

УДК 517.977.58

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА И РАССЕИВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НЕВЫПУКЛЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ¹**П. Д. Лебедев, А. А. Успенский**

Для плоской задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей и невыпуклым компактным целевым множеством с гладкой границей предложены алгоритмы построения функции оптимального результата. Алгоритмы обрабатывают случай, при котором решение задачи имеет нетривиальную (сегментированную) структуру сингулярного множества. Выявлены дифференциальные зависимости для гладких сегментов сингулярного множества, что позволяет их рассматривать и строить в виде дуг интегральных кривых. Приведен пример задачи быстродействия, для которого осуществлено численное конструирование функции оптимального результата и ее сингулярного множества. Выполнена визуализация результатов.

Ключевые слова: задача быстродействия, рассеивающая линия, невыпуклое множество, оптимальная траектория, дифференциальное уравнение.

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimal problems with a nonconvex target set.

Algorithms for constructing the optimal result function are proposed for a planar time-optimal problem with a circular velocity vectogram and a nonconvex target set with smooth boundary. The algorithms work with the case where the solution of the problem has a complicated (segmented) structure of the singular set. Differentiable dependences are detected for smooth segments of the singular set, which makes it possible to consider and construct these segments as arcs of integral curves. An example of the time-optimal problem is considered, for which the optimal result function and its singular set are calculated numerically. A visualization of the results is implemented.

Keywords: time-optimal problem, dispersing line, nonconvex set, optimal trajectory, differential equation.

MSC: 34H20, 34K10, 35A18, 35A21**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198**Введение**

Рассматривается плоская задача быстродействия [1] с простой динамикой. Класс функций, к которому относится функция оптимального результата, известен [2] и имеет геометрическое истолкование. В условиях невыпуклости целевого множества, т. е. в довольно общей ситуации, решение задачи не является всюду дифференцируемой функцией, и ее отыскание сугубо в аналитической форме является трудноразрешимой проблемой (см., например, [3]). Негладкость разрешающих конструкций служит заметным препятствием при построении решения задачи, тем самым мотивируя исследователей на поиск процедур его построения. Цель настоящей работы заключается в разработке комбинированных алгоритмов конструирования функции оптимального результата, под которыми понимаются алгоритмы, сочленяющие аналитические процедуры выявления негладких особенностей функции и численные процедуры ее формирования в областях дифференцируемости. Речь идет о тех особенностях, которые определяют неоднозначность выбора оптимального управления. Задача разработчиков алгоритмов видится в выявлении и построении сингулярных кривых и точек бифуркации, что создает основу для корректного формирования управляющих воздействий.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10018).

Предъявленный в работе пример показывает умение авторов реализовывать алгоритмы при построении по существу негладких функций, возникающих при решении задач быстрого действия на плоскости. При этом сфера применения алгоритмов выходит за рамки теории управления. Алгоритмы могут быть использованы и используются, например, при решении задач геометрической оптики [4], а модификации этих алгоритмов — при численном построении решений задач об оптимальной упаковке [5].

В работе изучается в некоторой степени модельная ситуация, которая обусловлена, главным образом, простотой рассматриваемой динамической системы. При этом модельность ситуации не отменяет те особенности и эффекты, которые возникают при решении задач управления с куда как более сложной динамикой. Здесь авторы при изложении результатов следуют духу общего подхода к решению математических задач, отраженному в известной работе А. В. Кряжжмского и Ю. С. Осипова [6], в которой для разъяснения идеи и методов решения проблемы (в их случае — для разъяснения идеи реконструкции управления на базе методов экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и метода регуляризации А. Н. Тихонова) рассмотрена простейшая управляемая система, к слову, по динамике близкая к рассматриваемой в настоящей работе. Впоследствии эти идеи и методы решения перенесены на более общие ситуации. Создаваемые авторами этой статьи процедуры также могут быть обобщены. Изложенные здесь алгоритмы следует рассматривать как прототипы алгоритмов, предназначенных для решения задач управления по быстрдействию с динамикой общего вида.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу быстрого действия, заключающуюся в приведении точки на евклидовой плоскости на заданное целевое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ за минимально возможное время [1]. Полагаем, что движение точки \mathbf{x} с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ задается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

где на управление $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ наложено ограничение $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq 1$. Вектограмма движений рассматриваемой динамической системы есть круг единичного радиуса с центром в начале координат.

В случае $\mathbf{x} \notin M$ оптимальным управлением \mathbf{v} является вектор единичной нормы, направленный от \mathbf{x} к ближайшей к ней в евклидовой метрике точке \mathbf{y} границы множества M . Функция оптимального результата $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ (равная минимальному времени, за которое движущаяся точка может достичь M) совпадает с евклидовым расстоянием $\rho(\mathbf{x}) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in M\}$ от точки $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ до множества M (см. [2; 3]).

В дальнейшем будем рассматривать случай компактного односвязного множества M , граница которого Γ есть плоская кривая [7], заданная параметрическим уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), t \in [0, T]\}. \quad (1.2)$$

Здесь $T > 0$, а отображение $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ является непрерывным на отрезке $[0, T]$ и дважды дифференцируемым во всех точках интервала $(0, T)$. Значения производных первого и второго порядка на концах интервала считаем равными. Считаем, что (1.2) есть замкнутая регулярная кривая без точек самопересечения, т. е. (1.2) может быть представлена как след точки, движущейся по плоскости с конечной ненулевой скоростью. Данные условия гарантирует, что подмножество $\text{int } M$ внутренних точек множества M — непустое и полностью находится по одну сторону от Γ . Данные требования к целевому множеству отличаются от рассматриваемых ранее авторами случаев, когда в качестве M выступали подграфики функций. Множества, ограниченные замкнутой параметризованной кривой, были рассмотрены авторами ранее в работе [8]. В настоящей работе изучается существенно более общий случай, в рамках которого

возможна сегментация гладких ветвей сингулярного множества решения. Важность рассматриваемого класса задач обусловлена широкой сферой применения. Так, например, при решении задач управления [10] применяются аппроксимации в виде ε -окрестностей компактных множеств, т. е. конструируются фигуры с границей, совпадающей с волновым фронтом (линией уровня функции $u(x, y)$), порожденным исходным множеством (см., например, [11]). Еще одним применением конструкций решения рассматриваемой задачи быстрого действия с целевым множеством сложной геометрии может служить формирование экстремального прицеливания в динамических задачах управления [10]. Для реализации процедуры прицеливания требуется для точек плоскости строить наборы ближайших к ним элементов из целевого множества.

Рассматриваемой задаче быстрого действия можно поставить в соответствие уравнение Айзекса — Беллмана [1]

$$\min_{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| \leq 1} \langle Du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + 1 = 0, \quad (1.3)$$

где $Du(\mathbf{x})$ есть градиент функции $u(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов. Минимаксное решение [12] задачи Дирихле для уравнения (1.3) с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

совпадает с функцией оптимального результата $u(x, y)$ на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$ (см. [2]).

К задаче быстрого действия для системы (1.1) также имеет отношение изучаемое в геометрической оптике [4, с. 57] уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (1.5)$$

с тем же краевым условием (1.4). Эйконал $u = u(\mathbf{x})$ в плоском случае есть функция от двух переменных $\mathbf{x} = (x, y)$, равная оптической длине пути от точки до множества M . Введенное С. Н. Кружковым [13] фундаментальное (обобщенное) решение краевой задачи (1.4), (1.5) имеет вид $u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M)$. Оно соответствует представлениям геометрической оптики о распространении лучей света в однородной среде.

В настоящей работе задача быстрого действия считается решенной, если построена функция оптимального результата и указаны ее сингулярные множества.

2. Сингулярные множества в задаче быстрого действия

В случае выпуклого множества M функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ выпукла на всей плоскости \mathbb{R}^2 и дифференцируема на множестве G (см. [14, с. 88]). Если же множество M не выпукло, то у нее возникают существенные особенности, множества на которых она теряет гладкость.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством $\Omega_M(\mathbf{x})$ проекций точки \mathbf{x} на множество M назовем объединение всех точек $\mathbf{y} \in M$, ближайших в евклидовой метрике к \mathbf{x} .

