ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 512.542+519.175

СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. II[1]

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Вторая из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Данная статья посвящена рассмотрению случая примитивных групп с простым цоколем исключительного лиева типа и непараболическим стабилизатором точки.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, почти простая группа, группа исключительного лиева типа, стабилизатор точки, гипотеза Симса.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. II

This is the second in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups. In this paper, the case of primitive groups with simple socle of exceptional Lie type and non-parabolic point stabilizer is considered.

Keywords: finite primitive permutation group, almost simple group, group of exceptional Lie type, stabilizer of a point, Sims conjecture.

MSC: 20B15, 20D06, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-177-187

Введение

Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G. Следуя [4], для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i-ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1},\ (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1},\ (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Нас интересует случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \le |(M_2, M_1)^2|$ (соответствующую мотивировку, связанную с усиленной версией гипотезы Симса, см. в [3; 4]). Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π. Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Отметим, что согласно [4, предложение 1.1(a)] вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ являются p-группами для некоторого простого числа p.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

Цель нашего цикла статей — описать множество П. В первой статье [4] цикла рассмотрены случаи, когда группа G не является почти простой группой и когда группа G имеет простой знакопеременный цоколь. Данная, вторая, статья цикла посвящена рассмотрению случая, когда G — группа с простым цоколем $\mathrm{Soc}(G)$ исключительного лиева типа и $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ *— простая группа исключительного лиева типа и* $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ *— непараболическая подгруппа в* $\mathrm{Soc}(G)$. *Тогда* $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ *и справедливо одно из следующих утверждений*:

(a) $G \cong E_6^\varepsilon(r)$ *или* $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, r *— простое число,* $r \geq 5$, $9|(r - \varepsilon 1)$, $(M_1, M_2)^2 = Z(O_3(M_1))$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(O_3(M_2))$ *— элементарные абелевы группы порядка* 3^3, $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ *— специальные группы порядка* 3^6, *группа* $M_1/O_3(M_1)$ *изоморфна* $SL_3(3)$ *при* $G \cong E_6^\varepsilon(r)$ *и изоморфна* $GL_3(3)$ *при* $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, *группа* $M_1/O_3(M_1)$ *действует точно на* $O_3(M_1)/Z(O_3(M_1))$ *и индуцирует группу* $SL_3(3)$ *на* $Z(O_3(M_1))$, $|Z(O_3(M_1)) \cap Z(O_3(M_2))| = 3^2$ *и* $M_1 \cap M_2 = N_{M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)}(Z(O_3(M_1)) \cap Z(O_3(M_2)))$;

(b) $G \cong \mathrm{Aut}(^3D_4(2))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 3, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : SL_2(3))$, $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 3*-подгруппа из* M_1.

В каждом случае из пп. (a) *и* (b) *тройки* (G, M_1, M_2) *из* Π *существуют и образуют один класс эквивалентности.*

Используемые в дальнейшем терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [7; 9; 13]). Через $E_6^\varepsilon(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и $^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Укажем на опечатку в [3, следствие], повторенную в [4, следствие]: в условии пропущено включение $(M_1)_G \leq M_2$.

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1. *Пусть* $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $L = \mathrm{Soc}(G)$ *— простая неабелева группа и* $M_0 = M_1 \cap L$. *Тогда*

(a) $G = LM_1$;

(b) $F^*(M_0) = O_p(M_0)$.

Доказательство. Утверждение (a) следует из того, что $(M_1)_G = 1$.

Докажем утверждение (b). По [18, лемма 2.1] имеем $M_0 \neq 1$. Предположим, что $O_p(M_0) = 1$. Тогда $O_p(M_1) \cap M_0 = 1$ и, следовательно, $[O_p(M_1), M_0] = 1$. Отсюда по [4, предложенит 1.1(a)] $M_0 \leq C_{M_1}(O_p(M_1)) \leq O_p(M_1)$, что противоречит предположению. Итак, $O_p(M_0) \neq 1$. Так как подгруппа M_0 нормальна в M_1, $[O_p(M_1), M_0] \leq O_p(M_1) \cap M_0 = O_p(M_0)$, т. е. M_0 централизует $O_p(M_1)/O_p(M_0)$. Но тогда согласно [13, теорема 5.3.2] $C_{M_0}(O_p(M_0)$ является нормальной p-подгруппой в M_0 и, значит, лежит в $O_p(M_0)$.

Предложение доказано.

Предложение 1.2 (теорема Жигмонди [19]). *Пусть* q, n *— натуральные числа, большие* 1. *Тогда существует простое число* r, *делящее* $q^n - 1$ *и не делящее* $q^i - 1$ *при* $1 \leq i < n$, *кроме следующих случаев*: $q = 2$ *и* $n = 6$; $q = 2^k - 1$ *для некоторого простого числа* k *и* $n = 2$.

Предложение 1.3 [12]. *Пусть* p, q *— простые числа такие, что* $p^a - q^b = 1$ *для некоторых натуральных чисел* a, b. *Тогда пара* $(p^a,\ q^b)$ *равна* $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ *или* $(2^a,\ q)$.

Предложение 1.4 [10, лемма 3.2]. *Пусть* P *— силовская* 2*-подгруппа в конечной группе* G. *Если элемент* $x \in Z(P)$ *сопряжен в* G *с* $y \in P \setminus Z(P)$, *то найдутся элементы* $x_1 \in Z(P) \cap x^G$, $y_1 \in P \setminus Z(P)$ *и* $z \in N_G(C_P(y_1))$ *такие, что* $y_1^z = x_1$.

2. Доказательство теоремы

Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ —простая группа исключительного лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$, где q — степень простого числа r, $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$ и $M_2 = M_1^g = gM_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Положим для краткости $L = \mathrm{Soc}(G)$, $M = M_1$, $M_0 = M \cap L$, $K_1 = (M_1, M_2)^2$ и $K_2 = (M_2, M_1)^2$. Ввиду [4, предложение 1.1(а,б)] и предложения 1.1 подгруппа M есть p-локальная максимальная подгруппа в G с $F^*(M) = O_p(M)$ для некоторого простого числа p (отличного от r), $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, $G = ML$, $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \cap O_p((M_2, M_1)^1) \leq O_p(M)$ и $K_1 \neq K_2$. Поскольку $G = ML$, можно считать, что $g \in L$. Пусть E — минимальная неединичная нормальная подгруппа в M. Тогда $M = N_G(E)$ и E — элементарная абелева p-группа.

Лемма 2.1. *Выполняется одно из следующих утверждений*:

(i) *подгруппы K_1 и K_2 имеют нетривиальные пересечения с L, в частности можно считать, что $E \leq K_1 \cap L$;*

(ii) $G \cong \mathrm{Aut}(^3D_4(2))$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : SL_2(3))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что п. (i) неверен, и пусть $K_1 \cap L = 1$ (случай $K_2 \cap L = 1$ рассматривается аналогично). Поскольку K_1 — неединичная нормальная p-подгруппа в M, можно считать, что $E \leq K_1$. Следовательно, $M_0 = C_L(E)$. Ввиду минимальности E, [14, 2.5.12] и п. (a) предложения 1.1 подгруппа E порождается некоторым элементом e. Элемент e индуцирует на L внешний автоморфизм порядка p. Согласно [14, 2.5.12, 4.5.1, 4.9.1] этот автоморфизм внутренне-диагональный, полевой, графовый или графово-полевой, причем либо $F^*(M_0) \neq O_p(M_0)$, что противоречит п. (b) предложения 1.1, либо $G \cong \mathrm{Aut}(Sz(32))$ и $M \cong 5 \times Sz(2)$, что ввиду [7] противоречит максимальности подгруппы M в G, либо выполняется п. (ii). Лемма доказана.

Согласно [14] существуют простая присоединенная линейная алгебраическая группа X над алгебраически замкнутым полем характеристики r и такой сюръективный эндоморфизм σ линейной алгебраической группы X, что $L = O^{r'}(X_\sigma)$, где $X_\sigma = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\} \cong \mathrm{Inndiag}(L)$. Мы будем отождествлять группу X_σ с подгруппой $\mathrm{Inndiag}(L)$ из $\mathrm{Aut}(L)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(L)$ порождается подгруппой X_σ, а также полевыми и графовыми автоморфизмами группы L, причем все автоморфизмы группы L продолжаются до автоморфизмов абстрактной группы X, коммутирующих с σ (см. [14]). Если T — σ-допустимый максимальный тор группы X, то $T \cap X_\sigma$ (соответственно $T \cap L$) называется максимальным тором группы X_σ (соответственно L).

С л у ч а й 1. M не нормализует нетривиальной подгруппы никакого максимального тора группы X_σ.

Ввиду [11, теорема 1] и леммы 2.1 выполняется один из следующих подслучаев:

(1a) $p = 3$, $G = L \cong E_6^\varepsilon(r)$ или $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $r \geq 5$, $3 | (r - \varepsilon 1)$, $|E| = 3^3$, $C_L(E)$ — специальная группа порядка 3^6 с центром E и $N_L(E)/C_L(E) \cong SL_3(3)$;

(1b) $p = 2$, $G = L \cong E_8(r)$, $r \geq 3$, $|E| = 2^5$, $C_G(E)$ — специальная группа порядка 2^{15} с центром E и $N_G(E)/C_G(E) \cong SL_5(2)$.

Согласно [11, теорема 1] в каждом из этих подслучаев существует точно один X_σ-класс указанных подгрупп E, который в подслучае (1a) является объединением трех L-классов. Кроме того, согласно [11] имеем $E = Z(O_p(M)) \leq K_1 \leq L$ и $M/O_p(M)$ действует неприводимо на E и на $O_p(M)/E$.

Лемма 2.2. $E = K_1 < O_p((M_1, M_2)^1) = O_p(M_1)$ *и* $E^g = K_2 < O_p((M_2, M_1)^1) = O_p(M_2)$, *в частности, подгруппа E^g нормальна в $O_p(M)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $K_1 < K_2$, то $K_2 = O_p(M_2) = O_p(M_1)$, что невозможно. Поэтому $K_1 < K_1K_2$. Поскольку $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \cap O_p((M_2, M_1)^1) \leq O_p(M)$ и $M/O_p(M)$ действует неприводимо на E и на $O_p(M)/E$, отсюда следуют утверждения леммы. Лемма доказана.

Пусть выполняется подслучай (1а). Зафиксируем неединичный элемент e из E. Положим $C = C_L(e)$ и $N = N_L(\langle e\rangle)$. Применяя результаты из [14, гл. 4] и рассуждения из доказательства леммы 2.11 из [11], получаем следующие необходимые нам факты о строении группы N. Имеем $F^*(C) = L_1 \circ L_2 \circ L_3$, где $L_i \cong SL^{\varepsilon}_3(r)$, $Z(F^*(C)) = \langle e\rangle$, $|N : C|=2$, N действует транзитивно на множестве $\{L_1, L_2, L_3\}$ с ядром C_0 таким, что $F^*(C) < C_0 < C$, $C/F^*(C)$ — элементарная абелева группа порядка 9, $N/C_0 \cong S_3$ и $C_0/L_iL_j \cong PGL^{\varepsilon}_3(r)$ при $i \neq j$. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ пусть далее a_i и b_i — элементы порядка 3 из $L_i \setminus \langle e\rangle$ такие, что $[a_i, b_i] = e$. Тогда можно считать, что $E = \langle e, f, h\rangle$, где $f = a_1a_2a_3$ и $h = b_1b_2b_3$. Положим $S = \langle a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq 3\rangle$. Тогда S — экстраспециальная группа порядка 3^7, нормализующая E, $C_S(E) = E\langle a_1a_2^{-1}, b_1b_2^{-1}\rangle$, $C_L(E) = C_S(E)\langle t\rangle$, где $t \in C_L(E) \setminus C_0$, и экспонента группы $C_L(E)$ равна 3. Кроме того, элементы порядка 3 из $L_iL_j \setminus \langle e\rangle$ при $i \neq j$ не сопряжены в $\mathrm{Aut}(L)$ с элементами из E.

Поскольку $E \neq E^g$, EE^g — элементарная абелева 3-группа и 3-ранг группы $O_3(M)$ равен 4, то $|E \cap E^g| = 3^2$.

Имеем $E \cap E^g \subseteq E$ и $g^{-1}(E \cap E^g)g \subseteq E$. Так как подгруппа M действует транзитивно на множестве подгрупп порядка 9 из E, можно считать, что элемент g нормализует подгруппу $E\cap E^g$ и $E\cap E^g = \langle e, f\rangle$. Далее, так как $N_M(E\cap E^g)/C_M(E\cap E^g) \cong GL_2(3)$, имеем $N_L(E\cap E^g) = C_L(E\cap E^g)N_M(E\cap E^g)$, поэтому можно считать, что элемент g централизует подгруппу $E\cap E^g$. Наконец, поскольку $C = C_0\langle t\rangle$, можно считать, что $g \in C_0$.

Положим $\overline{N} = N/\langle e\rangle$. Тогда $F^*(\overline{C}) = \overline{L_1}\times\overline{L_2}\times\overline{L_3}$. Поскольку EE^g — элементарная абелева 3-подгруппа из $O_3(M)\cap F^*(C)$, $\overline{E}\,\overline{E}^{\overline{g}}$ — элементарная абелева 3-подгруппа из $F^*(\overline{C})$. Проекция этой подгруппы на $\overline{L_i}$ есть элементарная абелева 3-подгруппа, содержащая $\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle$ и, значит, совпадающая с $\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle$, поскольку 3-ранг группы $\overline{L_i} \cong L^{\varepsilon}_3(r)$ равен 2 (см. [14, теорема 4.10.2]). Поэтому для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ элемент $\overline{g}$ нормализует подгруппу $\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle$ и централизует элемент $\overline{a_i}$. В частности, элемент $\overline{g}$ нормализует подгруппу $\overline{S}$.

Предположим, что 9 не делит $r - \varepsilon 1$. Тогда согласно [8, табл. 8.3, 8.5] нормализатор $N_{\overline{L_i}}(\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle)$ изоморфен группе Фробениуса вида $3^2 : Q_8$ и, следовательно, $\overline{g} \notin F^*(\overline{C})$ и g является 3-элементом. Но $|L|_3 = |M|_3$, поэтому можно считать, что $g \in M$; противоречие.

Итак, 9 делит $r-\varepsilon 1$. Согласно [8, табл. 8.3, 8.5] нормализатор $N_{\overline{L_i}}(\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle)$ изоморфен группе вида $3^2 : SL_2(3)$, коммутант которой есть группа Фробениуса вида $3^2 : Q_8$, и $\overline{g} \in F^*(\overline{C})$. Поэтому $\overline{g} = \overline{g_1}\,\overline{g_2}\,\overline{g_3}$, где $\overline{g_i}$ является 3-элементом из $N_{\overline{L_i}}(\langle\overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle)$. Подгруппа $\langle t\rangle$ порядка 3 централизует E и действует транзитивно на множестве компонент группы $F^*(C)$. Поэтому можно считать, что $\overline{a_1}^{\overline{t}} = \overline{a_2}$, $\overline{a_2}^{\overline{t}} = \overline{a_3}$, $\overline{a_3}^{\overline{t}} = \overline{a_1}$, $\overline{b_1}^{\overline{t}} = \overline{b_2}$, $\overline{b_2}^{\overline{t}} = \overline{b_3}$, $\overline{b_3}^{\overline{t}} = \overline{b_1}$ и, следовательно, $\langle\overline{t}\rangle$ действует транзитивно на множестве $\{N_{\overline{L_1}}(\langle\overline{a_1}, \overline{b_1}\rangle), N_{\overline{L_2}}(\langle\overline{a_2}, \overline{b_2}\rangle), N_{\overline{L_3}}(\langle\overline{a_3}, \overline{b_3}\rangle)\}$. Рассмотрим группу $\overline{R} = \langle N_{\overline{L_1}}(\langle\overline{a_1}, \overline{b_1}\rangle), \overline{t}\rangle$, изоморфную сплетению $(3^2 : SL_2(3)) \wr \mathbb{Z}_3$. Тогда

$$\overline{g} \in C_{\overline{R}}(\overline{f}) = \Big(\prod_{i=1}^{3}(\langle\overline{a_i}\rangle \times \langle\overline{b_i}\rangle) \leftthreetimes \langle\overline{c_i}\rangle\Big) \leftthreetimes \langle\overline{t}\rangle,$$

где для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ имеем $|\overline{c_i}| = 3$, $\overline{a_i}^{\overline{c_i}} = \overline{a_i}$ и $\overline{b_i}^{\overline{c_i}} = \overline{a_i}\overline{b_i}$. Можно считать, что $\overline{c_1}^{\overline{t}} = \overline{c_2}$, $\overline{c_2}^{\overline{t}} = \overline{c_3}$, $\overline{c_3}^{\overline{t}} = \overline{c_1}$ и $\overline{g_i} = \overline{c_i}^{k_i}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ и $k_i \in \{0, 1, -1\}$.

Легко проверить, что при действии группы $\langle\overline{t}\rangle$ на множестве подгрупп порядка 3 из $\langle\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}\rangle$ имеется точно одна одноэлементная орбита $\langle\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\rangle$ и четыре орбиты длины 3 с представителями $\langle\overline{c_1}\rangle$, $\langle\overline{c_1}\,\overline{c_2}\rangle$, $\langle\overline{c_1}\,\overline{c_2}^{-1}\rangle$ и $\langle\overline{c_1}^{-1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\rangle$.

Если $\langle\overline{g}\rangle$ принадлежит одноэлементной орбите, то $E = E^g$; противоречие. Поэтому $\langle\overline{g}\rangle$ принадлежит одной из орбит длины 3. Поскольку ввиду леммы 2.2 элемент t нормализует подгруппу E^g, элемент $\overline{t}$ нормализует подгруппу $\overline{E}^{\overline{g}}$. Поскольку элемент t централизует подгруппу E, справедливо равенство $\overline{E}^{\overline{g}} = \overline{E}^{\overline{x}}$ для любого элемента $\overline{x}$, сопряженного с $\overline{g}$ относительно $\langle\overline{t}\rangle$.

Пусть $\overline{g} = \overline{c_1}^k$, где $k \in \{1, -1\}$. Тогда $\overline{E}^{\overline{g}} = \langle\overline{f}, \overline{h}\,\overline{a_1}^k\rangle = \langle\overline{f}, \overline{h}\,\overline{a_2}^k\rangle$ и, следовательно, $\overline{E}^{\overline{g}}$ содержит элемент $(\overline{a_1}^{-1}\overline{a_2})^k$, не сопряженный с элементами из $\overline{E}$; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $\overline{g} \in \langle\overline{c_1}\,\overline{c_2}\rangle$ или $\overline{g} \in \langle\overline{c_1}^{-1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\rangle$.

Итак, можно считать, что $\overline{g} = (\overline{c_1}\,\overline{c_2}^{-1})^k$, где $k \in \{1, -1\}$.

Обратно, пусть $\overline{g} = (\overline{c_1}\,\overline{c_2}^{-1})^k$, где $k \in \{1,-1\}$. Тогда легко проверяется, что $E^g = \langle e, f, h(a_1a_2^{-1})^k\rangle$, откуда следует, что t нормализует подгруппу E^g и g нормализует силовскую 3-подгруппу из M, являющуюся полным прообразом в C подгруппы $\langle \overline{S}, \overline{t}, \overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\rangle$. Поэтому $(G, M_1, M_1^g) \in \Pi$.

Пусть $L\langle u\rangle$ — полупрямое произведение группы L на группу $\langle u\rangle$, где u — инволюция, индуцирующая на L внешний автоморфизм группы L. Ввиду [11, теорема 1] можно считать, что u нормализует M_0. Если u централизует группу $O_3(M_0)/E$, то согласно [13, теорема 5.1.4] u централизует $O_3(M_0)$, а значит, централизует M_0, что противоречит [14, теорема 4.5.1, предложение 4.9.1]. Поэтому $C_{M_0\langle u\rangle/E}(O_3(M_0)/E) = O_3(M_0)/E$ и $M_0\langle u\rangle/O_3(M_0) \cong GL_3(3)$, в силу чего можно считать, что u инвертирует группу $O_3(M_0)/E$. Группа $O_3(M_0)$ неабелева, поэтому $C_E(u) \neq 1$. Отсюда, поскольку $C_{M_0}(u)$ действует неприводимо на E, получаем, что u централизует E и, следовательно, $N_{L\langle u\rangle}(E)/C_{L\langle u\rangle}(E) \cong SL_3(3)$. Покажем, что u переставляет подгруппы E^g и $E^{g^{-1}}$ и, следовательно, тройки (G, M, M^g) и $(G, M, M^{g^{-1}})$ эквивалентны, а $M \cap M^g = M_0 \cap M_0^g$. Поскольку u централизует E и инвертирует $O_3(M_0)/E$, имеем $(h(a_1a_2^{-1}))^u = h(a_2a_1^{-1}h^\alpha f^\beta e^\gamma)$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, -1\}$. Если $\alpha = -1$, то элемент $(h(a_1a_2^{-1}))^u$ принадлежит $\langle a_i, a_j, e\rangle$ для некоторых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, что невозможно (см. начало рассмотрения подслучая (1a)). Если $\alpha = 1$, то u нормализует подгруппу E^g и $|C_{E^g}(u)| = 9$, что невозможно ввиду $N_{L\langle u\rangle}(E^g)/C_{L\langle u\rangle}(E^g) \cong SL_3(3)$. Поэтому $\alpha = 0$ и утверждение доказано.

Найдем пересечение $M \cap M^g = M_0 \cap M_0^g$. Поскольку $M_0/C_{M_0}(E) \cong SL_3(3)$ и $C_{M_0}(E) = O_3(M)$, в M_0 существует инволюция s, централизующая элемент f и инвертирующая элементы e и h. Поэтому $N = C\langle s\rangle = C_0\langle s, t\rangle$. Можно считать, что инволюция $\overline{s}$ нормализует подгруппу $\overline{L_3}$ и переставляет подгруппы $\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$. Поскольку инволюция $\overline{s}$ централизует $\overline{f} = \overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}$, она переставляет элементы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ (и централизует элемент $\overline{a_3}$). Отсюда следует, что s нормализует подгруппы E, E^g и $E^{g^{-1}}$. Далее, группа $EE^g = EE^gE^{g^{-1}}$ порядка 3^4 имеет точно 4 содержащие $\langle e, f\rangle$ подгруппы порядка 3^3, а именно E, E^g, $E^{g^{-1}}$ и не сопряженную с ними в G подгруппу $\langle e, f, a_1a_2^{-1}\rangle$ (см. начало рассмотрения случая (1a)). Поскольку $[EE^g, O_3(M)] = \langle e, f\rangle$, имеем $N_{M_0}(EE^g) \leq N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$. Но из действия M_0 на $O_3(M)/E$ следует, что $N_{M_0}(EE^g)$ — максимальная подгруппа в M_0. Поэтому $N_{M_0}(EE^g) = N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$. Таким образом, $N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$ стабилизирует множество $\{E, E^g, E^{g^{-1}}\}$ и, следовательно, множество $\{E^g, E^{g^{-1}}\}$. Но $N_{M_0}(\langle e, f\rangle)/O_3(M) \cong GL_2(3)$. Поэтому либо $N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$ нормализует подгруппу E^g и тогда $M_0 \cap M_0^g = N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$, либо любой элемент x из $N_{M_0}(\langle e, f\rangle)$ со свойством $xO_3(M) \in GL_2(3) \setminus SL_2(3)$ переставляет E^g и $E^{g^{-1}}$. Но в последнем случае элемент s переставляет E^g и $E^{g^{-1}}$, что не так.

Таким образом, в подслучае (1a) выполняются п. (a) и для него заключительное утверждение теоремы.

Пусть выполняется подслучай (1b). Согласно [11] мы можем рассматривать $E = \langle e_1, \dots, e_5\rangle$ как естественный $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуль, а $O_2(M)/E$ как внешний квадрат $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуля $E^* = \langle e_1^*, \dots, e_5^*\rangle$, изоморфного модулю E или дуальному к E модулю. Для произвольного $w \in O_2(M)$ через $\vec{w}$ будем обозначать элемент $wE \in O_2(M)/E$, рассматриваемый как элемент $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуля $E^* \wedge E^*$. (Под E и $O_2(M)/E$ мы будем в зависимости от контекста понимать группы или $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модули.)

Покажем, прежде всего, что $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуль E^* изоморфен дуальному к E модулю. Предположим, что, напротив, $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуль E^* изоморфен E и, следовательно, $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуль $O_2(M)/E$ есть внешний квадрат $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуля E. Тогда для произвольного неединичного элемента группы $O_2(M)/E$ его централизатор в $M/O_2(M)$ не централизует неединичных элементов группы E. Но это противоречит тому, что группа $O_2(M)$ содержит элементы порядка 4.

Обозначим через τ корреляцию множества подпространств $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуля E на множество подпространств $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуля E^*, коммутирующую с действием $M/O_2(M)$. Не теряя общности, будем предполагать, что $\langle e_i^*\rangle = \tau(\langle e_j \mid j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\}\rangle)$ для всех $1 \leq i \leq 5$.

Группа $M/O_2(M)$ имеет на множестве ненулевых элементов $O_2(M)/E = E^* \wedge E^*$ две орбиты: одну — из 155 элементов с представителем $e_1^* \wedge e_2^*$ и другую — из 868 элементов с представителем $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ (см. [15, лемма 2.5]). Ясно, что элементы второй орбиты — это в точности элементы вида $\vec{w}$, где w — элемент порядка 4 группы $O_2(M)$ (действительно, централизатор в группе $M/O_2(M)$ элемента $e_1^* \wedge e_2^*$ не оставляет на месте 4-мерных подпространств пространства E^*, а следовательно, и одномерных подпространств пространства E). Отсюда несложно получается

Лемма 2.3. *Если для элементов x и y группы $O_2(M)$ имеем $\vec{x} = u_1 \wedge u_2$ и $\vec{y} = v_1 \wedge v_2$, где $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E^*$, то в случае $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle) < 4$ справедливо $[x, y] = (xy)^2 = 1$, а в случае $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle) = 4$ коммутатор $[x, y]$ (совпадающий с квадратом любого элемента w группы $O_2(M)$, для которого $\vec{w} = u_1 \wedge u_2 + v_1 \wedge v_2$) есть такой ненулевой элемент E, что натянутое на него одномерное подпространство при корреляции τ отображается в $\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В первом случае централизатор в группе $M/O_2(M)$ подпространства $\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle$ не оставляет на месте 4-мерных подпространств пространства E^* и, следовательно, ненулевых векторов пространства E, что влечет $[x, y] = 1$, а во втором случае оставляет на месте единственное 4-мерное подпространство пространства E^*, а именно $\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle$. Если во втором случае также $[x, y] = 1$, то получаем, что $[x, y] = 1$ для всех элементов x и y группы $O_2(M)$, у которых $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежат $\{u \wedge v \mid u, v \in E^*\}$. Противоречие с тем, что множество элементов w группы $O_2(M)$, для которых $\vec{w} \in \{u \wedge \mid u, v \in E^*\}$, порождает неабелеву группу $O_2(M)$. Лемма доказана.

Так как E — естественный $\mathbb{F}_2M/O_2(M)$-модуль, то, не теряя общности (домножая в случае необходимости элемент g справа на подходящий элемент группы M; ср. рассуждения в случае (1a)), будем предполагать, что $g \in C_G(E \cap E^g)$. Далее, так как (в силу $E^g \leq O_2(M) = C_G(E)$) EE^g — элементарная абелева 2-группа, то с учетом предшествующего лемме 2.3 наблюдения для любого элемента $x \in EE^g$ элемент $\vec{x}$ имеет вид $u_1 \wedge u_2$, где $u_1, u_2 \in E^*$. Если x — элемент из $E^g \setminus E$, то отсюда и из леммы 2.3 следует, что $|E \cap E^g| \geq |[x, O_2(M)]| \geq 2^3$.

Пусть Z — произвольная подгруппа порядка 2^3 группы $E \cap E^g$. Тогда согласно [11] найдется такая содержащая E подгруппа H группы G, что $Z(H)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4, $Z = E \cap Z(H)$, H/Z есть центральное произведение групп $J_1, \dots, J_8$, изоморфных $SL_2(r)$, $N_G(H) = N_G(Z)$ индуцирует на множестве $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу подстановок $AGL_3(2)$ в естественном представлении, причем $C_G(E) = O_2(M)$ индуцирует ее регулярную нормальную элементарную абелеву 2-подгруппу, и (согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро действия $N_G(H)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$ имеет вид HK, где K — подгруппа Картана группы G, индуцирующая внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i, $1 \leq i \leq 8$.

Положим $\overline{N_G(Z)} = N_G(Z)/Z$. Из регулярности группы, индуцированной $C_G(E)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$, следует существование таких элементов $\overline{a_1}, \overline{b_1}$ группы J_1, что $(\overline{a_1})^2 = (\overline{b_1})^2 = [\overline{a_1}, \overline{b_1}]$ — инволюция из центра группы $\overline{H}$ и $\overline{E} = \langle \overline{a_1}\,\overline{a_2} \dots \overline{a_8}, \overline{b_1}\,\overline{b_2} \dots \overline{b_8}\rangle$, где $\overline{a_i}$ и $\overline{b_i}$ — образы соответственно $\overline{a_1}$ и $\overline{b_1}$ под действием элемента из $C_G(E)$, отображающего J_1 в J_i, для всех $2 \leq i \leq 8$.

Так как группа $N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу $AGL_3(2)$, а ядро действия $N_G(H)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$ не имеет секций, изоморфных $SL_3(2)$, то произвольная подгруппа группы $N_G(H)$, имеющая секцию, изоморфную $SL_3(2)$, индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу, содержащую подгруппу, изоморфную $SL_3(2)$. Поскольку группа $N_G(H) = N_G(Z)$ индуцирует на Z группу $SL_3(2)$, отсюда следует, что содержащая $C_G(E)$ группа $C_G(Z)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ ту же, что $C_G(E)$, регулярную элементарную абелеву 2-группу.

Поскольку $g \in C_G(E \cap E^g) \leq C_G(Z)$, отсюда вытекает, что, не теряя общности (домножая в случае необходимости элемент g на подходящий элемент группы $C_G(Z)$), можно предполагать тривиальность действия элемента g на $\{J_1, \dots, J_8\}$. Как следствие, элемент g индуцирует на каждой из групп J_i, $1 \leq i \leq 8$, внутренне-диагональный автоморфизм. Поскольку EE^g — элементарная абелева 2-группа (в силу $E^g \leq O_2(M) = C_G(E)$, см. лемму 2.2), отсюда следует, что для каждого $1 \leq i \leq 8$ автоморфизм группы J_i, индуцируемый g, нормализует подгруппу $\langle \overline{a_i}, \overline{b_i}\rangle$.

Так как $C_G(E) = O_2(M)$, то $C_G(E)$ нормализует E^g (см. лемму 2.2) и, следовательно, централизует некоторый неединичный элемент $\overline{x}$ группы $\overline{E^g}$. Пусть $\overline{x} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\ldots\overline{x_8}$, где $\overline{x_i} \in J_i$ и, следовательно, $\overline{x_i} \in \{\overline{1}, \overline{a_i}, \overline{b_i}, \overline{a_i}\overline{b_i}\}$ для каждого $1 \le i \le 8$. Не теряя общности, будем считать, что $\overline{x_1} = \overline{a_1}$. Тогда, учитывая, что $C_G(E)$ централизует элемент $\overline{x}$ группы $\overline{H}$, получаем (см. выше), что $\overline{x_i} = \overline{a_i}$ для всех $1 \le i \le 8$ и, следовательно, $\overline{x} = \overline{a_1}\,\overline{a_2}\ldots\overline{a_8} \in \overline{E}$. Таким образом, $|E \cap E^g| = 2^4$. Если бы $C_G(E)$ централизовала еще и другой (помимо $\overline{x}$) неединичный элемент группы $\overline{E^g}$, то, рассуждая аналогично, мы бы получили противоречие с $E \ne E^g$. Следовательно, подгруппа C группы $C_G(E)$, состоящая из ее элементов, централизующих $\overline{E^g}$, имеет в $C_G(E)$ индекс 2. При этом C не может индуцировать на $\{J_1, \ldots, J_8\}$ транзитивную группу (поскольку в противном случае мы могли бы применить к C рассуждения, примененные ранее к $C_G(E)$, и получить противоречие с $E \ne E^g$). Таким образом, подгруппа C группы $N_G(Z) = N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \ldots, J_8\}$ подгруппу порядка 4 нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы группы $AGL_3(2)$, индуцируемой $N_G(Z)$. Заметим, что при этом C — нормальная подгруппа группы $N_G(E) \cap N_G(E^g) \cap N_G(Z) = M \cap M^g \cap N_G(Z)$.

Покажем, что

$$M \cap M^g = N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g). \tag{2.1}$$

Ясно, что $M \cap M^g \le N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)$. Предположим, что $M \cap M^g < N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)$, и пусть $h \in (N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)) \setminus (M \cap M^g)$. Тогда $EE^g = E \cup E^g \cup (E^g)^h$, что противоречит утверждению (iv) из [11, шаг 7]. Равенство (2.1) доказано.

Пусть, без потери общности, $E \cap E^g = \langle e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$, и пусть $EE^g/E = \langle u_1 \wedge u_2\rangle$, где $u_1, u_2 \in E^*$. Если $e_1^* \notin \langle u_1, u_2\rangle$, то найдутся такие $v_1, v_2 \in E^*$, что $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle) = 4$ и $e_1^* \notin \langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle$. Но тогда для $y \in O_2(M)$ такого, что $\vec{y} = v_1 \wedge v_2$, согласно лемме 2.3 имеем $[y, E^g] = \tau^{-1}(\langle u_1, u_2, v_1, v_2\rangle) \not\le \langle e_2, e_3, e_4, e_5\rangle = E \cap E^g$, что противоречит $y \in O_2(M) \le N_M(E^g)$. Следовательно, не теряя общности, можно предполагать, что $u_1 = e_1^*$, $u_2 = e_2^*$. Теперь

$$N_M(EE^g) = N_M(\tau^{-1}(\langle e_1^*, e_2^*\rangle)) = N_M(\langle e_3, e_4, e_5\rangle). \tag{2.2}$$

Так как в наших предшествующих рассуждениях подгруппа Z была произвольной подгруппой порядка 2^3 группы $E \cap E^g$, то мы можем выбрать в качестве Z группу $\langle e_3, e_4, e_5\rangle$. Но тогда с учетом (2.1) и (2.2) имеем

$$M \cap M^g \cap N_G(Z) = N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g) \cap N_G(Z)$$

$$= N_M(Z) \cap N_M(E \cap E^g) = N_M(\langle e_3, e_4, e_5\rangle) \cap N_M(\langle e_2, e_3, e_4, e_5\rangle).$$

Таким образом, подгруппа $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ группы $N_G(Z) = N_G(H)$ имеет секцию, изоморфную $SL_3(2)$. Как было отмечено ранее, отсюда следует, что $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ индуцирует на $\{J_1, \ldots, J_8\}$ подгруппу группы $AGL_3(2)$ (индуцируемой $N_G(Z)$), содержащую подгруппу, изоморфную $SL_3(2)$. В то же время, как было показано выше, нормализуемая $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ подгруппа C группы $N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \ldots, J_8\}$ подгруппу порядка 4 нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы группы $AGL_3(2)$, индуцируемой $N_G(Z)$. Полученное противоречие завершает рассмотрение подслучая (1b).

Таким образом, можно считать, что выполнен

С л у ч а й 2. E содержится в некотором максимальном торе группы X_σ.

Согласно [17] в этом случае существует σ-допустимая замкнутая связная редуктивная подгруппа D группы X, содержащая некоторый σ-допустимый максимальный тор T группы X, для которой $M = N_G(D_\sigma) = N_G(D)$. Будем считать подгруппу D максимальной с этими свойствами. Выполняется один из следующих подслучаев:

(2a) $T < D$;

(2b) $T = D$.

Пусть выполняется подслучай (2a). Тогда ввиду [17, теорема, табл. 5.1; 7] и п. (b) предложения 1.1 выполняется один из следующих подслучаев:

(i) $L \cong G_2(3)$, $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2$;
(ii) $L \cong {}^2F_4(2)$, $M_0 \cong 3_+^{1+2} : 8$;
(iii) $L \cong {}^3D_4(2)$, $M_0 \cong SU_3(2).3.2 \cong 3_+^{1+2}.2S_4$;
(iv) $L \cong F_4(2)$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2)).S_3$;
(v) $L \cong {}^2E_6(2)$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)).S_3$;
(vi) $L \cong E_8(2)$, $M = M_0 \cong 3^2.(U_3(2))^4.3^2.GL_2(3)$;
(vii) $L \cong E_7(3)$, $M_0 \cong 2^3.(L_2(3)^7).2^3.L_3(2)$;
(viii) $G \cong E_8(3)$, $M = M_0 \cong 2^4.(L_2(3)^8).2^4.AGL_3(2)$.

По предложению 1.1 имеем $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \lhd M$ и $1 \neq K_i \lhd O_p((M_1, M_2)^1)$ для $i = 1, 2$. Ввиду леммы 2.1 для каждого $i \in \{1, 2\}$ подгруппа $K_i \cap L$ является неединичной нормальной в M_i подгруппой из $O_3(M_i)$. Поэтому можно считать, что $G = L$. Положим $Z = Z(O_p(M))$.

Пусть выполняется подслучай (i). Тогда $M = (L_1 \circ L_2) \leftthreetimes \langle t \rangle$, где L_1 и L_2 — нормальные в M подгруппы, изоморфные $SL_2(3) \cong Q_8 : 3$, $|t| = 2$ и $O_2(M) \cong 2_+^{1+4}$. Легко проверить, что неединичная нормальная в M подгруппа из $O_2(M)$ совпадает с Z, $O_2(L_1)$, $O_2(L_2)$ или $O_2(M)$. Поскольку $K_1 \neq K_2$, $O_2((M_1, M_2)^1) \lhd M$ и $K_2 \lhd M_2$, отсюда следует, что $O_2((M_1, M_2)^1 = O_2(M)$ и $K_2 \cong Q_8$. Но тогда $[K_2, K_2] = Z$, что невозможно.

Пусть выполняется подслучай (ii) или (iii). Тогда $O_p(M_i) \cong 3_+^{1+2}$ и M_i действует неприводимо на $O_3(M_i)/Z(O_3(M_i))$ для $i = 1, 2$. Поскольку $O_3(M_i) \neq K_i \lhd M_i$, отсюда следует, что $|K_i| = 3$ и $O_3((M_1, M_2)^1 = O_3(M)$. Но тогда подгруппа K_2 нормальна в $O_3(M)$ и, значит, совпадает с $K_1 = Z$, что невозможно.

Пусть выполняется один из подслучаев (iv)–(vi). Тогда ввиду [14, теорема 4.7.3, табл. 4.7.3A] и [7] имеем $M = N_L(Z)$, где $|t| = 3$, $O^{2'}(C_L(Z)) = L_1 \circ \ldots \circ L_n)$, где $C_L(L_1 \ldots L_n) = Z$, $L_i \cong SU_3(2) \cong 3_+^{1+2} : Q_8$ для $1 \leq i \leq n$, $C_L(L_1 \ldots L_n) = Z$, Z является единственной минимальной нормальной подгруппой в M, число n равно 2, 3 или 4 и число $|Z|$ равно 3, 3 или 9 в подслучаях (iv),(v) или (vi) соответственно. Легко проверить, что нецентральная нормальная в $L_1 \ldots L_n$ подгруппа из $O_3(M)$ совпадает с $O_3(H)$, где H — любое произведение подгрупп из множества $\{L_1, \ldots, L_n\}$. Поскольку $Z \leq K_1 < K_1K_2 \leq O_3((M_1, M_2)^1) \lhd M$ и $Z^g \leq K_2 \lhd O_3((M_1, M_2)^1)$, подгруппа K_2 равна $O_3(H)$, где H — некоторое неабелево произведение подгрупп из множества $\{L_1, \ldots, L_n\}$. Но тогда $1 \neq [K_2, K_2] \leq Z$, что невозможно.

Пусть выполняется подслучай (vii). Легко проверить, что $|M|_2 = |G|_2$, поэтому ввиду [16] подгруппа M имеет нормальную подгруппу F такую, что F есть центральное произведение (фундаментальных) подгрупп $J_1, \ldots, J_7$, изоморфных $SL_2(3)$, $Z := Z(F)$ — элементарная абелева группа порядка 2^3, M индуцирует на множестве $\{J_1, \ldots, J_7\}$ группу подстановок $GL_3(2)$ в естественном представлении и согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро $C_G(Z(F))$ действия группы M на $\{J_1, \ldots, J_7\}$ имеет вид FH, где H — подгруппа Картана группы G, индуцирующая внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i для $1 \leq i \leq 7$, и подгруппа $O_2(M) = O_2(F)$ слабо замкнута в (любой) силовской 2-подгруппе из M относительно G. Поскольку центры подгрупп $J_1, \ldots, J_7$ попарно различны (см. [5, с. 401]), подгруппа M действует неприводимо на Z. Ясно также, что M действует неприводимо на $O_2(M)/Z$. Предположим, что $O_2(M) \leq M_1 \cap M_2$. Тогда, поскольку $O_2(M)^g = O_2(M_2)$, подгруппа $O_2(M_1)O_2(M_2)$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе P из M_2. Поскольку подгруппа $O_2(M_2)$ слабо замкнута в P относительно G, получаем, что $O_2(M_1) = g^{-1}O_2(M_2)g = O_2(M_2)$; противоречие. Таким образом, $O_2(M)$ не содержится в $M_1 \cap M_2$ и, следовательно, $K_1K_2 \leq O_2((M_1, M_2)^1) \leq Z$, откуда $K_1 = K_2 = Z$; противоречие.

Пусть выполняется подслучай (viii). Легко проверить, что $|M|_2 = |G|_2$, поэтому ввиду [16] подгруппа M имеет нормальную подгруппу F такую, что F есть центральное произведение (фундаментальных) подгрупп $J_1, \ldots, J_8$, изоморфных $SL_2(3)$, $Z := Z(F)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4, M индуцирует на множестве $\{J_1, \ldots, J_7\}$ группу подстановок $AGL_3(2)$ в естественном представлении и согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро $C_G(Z(F))$ действия группы M на $\{J_1, \ldots, J_7\}$ имеет вид FH, где H — подгруппа Картана группы G, индуцирующая внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i для $1 \leq i \leq 8$, и подгруппа $O_2(M) = O_2(F)$ слабо замкнута в (любой) силовской 2–подгруппе из M относительно G. Из доказательства леммы 2.7 из [11] следует, что Z содержит единственную минимальную нормальную в M подгруппу E порядка 8, причем никакая инволюция из E не сопряжена в G ни с какой инволюцией из $Z \setminus E$. Подгруппа M действует неприводимо на E и на $O_2(M)/Z$. Рассуждая, как в подслучае (vi), получаем, что $K_1K_2 \leq O_2((M_1, M_2)^1) \leq Z$. Отсюда, поскольку $K_i \lhd M_i$, $K_1 \neq K_2$ и $|K_1| \leq |K_2|$, имеем $K_1 = E$, $|K_2| = 8$ и $K_1K_2 = Z$. Но тогда $K_2 = E^g$ и, следовательно, инволюции из неединичной подгруппы $E \cap E^g$ сопряжены в L с инволюциями из непустого множества $E^g \setminus E$, что невозможно.

Полученное противоречие завершает рассмотрение подслучая (2a).

Пусть выполняется подслучай (2b). Из условия $F^*(M) = O_p(M)$ следует, что $T_\sigma \cap G \leq O_p(M)$. В частности, $T_\sigma \cap L \leq O_p(M_0)$.

Покажем, что p делит порядок группы $M_0/O_p(M_0)$. Предположим противное. Тогда ввиду леммы 2.1 имеем $1 \neq K_i \cap L \leq O_p(M_0)$ для каждого $i \in \{1,2\}$, поэтому подгруппа $O_p(M_0)$ содержится в пересечении $M_1 \cap M_2 \cap L$ и, следовательно, совпадает с $O_p(M_2 \cap L)$, что невозможно.

Поскольку p делит порядок группы $M_0/O_p(M_0)$, используя предложения 1.2 и 1.3 и [17, теорема, табл. 5.2], легко видеть, что выполняется один из следующих подслучаев:

(i) $L = X_\sigma \cong {}^3D_4(2)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3).SL_2(3)$;

(ii) $L = X_\sigma \cong {}^2F_4(8)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9).GL_2(3)$;

(iii) $L = X_\sigma \cong F_4(8)$, G содержит графовый автоморфизм, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_9)^4$, $M_0/(T_\sigma) \cong W(F_4) \cong O_4^+(3)$;

(iv) $L \cong E_6^\varepsilon(q)$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +$, $X_\sigma \leq G$ при $(\varepsilon, q) = (-,2)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^6$, $M_0/(T_\sigma \cap L) \cong W(E_6) \cong \mathrm{Aut}(U_4(2))$;

(v) $L \cong E_7(q)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^7$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +$, $M_0/(T_\sigma \cap L) \cong W(E_7) \cong \mathbb{Z}_2 \times Sp_6(2)$;

(vi) $L = X_\sigma \cong E_8(q)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^8$, $\varepsilon \in \{+,-\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +1$, $M_0/(T_\sigma) \cong W(E_8) \cong 2{\cdot}\Omega_8^+(2).2$.

Положим $R = \Omega_1(T_\sigma) \cap L$. Тогда во всех подслучаях (i)–(vi) имеем $R = \Omega_1(O_p(M_0))$.

Пусть сначала $p > 2$. Тогда $T_\sigma \cap L = O_p(M_0)$. Кроме того, группа M_0 действует неприводимо на R. Действительно, это следует из [7] в подслучае (i), из справедливости согласно [7] включений $3^2 : GL_2(3) < L_3(3) < {}^2F_4(2) < {}^2F_4(8)$ в подслучае (ii) и из [17, лемма 4.6(i)] в остальных подслучаях. Ввиду леммы 2.1 либо $K_i \cap L \neq 1$ для каждого $i \in \{1,2\}$, либо выполняется подслучай (i), причем $G \cong \mathrm{Aut}({}^3D_4(2))$ и $M \cong 3 \times (3^2 : SL_2(3))$. Если выполняется первая возможность, то с учетом включения $K_2 \cap L \leq O_p(M_0)$ имеем $R = \Omega_1(K_1 \cap L) = \Omega_1(K_2 \cap L)$, что противоречит условию теоремы. Поэтому выполняется вторая возможность. Тогда $p = 3$ и $O_3(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 27. Положим $W = O_3(M_1)$. Тогда $W^g = O_3(M_2)$ и $K_1K_2 \leq O_3((M_1, M_2)^1) \cap O_3((M_2, M_1)^1) \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$ и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \neq W^g$ и $|M_1|_3 = 3^4$, имеем $|WW^g| = 3^4$, что влечет $|W \cap W^g| = 3^2$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) \geq K_1K_2$.

Предположим, что $K_i \cap L \neq 1$ для некоторого $i \in \{1,2\}$. Тогда $K_i \cap L$ является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_3(M_i \cap L) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Поскольку M_i неприводимо действует на $O_3(M_i \cap L)$, подгруппа $K_i \cap L$ равна $O_3(M_i \cap L)$. Но тогда $C_G(K_i \cap L) = W$, что противоречит включению $K_i \leq Z(WW^g)$.

Итак, $K_i \cap L = 1$ для каждого $i \in \{1,2\}$ и, следовательно, $|K_1| = |K_2| = 3$ и $Z(WW^g) = K_1 \times K_2$. Поскольку $|G|_3 = 3^5$, подгруппа WW^g является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовской 3-подгруппе P из G. Возьмем элемент $x \in (P \cap L) \setminus WW^g$. Ввиду [7] можно считать, что подгруппа $\langle x \rangle$ имеет порядок 9 и действует транзитивно на множестве $\{K_1, K_1^x, K_1^{x^{-1}}\}$, состоящем из подгрупп порядка 3 из $Z(WW^g)$, не лежащих в L. Поэтому можно считать, что $\langle g \rangle = \langle x \rangle$. Поскольку инволюция из M инвертирует $Z(WW^g) \cap L$ и централизует K_1, она переставляет K_1^g и $K_1^{g^{-1}}$. Отсюда следует, что тройки (G, M, M^g) и $(G, M, M^{g^{-1}})$

эквивалентны и $M_1 \cap M_2 = WW^g$, так что выполняются п. (b) теоремы.

Пусть теперь $p = 2$. Тогда выполняется один из подслучаев (iv)–(vi). Поскольку $q - \varepsilon 1$ есть неединичная степень 2, получаем $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ и, следовательно, ввиду [16] подгруппа M_0 имеет нечетный индекс в L и $C_M(R) = O_2(M)$. Таблицы 2-модулярных неприводимых характеров Брауэра групп $\mathrm{Aut}(U_4(2))$ и $\Omega_8^+(2)$ (см. [6]) показывают, что в подслучаях (iv) и (vi) группа M_0 действует неприводимо на R, поэтому, как выше при рассмотрении первой возможности случая $p > 2$, приходим к противоречию.

Таким образом, выполняется подслучай (v). Имеем $q - \varepsilon 1 = 2^k$ для $k \geq 2$ и, следовательно, $O_2(M_0) = (T_\sigma \cap L)\langle t \rangle$, где $T_\sigma \cap L \cong (\mathbb{Z}_{2^k})^6 \times \mathbb{Z}_{2^{k-1}}$ (см. [14, теорема 2.5.12]) и t действует на T_σ как элемент w_0 из группы Вейля $W(E_7)$ (см. [1; 2]). Согласно [9, теорема 7.2.2] элемент t инвертирует T_σ.

Пусть E — 2^{k-1}-я степень группы $T_\sigma \cap L$. Тогда E — подгруппа порядка 2^6 из R, нормальная в M. Любой элемент нечетного порядка из $C_M(E)$ централизует $O_2(M)$, поэтому $T_\sigma \cap L \leq C_{M_0}(E) \leq O_2(M_0)$. Таблица 2-модулярных неприводимых характеров Брауэра группы $Sp_6(2)$ (см. [6]) показывает, что нетривиальный 6-мерный $\mathbb{F}_2 Sp_6(2)$-модуль является естественным $\mathbb{F}_2 Sp_6(2)$-модулем. Отсюда следует, что $C_{M_0}(E) = O_2(M_0)$ и E — минимальная нормальная подгруппа в M_0. Ввиду [14, теорема 4.5.1] E является единственной минимальной нормальной подгруппой в M_0.

Поскольку элемент t инвертирует $T_\sigma \cap L$, имеем $R = Z(O_2(M_0))$. Подгруппа E^g — единственная минимальная нормальная подгруппа в $M_2 \cap L$, поэтому $E^g \leq K_2 \cap L \cap Z(O_2(M_2 \cap L))$.

Предположим, что $(T_\sigma \cap L)E^g = O_2(M_0)$. Тогда можно считать, что $E^g = \langle t \rangle \times (E^g \cap R)$. Имеем $N_{O_2(M_0)}(E^g) = E^g N_{T_\sigma \cap L}(E^g)$ и $N_{T_\sigma \cap L}(E^g) = [t, T_\sigma \cap L] = \{x \in T_\sigma \cap L \mid [t,x] \in E^g \cap R\} = \{x \in T_\sigma \cap L \mid x^2 \in E^g \cap R\}$. В $T_\sigma \cap L$ найдется элемент y порядка 2^k такой, что $\langle y \rangle \cap E^g = 1$. Поэтому $y^{2^{k-2}}$ не нормализует E^g. В то же время, поскольку нормальная в M_0 подгруппа $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ содержит EE^g и нормализует E^g, коммутатор $[y, t] = y^2$ принадлежит $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ и, следовательно, нормализует E^g. Отсюда $k = 2$. Группа M_0 действует неприводимо на $T_\sigma \cap L/R$ и элемент y из $O_2(M_0)$ не принадлежит $O_2((M_1, M_2)^1) \cap$, поэтому $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L \leq RE^g$. Поскольку подгруппа R содержится в $M_1 \cap M_2 \cap L$ и нормальна в M, она содержится в $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$. Таким образом, $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L = RE^g$. Ясно, что $|RE^g : EE^g| \leq 2$. Предположим, что $RE^g = EE^g$. Тогда, поскольку $EE^g \leq O_2((M_1, M_2)^1) \cap O_2((M_2, M_1)^1) \cap L$, имеем $RE^g < O_2((M_2, M_1)^1) \cap L$ и, следовательно, $R = Z(O_2((M_2, M_1)^1) \cap L) \lhd \langle M_1, M_2 \rangle$, что невозможно.

Таким образом, $|RE^g : EE^g| = 2$ и, следовательно, $R \cap E^g = E \cap E^g$, т. е. $|E \cap E^g| = 2^5$. Положим $W = E \cap E^g$. Тогда $W^{g^{-1}} = E \cap E^{g^{-1}}$. Все гиперплоскости из E сопряжены относительно $M_0/O_2(M_0) \cong Sp_6(2)$. Поэтому можно считать элемент g нормализующим W. Имеем $N_{M_0}(W) = C_{M_0}(e)$ для инволюции $e \in E \setminus W$, ортогональной к W относительно соответствующей симплектической формы на E. Ясно, что $e^g \in E^g \setminus R$. Ввиду [7] имеем $C_{M_0}(e)/O_2(M_0) \cong 2^6 : S_6$, поэтому $N_{M_0}(W)$ содержит некоторую силовскую 2-подгруппу S группы L. Ясно, что $C_{M_0}(W) = C_S(W) = O_2(M_0)$ и группа $N_L(W)/C_L(W)$ изоморфна подгруппе H нечетного индекса из $GL_5(2)$. Поскольку $N_{M_0}(W)C_L(W)/C_L(W) \cong N_{M_0}(W)/C_{M_0}(W) = N_{M_0}(W)/O_2(M_0) \cong 2^6 : S_6$, из списка максимальных подгрупп группы $GL_5(2)$ (см. [7]) видно, что $H \cong 2^6 : S_6$. Поэтому $N_L(W) = N_{M_0}(W)C_L(W)$, так что будем считать элемент g централизующим W. Тогда элементы e и e^g сопряжены в группе $C_L(W)$, причем они содержатся в силовской 2-подгруппе $O_2(M_0)$ этой группы. Согласно предложению 1.4 некоторая инволюция из $W \leq R$ сопряжена с некоторой инволюцией u из $O_2(M_0) \setminus R$ относительно нормализатора в $C_L(W)$ подгруппы $C_{O_2(M_0)}(u)$. Но $C_{O_2(M_0)}(u) = O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ и, следовательно, этот нормализатор содержится в M; противоречие с тем, что R нормальна в M.

Итак, $E^g \leq T_\sigma \cap L$ и, следовательно, $R = EE^g$. Поскольку $K_1 \leq O_2(M_2)$, то для единственной минимальной нормальной подгруппой E группы M имеем $E^{g^{-1}} \leq K_1^{g^{-1}} \leq O_2(M)$ и, рассуждая как выше, получаем $R = EE^{g^{-1}}$. Но тогда $R = R^{g^{-1}}$, что невозможно, так как $M = N_G(R)$.

Таким образом, в подслучае (2b) выполняются п. (b) и для него заключительное утверждение теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Картер П.** Классы сопряженных элементов в группе Вейля // Семинар по алгебраическим группам: сб. М.: Мир, 1973. С. 288–306.
3. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
4. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152.
5. **Aschbacher M.** On finite groups of Lie type and odd characteristic // J. Algebra. 1980. Vol. 66, no. 2. P. 400–424.
6. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
9. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p.
10. **Chabot P.** Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic commutator groups // J. Algebra. 1971. Vol. 19, no. 1. P. 21–30.
11. **Cohen A.M., Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 64, no. 1. P. 21–48.
12. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
13. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
14. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr.; vol. 40, no. 3).
15. **Liebeck M.W.** The affine permutation groups of rank three // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. Vol. 54, no. 3. P. 477–516.
16. **Liebeck M.W, Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. (II). 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
17. **Liebeck M.W, Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
18. **Wilson R.A.** Maximal subgroups of automorphism groups of simple groups // J. London Math. Soc. (2). 1985. Vol. 32, no. 3. P. 460–466.
19. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd. 3. S. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 20.12.2015

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru