delta(T_k)]$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{u}_k(t)\| \le M(t). \tag{2.12}$$

Действительно, предположим противное. Тогда существует такое натуральное q и оптимальное в соответствующей задаче (P_q) управление $\tilde{u}_q(\cdot)$, что для всех t из некоторого множества $\mathfrak{M}_q \subset [0,T_q - \delta(T_q)]$, $\operatorname{meas}\mathfrak{M}_q > 0$, имеем $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$.

Далее, в силу оптимальности пары $(\tilde{x}_q(\cdot),\tilde{u}_q(\cdot))$ в задаче (P_q) для этой пары выполняется условие максимума в нормальной форме:

$$\mathcal{H}(t,\tilde{x}_q(t),\tilde{u}_q(t),\psi_q(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U_q} \mathcal{H}(t,\tilde{x}_q(t),u,\psi_q(t)), \quad t \in [0,T_q], \tag{2.13}$$

с сопряженной переменной $\psi_q(\cdot)$, определяемой по паре $(\tilde{x}_q(\cdot),\tilde{u}_q(\cdot))$ равенством (см. (2.3))

$$\psi_q(t) = Z(t)\int\limits_t^{T_q} Z^{-1}(s) f_x^0(s,\tilde{x}_q(s),\tilde{u}_q(s))\,ds, \quad t \in [0,T_q].$$

Здесь используется тот факт, что фигурирующая в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (P_q) оптимального управления на конечном интервале времени $[0,T_q]$ со свободным правым концом сопряженная переменная $\psi_q(\cdot)$ является решением сопряженной системы принципа максимума Понтрягина, соответствующим паре $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ и удовлетворяющим условию трансверсальности в правом конце $\psi_q(T_q) = 0$ (см. [8]).

Однако в силу предположений теоремы из справедливости для всех $t \in \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ неравенства $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$ вытекает выполнение для пары $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ для п.в. $t \in \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ неравенства (2.5) с функцией $\psi_q(\cdot)$. Отсюда следует, что при п.в. $t \in \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ множество $\{u \in U \colon \|u\| \le M(t)\}$ непусто и

$$\sup_{u \in U, \|u\| \le M(t)} \mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), u, \psi_q(t)) > \mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), \tilde{u}_q(t), \psi_q(t)). \tag{2.14}$$

Далее, при $t \in \mathfrak{M}_q$ согласно предположению имеем $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$, а в силу определения множества U_q при п.в. $t \in \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ справедливо включение $U_q \supset \{u \in U \colon \|u\| \le M(t)\}$. Поскольку $\mathfrak{M}_q \subset [0, T_q - \delta(T_q)]$, $\operatorname{meas} \mathfrak{M}_q > 0$, то отсюда вытекает, что выполнение при п.в. $t \in \mathfrak{M}_\mathfrak{q}$ неравенства (2.14) противоречит условию максимума (2.13). Таким образом, условие (2.12) выполняется для любого $k = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим теперь последовательность допустимых в задаче (P) пар $\{(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))\}_{k=1}^\infty$ (напомним, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ оптимальная в задаче (P_k) пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))$ продолжена на весь интервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для задачи (P) образом).

Из оценки (2.12), непрерывности функции $M(\cdot)$ и условия $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\delta(T_k)}{T_k} = 0$ вытекает, что на любом конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, начиная с некоторого номера N, $T_N - \delta(T_N) \ge T$ для всех $k \ge N$ управления $\tilde{u}_k(\cdot)$ равномерно существенно ограничены величиной $\bar{M}_N = \max_{t \in [0, T_N]} M(t)$:

$$\|\tilde{u}_k(t)\| \overset{\text{п.в.}}{\le} \bar{M}_N, \quad t \in [0, T], \quad k \ge N. \tag{2.15}$$

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ определим вспомогательную функцию $\tilde{x}_k^0 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ равенством

$$\tilde{x}_k^0(t) = \int_0^t f^0(s, \tilde{x}_k(s), \tilde{u}_k(s))\, ds, \quad t \ge 0.$$

В силу условия (A1) и равномерной локальной существенной ограниченности управлений $\tilde{u}_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \ldots$, последовательность $\big(\{\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot))\big\}_{k=1}^\infty$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на любом конечном отрезке $[0, T]$. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, в силу теоремы Арцела — Асколи (см., например, [10]) можно считать, что последовательность $\big\{(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot)\big\}_{k=1}^\infty$ сходится к некоторой локально липшицевой функции $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot)) \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при $k \to \infty$.

По построению для любого $T > 0$ при всех достаточно больших номерах $k \ge N$, $T_N - \delta(T_N) \ge T$, функция $(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot)) \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\big(\dot{\tilde{x}}_k^0(t), \dot{\tilde{x}}_k(t)\big) \in Q_{\bar{M}_N}(t, x_k(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T].$$

Здесь множество $Q_{\bar{M}_N}(t, x)$ определено для п.в. $t \ge 0$ и всех $x \in G$ условием (A3) (см. (2.15) и (A3)).

Так как многозначное отображение $Q_{\bar{M}_N}(\cdot, \cdot)$ имеет выпуклые замкнутые значения, измеримо по t и полунепрерывно сверху по x и последовательность $\{(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot))\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится к $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ на любом конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, то для любого $T > 0$ существует такое $N > 0$, что локально абсолютно непрерывная функция $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\big(\dot{x}_*^0(t), \dot{x}_*(t)\big) \in Q_{\bar{M}_N}(t, x_*(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T].$$

По теореме Филиппова о существовании измеримой однозначной ветви у многозначного отображения (см. [9]) существуют такие измеримые функции $u_*(\cdot) \colon [0, T] \to U_N$ и $v_*(\cdot) \colon [0, T] \to [0, \infty)$, что

$$\dot{x}_*(t) = f(t, x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T]$$

и

$$\dot{x}_*^0(t) = f^0(t, x_*(t), u_*(t)) - v_*(t) \le f^0(t, x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T]. \tag{2.16}$$

В силу произвольности $T > 0$, не ограничивая общности, можно считать, что управление $u_*(\cdot)$ и функция $v_*(\cdot)$ определены на всем бесконечном интервале $[0, \infty)$. По построению они являются локально ограниченными измеримыми функциями. Таким образом, $u_*(\cdot)$ — допустимое управление в задаче (P), а $x_*(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория.

В силу равномерной сходимости последовательности $\{\tilde{x}_k^0(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ к функции $x_*^0(\cdot)$ на любом конечном отрезке $[0, T]$ при $k \to \infty$ из (2.16) вытекает неравенство

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^T f^0(t, \tilde{x}_k(t), \tilde{u}_k(t))\, dt \le \int\limits_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt.$$

Отсюда в силу (A4) для любого $T \ge 0$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} J(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot)) \le \int\limits_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt + \omega(T).$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$, в силу (2.8) и (2.11) получаем равенство

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot)).$$

Таким образом, $u_*(\cdot)$ — допустимое оптимальное управление в задаче (P). По построению, управление $u_*(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (2.6).

Покажем теперь, что если неравенство (2.5) выполняется равномерно по $T > 0$: $T \ge t + \delta(T)$ (см. (2.7)), то оценка (2.6) выполняется для любого оптимального в задаче (P) управления $u_*(\cdot)$.

Действительно, предположим противное, т. е. что для некоторой оптимальной в задаче (P) пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется неравенство (2.7), а условие (2.6) нарушается. Тогда существует такое $\mathfrak{M} \subset [0, \infty)$, $\operatorname{meas} \mathfrak{M} > 0$, что $\|u_*(t)\| > M(t)$ для всех $t \in \mathfrak{M}$. Но тогда в силу (2.7)) существует такая функция $\varepsilon : \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^1$, $\varepsilon(t) > 0$, $t \in \mathfrak{M}$, что для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ и любого достаточно большого T: $t \le T - \delta(T)$ выполняется неравенство

$$\sup_{u \in U\colon \|u\| \le M(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi_T(t)) \ge \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_T(t)) + \varepsilon(t) \tag{2.17}$$

с функцией $\psi_T(\cdot)$, определенной по паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ равенством (2.3). Переходя в (2.17) к пределу при $T \to \infty$ в силу компактности множества $\{u \in U\colon \|u\| \le M(t)\}$ и того факта, что $\psi(t) = \lim_{T\to\infty} \psi_T(t)$, $t \ge 0$, для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ получаем

$$\sup_{u \in U\colon \|u\| \le M(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)) \ge \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) + \varepsilon(t) > \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)). \tag{2.18}$$

Здесь функция $\psi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ определяется равенством (2.4). Однако в силу [16, Theorem 3.1] любая оптимальная в (P) пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет условию максимума в нормальной форме

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t))$$

с сопряженной переменной $\psi(\cdot)$, определенной по паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ при помощи формулы (2.4), что противоречит (2.18). Теорема доказана. $\square$

Доказанная теорема позволяет обосновать существование оптимального управления в некоторых не обязательно аффинных по управлению задачах оптимального экономического роста с неограниченными управлениями. В частности, в примере, рассмотренном в [3], данный результат позволяет охватить ситуацию, когда темп возобновления используемого ресурса зависит от темпа его эксплуатации. Теорема может быть применена также и в случае, когда возобновление ресурса описывается логистической функцией (см. [22]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
2. **Асеев С.М.** Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. P. 239–253.
3. **Асеев С.М.** Об ограниченности оптимальных управлений в задачах на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 45–55.
4. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжимский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 2. С. 3–64.
5. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
6. **Бесов К.О.** О необходимых условиях оптимальности для задач экономического роста с бесконечным горизонтом и локально неограниченной функцией мгновенной полезности // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 56–88.
7. **Дмитрук А.В., Кузькина Н.В.** Теорема существования оптимального управления на бесконечном интервале времени // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 4. С. 503–518; Письмо в редакцию // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 2. С. 320.
8. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
9. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим. 1959. №. 2. С. 25–32.
10. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. New York: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
12. **Aseev S., Besov K., Kaniovski S.** The problem of optimal endogenous growth with exhaustible resources revisited // Green growth and sustainable development / eds. J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Heidelberg: Springer, 2013. Vol. 14. P. 3–30. (Dyn. Model. Econom. Econ. Finance; vol. 14).
13. **Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V.** The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119.
14. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.
15. **Aseev S.M., Veliov, V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains: Contemp. Math. / eds. G. Wolansky, A. J. Zaslavski. Providence: Amer. Math. Soc., 2014. Vol. 619. P. 1–17.
16. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 41–57.
17. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95, no. 1. P. 195–213.
18. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995. 539 p.
19. **Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control: Determenistic and stochastic systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 332 p.
20. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations. New York: Springer, 1983. 542 p. (Appl. Math.; vol. 17).
21. **Clarke F.H., Vinter, R.B.** Regularity properties of optimal controls // SIAM J. Control Optim. 1990. Vol. 28, no. 4. P. 980–997.
22. Optimal control for sustainable consumption of natural resources / T. Manzoor, S. Aseev, E. Rovenskaya, A. Muhammad // Proc. 19th IFAC World Congress / eds. E. Boje, X. Xia. 2014. P. 10725–10730.
23. **Sarychev A.V., Torres D.F.M.** Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics // Appl. Math. Optim. 2000. Vol. 41, no. 2. P. 237–254.

24. **Torres D.F.M.** Regularity of minimizers in optimal control // Equadiff 10 CD ROM: Proc. Czechoslovak International Conference on Differential Equations and their Applications / eds. J. Kuben, J. Vosmanský. Brno: Masaryk University Publishing House, 2002. P. 397–412.
25. **Zaslavski A.J.** Existence and uniform boundedness of optimal solutions of variational problems // Abstr. Appl. Anal. 1998. Vol. 3, no. 3-4. P. 265–292.

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом дифференциальных уравнений
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
International Institute for Advanced Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: aseev@mi.ras.ru

Поступила 04.04.2016