О п р е д е л е н и е 2. Биссектрисой $L(M)$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ назовем [2; 15] множество всех точек, для которых множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ состоит из двух или более элементов:

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \exists \mathbf{y}_1 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}) (\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2)\}.$$

Биссектриса множества является частным случаем множеств симметрии [16], изучаемых, например, в работах В. И. Арнольда [17]. В качестве другого представителя множеств симметрии (лежащим не вонне множества M , а внутри него) можно указать так называемый “скелет” множества, активно используемый Л. М. Местецким в задачах распознавания образов [18, с. 32]. Авторы изучали ранее свойства биссектрис как сингулярных множеств в задаче быстрого действия для системы (1.1), в частности на предмет наличия у них асимптот [3] и точек прекращения [19].

Согласно классификации Р. Айзекса $L(M)$ — рассеивающая линия в задаче быстрогодействия для динамической системы (1.1): из каждой ее точки исходит более одной оптимальной траектории [1, с. 196]. Этим вызвано нарушение на $L(M)$ гладкости функции оптимального результата, характерное для сингулярных кривых. Сингулярные множества изучались многими авторами. Например в работе [20] конструировались сингулярные поверхности с целью формирования оптимальных скалярных управлений игроков в линейной дифференциальной игре. Для построения $L(M)$ перейдем к рассмотрению проекций ее точек на множество M .

О п р е д е л е н и е 3. Точка $\mathbf{x} \in L(M)$ биссектрисы $L(M)$ называется порожденной парой точек $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} \in \partial M$, если $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x})$ и $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$. При этом \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 называются α -симметричными точками [21].

В случае гладкой кривой Γ для построения произвольной точки биссектрисы достаточно найти порождающую ее пару точек, лежащих на Γ . Затем в случае, если нормали к Γ в этих точках не параллельны, их точка пересечения и будет точкой биссектрисы. Если же нормали параллельны, то тогда точка биссектрисы должна лежать на середине отрезка — с концами, совпадающими с порождающими точками.

Структура биссектрисы $L(M)$ существенным образом зависит от геометрии множества M . В общем случае она представляет из себя объединение гладких одномерных многообразий и нульмерных многообразий (в роли которых могут выступать точки стыка гладких ветвей, точки прекращения и реже другие виды особых точек). Поэтому построение $L(M)$ целесообразно начинать с выделения гладких участков и отыскания координат проекций их точек. Подобные процедуры для тех множеств, граница которых совпадает с графиком функции в декартовых координатах, представлены авторами в работах [21;22]. Из результатов теории особенностей гладких отображений [16;21] известно, что точки $\mathbf{x} \in L(M)$, лежащие на участках гладкости биссектрисы, имеют ровно две проекции на множество M . Будем далее обозначать их как $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$. В работе [23] показано, что касательная к кривой $L(M)$ в точке $\mathbf{x} \in L(M)$ совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$. Поэтому для отыскания ее уравнения достаточно найти значения параметра t , задающего проекции.

При практической реализации построения гладких участков $L(M)$ естественно найти зависимость $t_2 = t_2(t_1)$, связывающую параметры, задающие α -симметричные точки. Однако на практике это трудно реализовать в виде численного алгоритма. Запишем координатные функции (1.2) в виде $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Точка $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ пересечения нормалей N_1 и N_2 , построенных к Γ в точках $\mathbf{y}_1 = (x(t_1), y(t_1))$ и $\mathbf{y}_2 = (x(t_2), y(t_2))$, в этих обозначениях имеет координаты

$$x^* = \frac{(x(t_1)x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1))y'(t_2) - (x(t_2)x'(t_2) + y(t_2)y'(t_2))y'(t_1)}{x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)}, \quad (2.1)$$

$$y^* = \frac{-(x(t_1)x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1))x'(t_2) + (x(t_2)x'(t_2) + y(t_2)y'(t_2))x'(t_1)}{x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)}. \quad (2.2)$$

Знаменатель $x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)$ здесь отличен от нуля, если нормали N_1 и N_2 не параллельны. При нетривиальной геометрии кривой (1.2) зависимости (2.1), (2.2) могут быть трудно выявляемыми при нахождении. Кроме того, в каждом случае надо проверять, не существует ли точка на границе множества M , лежащая ближе к точке пересечения нормалей, чем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$. С целью развития алгоритмов построения рассеивающих кривых в настоящей работе используются методы, основанные на решении дифференциальных уравнений. Они позволяют поэтапно находить параметры α -симметричных точек, отталкиваясь от ранее найденных значений. В дальнейшем по их координатам строятся точки биссектрисы по формулам (2.1), (2.2).

3. Уравнения для параметра α -симметричных точек

При построении рассеивающих линий в задаче быстрого действия лучше всего получить формулы, которые в наименьшей степени зависят от параметризации (1.2) кривой Γ . Основным свойством плоской кривой, инвариантным относительно ее описания, является ее кривизна. Для замкнутой плоской кривой значение кривизны $k = k(t)$ в точке $\mathbf{y}(t)$ определяется как

$$k(t) = \frac{\mathbf{y}''(t) \wedge \mathbf{y}'(t)}{\|\mathbf{y}'(t)\|^{3/2}}. \quad (3.1)$$

Здесь $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ означает так называемое косое или псевдоскалярное произведение векторов. Полагаем без ограничения общности, что при изменении параметра t от 0 до T вектор $\mathbf{y}(t)$ делает оборот вокруг внутренних точек множества M против часовой стрелки. В этом случае величина $k = k(t)$ будет положительной, если центр кривизны кривой Γ расположен с той стороны нормали к ней, которая направлена внутрь множества M .

Теорема (о структуре гладкого участка биссектрисы). Пусть точка биссектрисы $\mathbf{x} \in L(M)$ имеет ровно две проекции $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$ на компактное односвязное множество M , при этом $\mathbf{x} \neq (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$. Тогда для параметров t_1, t_2 , задающих координаты α -симметричных точек, справедливо дифференциальное соотношение

$$\frac{dt_2}{dt_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1} \frac{\|\mathbf{y}'(t_1)\|}{\|\mathbf{y}'(t_2)\|}, \quad (3.2)$$

где k_1 и k_2 — значения кривизны кривой Γ в точках \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 , $r = \rho(\mathbf{x}, M)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда значение параметра t совпадает с длиной дуги s кривой Γ , отложенной от точки $\mathbf{y}(0)$ против часовой стрелки. В этом случае имеет место тождество $\|\mathbf{y}'(s)\| \equiv 1$ при $s \in (0, T)$. Соответственно формула (3.2) принимает вид

$$\frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1}, \quad (3.3)$$

где s_1 и s_2 — длина дуги кривой Γ , отсчитываемая от точек \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 .

Определимся с выбором системы координат, удобной для доказательства. Поскольку по условию теоремы точка биссектрисы $\mathbf{x} \in L(M)$ не совпадает с серединой отрезка $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$, то нормали N_1 и N_2 к кривой Γ в точках \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 пересекаются, образуя угол, отличный от 0. Следовательно, в малых окрестностях этих точек кривая Γ может быть представлена как график дважды дифференцируемой функции. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой $\mathbf{o} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$. При этом выбираем ось ординат так, чтобы она проходила через точки \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 . Направление оси ординат выберем так, чтобы оно было направлено от точки \mathbf{x} к \mathbf{o} . Можно записать координаты точек \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 как $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно. При этом в силу выбора осей $x_1 = -x^*, x_2 = x^*, x^* > 0$. Точка \mathbf{x} имеет координаты $(0, y^*), y^* < 0$.

Обозначим в выбранной системе координат кривую Γ как график функции $y = f(x)$ с областью определения $X = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \cup (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина. Поскольку нормали N_1 и N_2 не параллельны оси абсцисс, а кривая Γ имеет второй порядок гладкости, то функция $f(x)$ на множестве X имеет производные первого и второго порядка $f'(x)$ и $f''(x)$. На рис. 1 показаны граница Γ множества M (граница обозначена пунктирной линией) и ее участки, являющиеся дугами графика функции $y = f(x)$ (обозначенные сплошной линией), а также нормали N_1 и N_2 . На рис. 1 обозначены также точки $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}$ и \mathbf{o} .

Рассмотрим теперь α -симметричные точки, лежащие на графике $\text{gr } f$ функции $y = f(x)$ с произвольными абсциссами x_1 и x_2 . Определим их ординаты:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2,$$

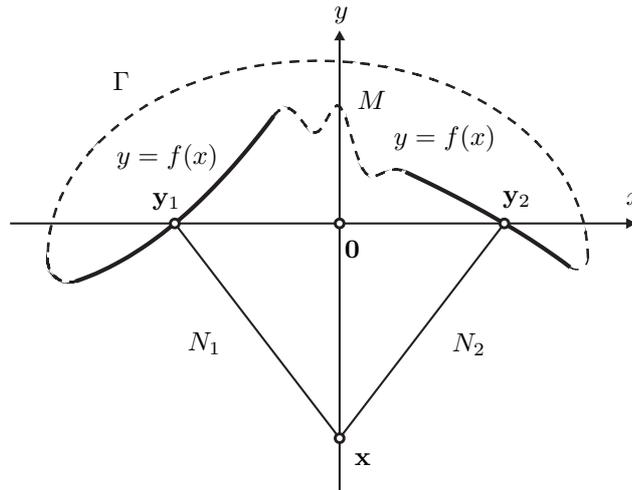


Рис. 1. Расположение точки биссектрисы и ее проекций.

и значения производных функции:

$$y'_i = f'(x_i), \quad y''_i = f''(x_i), \quad i = 1, 2.$$

При этом по построению $y'_1 = -y'_2$, $y'_1 < 0$. Условием того, что точки находятся на равном расстоянии от точки пересечения нормалей в них к $\text{gr } f$, является равенство

$$\arctg y'_1 + \arctg y'_2 - 2 \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0. \quad (3.4)$$

Обозначим правую часть равенства (3.4) как $F(x_1, x_2)$. Если $\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \neq 0$, то по теореме о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_1}{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_2}.$$

Тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - 2 \frac{(x_2 - x_1)y'_1 - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2 \frac{(x_2 - x_1)y'_2 - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \frac{y''_2}{1 + (y'_2)^2}}. \quad (3.5)$$

Записывая выражение (3.5) для абсцисс точек y_1 и y_2 , учтем, что для них в силу выбора системы координат $y_1 = y_2 = 0$ и $y'_1 = -y'_2$. То есть

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_1 = -x^*} = - \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - 2 \frac{y'_1}{x_2 - x_1}}{\frac{y''_2}{1 + (y'_2)^2} - 2 \frac{y'_2}{x_2 - x_1}} = - \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - \frac{y'_1}{x^*}}{\frac{y''_2}{1 + (y'_1)^2} + \frac{y'_1}{x^*}}. \quad (3.6)$$

Заметим, что по построению расстояние от точки биссектрисы x до ее проекций вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} = \sqrt{x^{*2} + \left(\frac{x^*}{y'_1}\right)^2} = x^* \frac{\sqrt{y_1'^2 + 1}}{-y'_1}. \quad (3.7)$$

Кривизна графика функции

$$k_i = \frac{y''_i}{(1 + y_i'^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Знак кривизны графика функции, определенной по формуле (3.8), совпадает со знаком (3.1) для той же точки. Он положительный, если кривая $gr f$ локально выпукла вниз, а значит, она выпукла в ту сторону, в которую направлена внешняя нормаль к границе множества M . И знак отрицательный, если кривая $gr f$ локально выпукла вверх, т. е. в противоположном случае.

Преобразовав выражение (3.6) и подставив в него значения (3.7) и (3.8), получаем

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_1=-x^*} = -\frac{\frac{y_1''}{(1+(y_1')^2)^{3/2}} - \frac{y_1'}{(1+(y_1')^2)^{1/2}x^*}}{\frac{y_2''}{(1+(y_1')^2)^{3/2}} + \frac{y_1'}{(1+(y_1')^2)^{1/2}x^*}} = -\frac{k_1 + 1/r}{k_2 + 1/r} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1}. \quad (3.9)$$

Производная длины дуги графика функции $y = f(x)$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Поэтому формула (3.9) позволяет выявить дифференциальную зависимость

$$\frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1} \sqrt{\frac{1 + (y_2')^2}{1 + (y_1')^2}}. \quad (3.10)$$

Поскольку в силу выбора системы координат $|y_1'| = |y_2'|$, то значение выражения (3.10) совпадает с (3.3).

В свою очередь при произвольном выборе гладкой параметризации кривой Γ длина дуги кривой s и значение t связаны формулой

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{y}'(t)\|.$$

Поэтому

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{ds_2}{ds_1} \frac{\|\mathbf{y}'_1(t)\|}{\|\mathbf{y}'_2(t)\|}. \quad (3.11)$$

Подставив в формулу (3.11) значение производной (3.3), получаем выражение (3.2). \square

З а м е ч а н и е 1. Знаменатель выражения (3.2) может обращаться в нуль, если произведение кривизны k кривой Γ в точке \mathbf{y}_1 на r равно -1 . Это означает, что \mathbf{x} совпадает с центром кривизны [9, с. 125] кривой Γ в точке \mathbf{y}_1 , и возможно только в том случае, если \mathbf{y}_1 есть точка локального максимума кривизны кривой Γ (подробнее см. [21]). Следовательно, для регулярной замкнутой кривой Γ количество таких точек не более, чем конечно.

З а м е ч а н и е 2. В общем случае биссектриса состоит не только из гладких ветвей, но и из нульмерных многообразий: точек их стыка (точек бифуркации). Множество проекций таких точек состоит не менее, чем из трех элементов [16]. При практической реализации алгоритмов выделение нульмерных многообразий является первоочередной задачей, поскольку, отталкиваясь от них, легче строить гладкие одномерные ветви.

З а м е ч а н и е 3. Формула (3.3) выглядит гораздо проще формулы (3.2), поскольку в ней задействованы исключительно геометрические инварианты: расстояние от точки биссектрисы до множества M и кривизна кривой Γ в ее проекциях. Однако при численной реализации ее трудно применять, поскольку она требует параметризации границы Γ величиной, равной длине ее дуги, отсчитываемой от заданной точки.

Важную роль при построении сингулярного множества M играют некоторые характеристические точки.

О п р е д е л е н и е 4. Будем называть точку $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ псевдовершиной [21] множества M , если существует последовательность $\{(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ пар α -симметричных точек, для которой имеет место предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0).$$

Связь между координатами проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины изучалась в работах [19; 21]. В частности, показано, что для параметров $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$ в окрестности точки t_0 в случае дважды гладкой кривой Γ выполняется предельное соотношение (см. [8])

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = -1. \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) позволяет задать для уравнения (3.2) начальное условие $t_2(t_0) = t_0$, доопределив значение производной при $t_1 = t_0, t_2 = t_0$ как $\frac{dt_2}{dt_1} = -1$.

4. Пример построения функции оптимального результата

Пусть в задаче быстрогодействия для динамической системы (1.1) целевое множество M не выпукло и ограничено кривой Γ , заданной уравнением

$$\begin{cases} x = (\cos^2(2t) + 0.5 \sin^4(2t)) \cos t, \\ y = (\cos^2(2t) + 0.5 \sin^4(2t)) \sin t, \end{cases} \quad (4.1)$$

в котором параметр t принимает значения из отрезка $[0, T] = [0, 2\pi]$. Требуется построить график функции оптимального результата $u(x, y)$ и выделить сингулярное множество $L(M)$.

Заметим, что кривую Γ можно записать в полярных координатах, переобозначив t как угловую координату φ , от которой зависит радиус r^* :

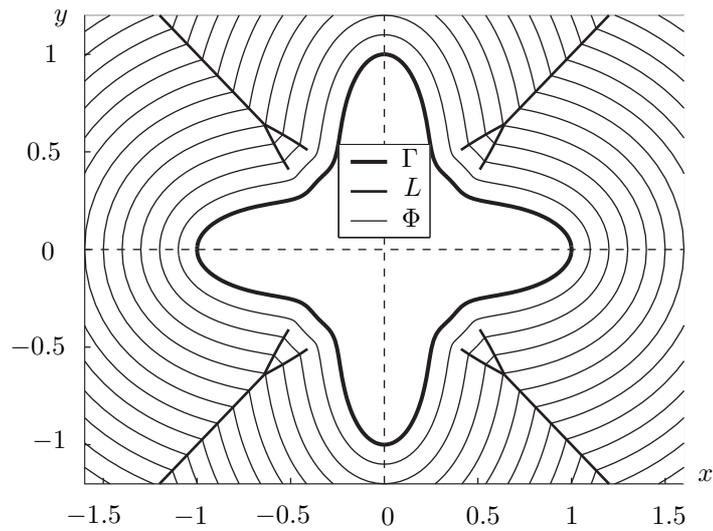
$$r^*(\varphi) = \cos^2(2\varphi) + 0.5 \sin^4(2\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Для радиуса r имеет место оценка

$$r^*(\varphi) = 1 - \sin^2(2\varphi) + 0.5 \sin^4(2\varphi) = 0.5(\sin^4(2\varphi) - 2\sin^2(2\varphi) + 2) = 0.5(\sin^2(2\varphi) - 1)^2 + 0.5 \geq 0.5.$$

При этом функция $r^*(\varphi)$ имеет период, равный $T^* = \pi/2$ (а значит, и число $T = 4T^* = 2\pi$ кратно ее периоду). Следовательно, кривая (4.1) ограничивает замкнутую фигуру, содержащую начало координат, и является гладкой.

Аппроксимация решения задачи быстрогодействия была выполнена с помощью разработанного в пакете MATLAB [24] вычислительного комплекса. Ранее он использовался для построения рассеивающих линий и функции оптимального результата в задачах, в которых целевым множеством являлся подграфик кусочно-гладкой функции, заданной на связном множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ [2; 19; 21]. Комплекс был переработан для случая множества с параметрически заданной границей. Данные фигуры часто встречаются при решении различных динамических задач, в которых обычно целевым множеством и связанными с ними областями достижимости и управляемости являются компакты. Ключевым элементом отыскания значений функции $u(x, y)$ и построения ее линий уровня стало конструирование множества $L(M)$, состоящего из четырех компонент связности. Поскольку множество M симметрично относительно осей координат, то достаточно построить одну из компонент $L(M)$ (например расположенную в первом квадранте), а затем отразить ее симметрично относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Теорема о структуре биссектрисы дает возможность конструировать ее гладкие ветви, решая дифференциальное уравнение (3.2) с начальными условиями, определяемыми крайними точками ветвей. В данном примере для отыскания этих точек найдены псевдовершины множества M . В первом квадранте к ним относятся $\mathbf{y}_1 \approx (0.426, 0.283)$

Рис. 2. Кривая Γ , биссектриса $L(M)$ и волновые фронты Φ .

и $\mathbf{y}_2 \approx (0.283, 0.426)$. Центры кривизны кривой Γ в этих псевдовершинах являются точками прекращения $\hat{\mathbf{x}}_1 \approx (0.51, 0.41)$ и $\hat{\mathbf{x}}_2 \approx (0.41, 0.51)$ для двух ветвей сингулярного множества $L(M)$: L_1 и L_2 (симметричных относительно прямой $y = x$). Заметим, что, строго говоря, точки прекращения $\hat{\mathbf{x}}_1$ и $\hat{\mathbf{x}}_2$ входят не во множество $L(M)$, а лишь в его замыкание. Данные ветви склеиваются в точке $\mathbf{x}_0 \approx (0.642, 0.642)$, являющейся точкой бифуркации для $L(M)$. Из нее начинается третья ветвь L_3 , представляющая из себя луч на прямой $y = x$.

Кривая Γ , линии уровня Φ функции оптимального результата $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ (волновое фронты) с шагом $h_\rho = 0.1$ и сингулярное множество L показаны на рис. 2. Волновые фронты терпят изломы в точках пересечения с биссектрисой $L(M)$. В точках гладкости оптимальная траектория движения системы (1.1) есть отрезок, направленный по нормали к Φ в сторону множества M . В точках \mathbf{x} рассеивающей линии оптимальных траекторий минимум две: это отрезки, лежащие на предельных положениях нормалей к Φ по обе стороны от точки \mathbf{x} . В точке бифуркации биссектрисы оптимальных траекторий три. Например, в \mathbf{x}_0 это отрезки, соединяющие \mathbf{x}_0 с ее проекциями: $\mathbf{y}_1^* \approx (0.24, 0.573)$, $\mathbf{y}_2^* \approx (0.573, 0.24)$, $\mathbf{y}_3^* \approx (0.354, 0.354)$. Несмотря на простую динамику системы, геометрия сингулярного множества являются нетривиальной, каждая из ее компонент связности, в свою очередь, имеет негладкие особенности.

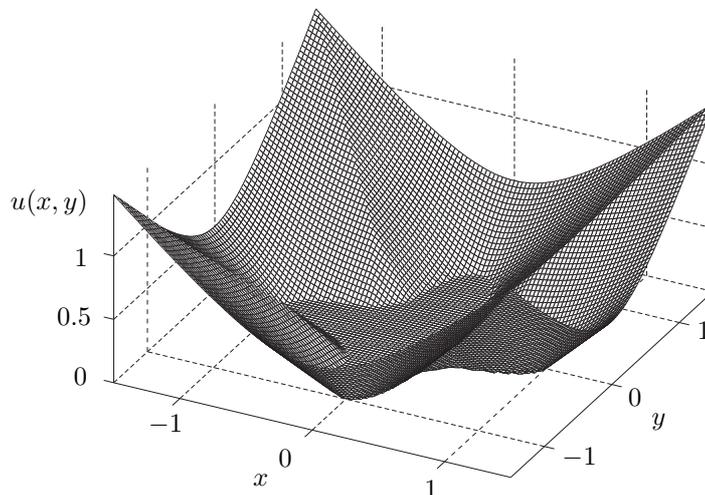
Рис. 3. График аппроксимации функции оптимального результата $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$.

График $\text{gr } u$ функции $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ в виде аппроксимации на прямоугольной сетке с размером клетки 0.03×0.03 с областью определения $\{(x, y) : x \in [-1.5, 1.5], y \in [-1.5, 1.5]\}$ представлен на рис. 3. Область негладкости функции $u(x, y)$ на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$ совпадает с сингулярным множеством $L(M)$. Кроме того, имеется излом графика $\text{gr } u$ на границе Γ множества M . Отметим, что точное решение исследуемой задачи, рассматриваемое на $\mathbb{R}^2 \setminus M$, является супердифференцируемой функцией [25, с. 243].

Построенные в примере линии уровня функции $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ являются подмножествами параллелей [26, с. 49] границы Γ целевого множества M , геометрического места точек, отложенных на нормальных к Γ на равном расстоянии от границы. При этом волновые фронты Φ не включают в себя те подмножества эквидистант, которые образуют каустики [17, с. 66]. Данные конструкции могут использоваться в качестве вспомогательных элементов при решении более сложных задач быстрого действия, в которых вектограмма скоростей также является кругом с центром в начале координат, но его радиус зависит от координаты текущей точки. В этих задачах вместо нормалей к границе множества строятся линии, построенные методами геометрической оптики как путь светового луча в неоднородной среде [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры / пер. с англ. В. И. Аркина, Э. Н. Симаковой; ред. М. И. Зеликин. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. **Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Построение минимаксного решения уравнений типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
3. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрого действия // Прикл. математика и информатика: тр. фак. ВМК Моск. ун-та. 2007. № 27. С. 65–79.
4. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
5. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 307–317.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
7. **Савелов А.А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Либроком, 2010. 294 с.
8. **Успенский А.А.** Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Тр. Ин-та математики и механики, 2015. Т. 21, № 1. С. 250–263.
9. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал: УРСС, 2003. 432 с.
10. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
11. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г.** Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 209–224.
12. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных технологий. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
13. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
14. **Пшеничный К.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
15. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстрого действия // Вестник Удм. ун-та. Сер. Математика, механика, компьютерные науки. Ижевск, 2010. Вып. 3. С. 30–41.
16. **Sedykh V.D.** On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in \mathbb{R}^k // Adv. Stud. Pure Math.: Singularity Theory and Its Applications. 2006. Vol 43. P. 401–419.
17. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
18. **Местецкий Л.М.** Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.

19. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Построение функции оптимального результата в задаче быстрого действия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
20. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. № 4. С. 653–666.
21. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3 (550). С. 27–37.
22. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
23. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрого действия // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.
24. **Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.** MATLAB 7: программирование, численные методы. СПб.: БХВ–Петербург, 2005. 752 с.
25. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
26. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей / пер. с англ. И. Г. Щербак; ред. В. И. Арнольд М.: Мир, 1988. 262 с.

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

Поступила 4.03.2016

Успенский Александр Александрович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru