ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 2 2016

УДК 517.97

О РАВНЫХ ОТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. К. Керимбеков, Э. Ф. Абдылдаева

В статье исследуется нелинейная задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда управление осуществляется граничными источниками. В исследовании использовано понятие обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены условия оптимальности в виде систем равенств и неравенств. Обнаружено, что условия оптимальности в виде равенств обладают свойством равных отношений. Это обстоятельство позволило упростить процедуру построения как оптимального векторного управления, так и полного решения задачи нелинейной оптимизации. При этом удалось упростить условия оптимальности в виде неравенств и находить компоненты оптимального векторного управления посредством решения лишь одного скалярного нелинейного интегрального уравнения. Разработан алгоритм построения решений системы нелинейных интегральных уравнений и нелинейной задачи оптимизации.

Ключевые слова: обобщенное решение, оптимальное управление, функционал, принцип максимума, система нелинейных интегральных уравнений, свойство равных отношений.

A. K. Kerimbekov, E. F. Abdyldaeva. On the property of equal ratios in the problem of boundary vector control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations.

We study the nonlinear problem of optimal control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations in the case where the control is performed by boundary sources. In the study we use the notion of generalized solution of the boundary value problem for a control process. Optimality conditions in the form of systems of equalities and inequalities are obtained from the maximum principle for systems with distributed parameters. It is found that the optimality conditions in the form of equalities have the property of equal ratios. This circumstance allowed us to simplify the construction procedures both for the optimal vector control and for the complete solution of the nonlinear optimization problem. We also simplified the optimality conditions in the form of inequalities and found the components of the optimal vector control by solving only one scalar nonlinear integral equation. An algorithm is developed for the construction of solutions of the system of nonlinear integral equations and of the nonlinear optimization problem.

Keywords: generalized solution, optimal control, functional, maximum principle, system of nonlinear integral equations, property of equal ratios.

MSC: 49K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176

Введение

В приложениях часто встречаются прикладные задачи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных [1–3]. Имеется множество исследований, посвященных задачам управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, например [4–8].

Однако задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления, изучены мало, и публикаций по этой проблеме немного [9; 10].

В данной статье исследуется задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция граничного воздействия нелинейно зависит от нескольких параметров управления.

В исследовании использовано понятие обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса.

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [3;11] установлено, что оптимальное управление удовлетворяет одновременно соотношениям типа равенств и неравенств. Соотношения типа равенств приводят к системе нелинейных интегральных уравнений, которые обладают свойством равных отношений, а вторые — к дифференциальным неравенствам относительно функции граничного источника. Обнаружено, что свойство равных отношений существенно упрощает процедуру построения как оптимального векторного управления, так и полного решения задачи нелинейной оптимизации. В частности, компоненты оптимального векторного управления определяются посредством решения лишь одного скалярного нелинейного интегрального уравнения. Свойство равных отношений является одной из особенностей рассматриваемой задачи. Сравнение с результатами работ [12; 13] показывает, что это свойство, которое появляется при векторном управлении, не зависит от природы управляемого процесса, т. е. оно является естественным для задач оптимизации с векторными управлениями.

В статье найдены достаточные условия существования единственного решения задачи оптимизации и разработан алгоритм построения полного решения задачи оптимизации в виде оптимального управления, оптимального процесса и минимального значения функционала.

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать интегральный функционал

$$I[\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)]=\int\limits_Q\Big(\big(V(T,x)-\xi_1(x)\big)^2+\big(V_t(T,x)-\xi_2(x)\big)^2\Big)dx$$
$$+2\beta\int\limits_0^T M[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)]dt,\quad \beta>0, \tag{1.1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+g(t,x),\quad x\in Q,\quad 0<t\le T, \tag{1.2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q, \tag{1.3}$$

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j}^n a_{ij}(x)V_{x_j}\cos(\nu,x_i)+a(x)V=b(t,x)p[t,\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)],\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T. \tag{1.4}$$

Здесь A — эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^n\big(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\big)_{x_i}-c(x)V(t,x),$$

$a(x)\ge0$, $c(x)\ge0$ — известные измеримые функции; Q — область n-мерного эвклидового пространства $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей γ; ν — вектор нормали, исходящий из точки $x\in\gamma$; $K(t,\tau)$ — заданная функция, определенная в области $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty,\quad K(t,\tau)\in H(D).$$

При этом

$$\begin{cases} \psi_1(x) \in H_1(Q), \quad \psi_2(x) \in H(Q), \quad \xi_1(x) \in H(Q), \quad \xi_2(x) \in H(Q), \\ g(t,x) \in H(Q_T), \quad b(t,x) \in H(\gamma_T), \quad p[t, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)] \in H(0,T), \\ Q_T = Q \times (0,T), \quad \gamma_T = \gamma \times (0,T) \end{cases} \tag{1.5}$$

— заданные функции, причем функция $p[t, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)]$ нелинейно зависит от функциональных аргументов $\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)$, $\vartheta_i(t) \in H(0,T)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, которые являются управлениями, и удовлетворяет условиям

$$p_{\vartheta_i}[t, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)] \neq 0 \quad \forall t \in (0,T), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m; \tag{1.6}$$

$M[t, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)]$ — заданная функция, строго выпуклая по функциональным аргументам; T — фиксированный момент времени, $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y; $H_1(Q)$ — соболево пространство первого порядка.

Известно [14, гл. 2, § 3], что при условиях (1.5), налагаемых на исходные функции, краевая задача (1.2)–(1.4) не может иметь классического решения. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи (1.2)–(1.4).

О п р е д е л е н и е. Под обобщенным решением краевой задачи (1.2)–(1.4) понимается функция $V(t,x) \in H(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_Q \Big[V_t \Phi - V \Phi_t\Big]_{t_1}^{t_2} dx \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_Q \Big(- V\Phi_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) V_{x_j} \Phi_{x_i} - c(x) V \Phi \Big) dx dt$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\gamma} \Big(b(t,x) p[t, \vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t)] - a(x) V \Big) \Phi(t,x) dx dt$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_Q \Big(\lambda \int\limits_0^T K(t,\tau) V(\tau, x) d\tau + g(t,x) \Big) \Phi(t,x) dx dt$$

при любых t_1, t_2 $(0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T)$ и $\Phi(t,x) \in C^{2,1}(Q_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т. е.

$$\lim_{t \to +0} \int\limits_Q V(t,x) \phi_0(x) dx = \int\limits_Q \psi_1(x) \phi_0(x) dx, \quad \lim_{t \to +0} \int\limits_Q V_t(t,x) \phi_1(x) dx = \int\limits_Q \psi_2(x) \phi_1(x) dx$$

для любых функций $\phi_0(x) \in H(Q)$, $\phi_1(x) \in H(Q)$. Здесь $C^{2,1}(Q_T)$ — пространство функций, определенных на множестве Q_T и имеющих производные второго порядка по переменной t и первого порядка по переменным x_i.

Решение краевой задачи (1.2)–(1.4) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad V_n(t) = \langle V(t,x), z_n(x) \rangle = \int\limits_Q V(t,x) z_n(x) dx, \tag{1.7}$$

где $V_n(t)$ — коэффициенты Фурье; $z_n(x)$ является обобщенной собственной функцией краевой задачи [15]

$$D_n(\Phi, z_n) \equiv \int\limits_Q \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \Phi_{x_i} z_{n x_j} + c(x) z_n(x) \Phi(t,x) \Big) dx + \int\limits_{\gamma} a(x) z_n(x) \Phi(t,x) dx$$

$$= \lambda_n^2 \int\limits_Q z_n(x)\Phi(t,x)dx;$$

$$\Gamma z_n(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют условиям $\lambda_n \le \lambda_{n+1} \forall n = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Используя метод Лиувилля, легко показать, что коэффициенты Фурье $V_n(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$V_n(t) = \lambda \int\limits_0^T \left(\frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) K(\tau, s) d\tau \right) V_n(s) ds + \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) \left(q_n(\tau) + b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] \right) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1.8}$$

т. е. при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ являются решением линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$V_n(t) = \lambda \int\limits_0^T K_n(t,s) V_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.9}$$

где

$$K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) K(\tau, s) d\tau,$$

$$a_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) \left(q_n(\tau) + b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] \right) d\tau.$$

Решение уравнения (1.9) находим по формуле [16, гл. 2, § 2.1; 17, гл. 3, § 13]

$$V_n(t) = \lambda \int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.10}$$

где

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{1.11}$$

— резольвента ядра $K_n(t,s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формулам

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int\limits_0^T K_n(t,\eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$. Исследуем сходимость ряда Неймана (1.11). С учетом оценок

$$\left| K_{n,i}(t,s) \right|^2 \le \left(\frac{T}{\lambda_n^2} \right)^i (K_0 T)^{i-1} \int\limits_0^T K^2(y,s) dy \quad \forall t \in (0,T),$$

$$\int\limits_0^T K_{n,i}^2(t,s) ds \le \left(\frac{T}{\lambda_n^2} \right)^i (K_0 T)^{i-1} \int\limits_0^T \int\limits_0^T K^2(y,s) dy ds \le \left(\frac{T K_0}{\lambda_n^2} \right)^i (T)^{i-1}$$

легко показать, что ряд Неймана (1.11) для значений параметра λ, удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \longrightarrow \infty,$$

абсолютно сходится при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этом радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n, и резольвента $R_n(t, s, \lambda)$ как сумма абсолютно сходящегося ряда является непрерывной функцией. Легко проверить, что имеют место следующие оценки:

$$|R_n(t,s,\lambda)| \le \frac{\sqrt{T}\sqrt{\int_0^T K^2(y,s)dy}}{\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}},$$

$$\int\limits_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds = \frac{T}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T K^2(y,s)dyds = \frac{K_0T}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}.$$

Отметим, что при выполнении условия

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}} \tag{1.12}$$

ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции при любом фиксированном $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, решение краевой задачи (1.2)–(1.4) с учетом (1.7), (1.10), (1.11), (1.12) находим по формуле

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t)\right)z_n(x). \tag{1.13}$$

С учетом $a_n(t)$ (см. (1.9)) решение (1.13) перепишем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)b_n(\eta)p[\eta,\vartheta(\eta)]d\eta\right)z_n(x), \tag{1.14}$$

где

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t + \lambda\int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right)$$

$$+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t + \lambda\int\limits_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right) + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)g_n(\eta)d\eta, \tag{1.15}$$

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t-\eta) + \lambda\int\limits_\eta^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0 \le \eta \le t, \\ \lambda\int\limits_\eta^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t \le \eta \le T. \end{cases} \tag{1.16}$$

Предложение 1. *Обобщенное решение краевой задачи* (1.2)–(1.4), *определенное формулой* (1.14), *является элементом гильбертова пространства* $H(Q_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имея в виду соотношения (1.14)–(1.16), непосредственным вычислением получаем неравенство

$$\int_0^T \int_Q V^2(t,x)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t)dt$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 4\Big[2\psi_{1n}^2\Big(\cos^2\lambda_n t + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \int_0^T \cos^2\lambda_n s ds\Big)$$

$$+ 2\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\Big(\sin^2\lambda_n t + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \int_0^T \sin^2\lambda_n s ds\Big)$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda)d\eta \int_0^T g_n^2(\eta)d\eta + \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda)\, b_n^2(\eta)d\eta \int_0^T p_n^2[\eta,\vartheta_1(\eta),\ldots,\vartheta_m(\eta)]d\eta\Big]dt$$

$$\leq 8\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\psi_{1n}^2\Big(1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\big(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big) + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\Big(1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\big(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)$$

$$+ \frac{T}{\lambda_n^2}\Big(1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\big(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)\int_0^T g_n^2(\eta)d\eta$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n^2}\Big(1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\big(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)\int_0^T b_n^2(\eta)d\eta\, \|p[\eta,\vartheta_1(\eta),\ldots,\vartheta_m(\eta)]\|^2_{H(0,T)}\Big]$$

$$\leq 8T\Big(1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\big(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)\Big(\|\psi_1(x)\|^2_{H(Q)} + \frac{1}{\lambda_1^2}\big(\|\psi_2(x)\|^2_{H(Q)} + T\|g(t,x)\|^2_{H(Q_T)}\big)$$

$$+ \|b(t,x)\|^2_{H(\gamma_T)}\, \|p[\eta,\vartheta_1(\eta),\ldots,\vartheta_m(\eta)]\|^2_{H(0,T)}\Big) < \infty,$$

из которого следует утверждение предложения. □

Отметим, что в силу условия (1.5) каждому векторному управлению $\overline{\vartheta}(t) = (\vartheta_1(t),\ldots,\vartheta_m(t))$ соответствует единственное решение $V(t,x)$ краевой задачи (1.2)–(1.4).

Формально дифференцируя ряд (1.13) по переменной t, имеем равенство

$$V_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n'(t)z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n'(t)\Big)z_n(x),$$

где символ “ $\prime$ ” — знак обыкновенной производной.

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\int_0^T\int_Q V_t^2(t,x)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n'(t)\Big)^2 dt < \infty,$$

т. е. $V_t(t,x) \in H(Q_T)$.

2. Условия оптимальности и система нелинейных интегральных уравнений

Поскольку каждое векторное управление $\overline{\vartheta}(t) = (\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_m(t))$ единственным образом определяет решение краевой задачи (1.2)–(1.4), то управлению $\overline{\vartheta}(t) + \Delta\overline{\vartheta}(t)$ соответствует решение краевой задачи (1.2)–(1.4) вида $V(t,x) + \Delta V(t,x)$, где $\Delta V(t,x)$ — приращение, соответствующее приращению $\Delta\overline{\vartheta}(t)$. Согласно методике вывода принципа максимума [3; 9–13] приращение функционала (1.1) можно представить в виде

$$\Delta I(\overline{\vartheta}) = I(\overline{\vartheta} + \Delta\overline{\vartheta}) - I(\overline{\vartheta}) = -\int_0^T \Delta\Pi[t,x,\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)]dt + \int_Q \Delta V^2(T,x) + \Delta V_t^2(T,x)dx.$$

Здесь

$$\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)] = \int_\gamma b(t,x)\omega(t,x)dxp[t,\overline{\vartheta}(t)] - 2\beta M[t,\overline{\vartheta}(t)],$$

$$\begin{aligned}\Delta\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)] &= \Pi\big[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t) + \Delta\overline{\vartheta}(t)\big] - \Pi\big[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)\big]\\ &= grad^*\Pi\big[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)\big]\Delta\overline{\vartheta}(t)\\ &+ \frac{1}{2}\Delta\overline{\vartheta}^*(t)W\big[\Pi\big(t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)\big)\big]\Delta\overline{\vartheta}(t) + o\big(\|\Delta\overline{\vartheta}(t)\|^2_{H^m(0,T)}\big),\end{aligned}$$

$W[\Pi(t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t))]$ — матрица Гесса функции $\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)]$, вычисленная по переменным $\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m$ при фиксированных значениях остальных аргументов, $H^m(0,T) = H\times\cdots\times H$ — декартово произведение m пространств $H(0,T)$, а функция $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau, \quad x\in Q, \quad 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x) + 2(V_t(T,x) - \xi_2(x)) = 0, \quad \omega_t(T,x) - 2(V(T,x) - \xi_1(x)) = 0, \quad x\in Q,$$

$$\Gamma\omega(t,x) = \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij}(x)\omega_{x_j}(t,x)\big)_{x_i} - c(x)\omega(t,x) = 0, \quad x\in y, \quad 0<t<T. \tag{2.1}$$

Исследуем на максимум функцию $\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}]$ по переменным $\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m$. Из условия $grad\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}(t)] = \theta$, θ — нулевой вектор, находим, что оптимальное векторное управление $\overline{\vartheta}^0(t)$ должно удовлетворять следующей системе равенств:

$$2\beta M_{\vartheta_i}[t,\overline{\vartheta}(t)] = p_{\vartheta_i}[t,\overline{\vartheta}(t)]\int_\gamma b(t,x)\omega(t,x)dx, \quad i=1,2,3,\ldots,m. \tag{$*$}$$

Согласно известному критерию Сильвестра функция $\Pi[t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta}]$ в точке с координатами $(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m)$, удовлетворяющими равенству (*) в каждый фиксированный момент времени $t\in[0,T]$, достигает максимума при выполнении неравенств

$$\Delta_1<0, \quad \Delta_2>0, \quad \ldots, \quad -1^{(k)}\Delta_k>0, \quad k=1,2,3,\ldots,m, \tag{$**$}$$

где Δ_k — определитель матрицы Гесса вида

$$W[\Pi(t,x,V(t,x),\omega(t,x),\overline{\vartheta})] = \left(2\beta M_{\vartheta_i\vartheta_j}[t,\overline{\vartheta}(t)] - p_{\vartheta_i\vartheta_j}[t,\overline{\vartheta}(t)]\int_\gamma b(t,x)\omega(t,x)dx\right)_{i,j},$$

$$i, j = 1, 2, 3, \ldots, k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Равенство (*) является необходимым условием первого порядка, а система неравенств (**) является необходимым и достаточным условием экстремума (максимума) функции $\Pi[\cdot, \vartheta_1, \cdots, \vartheta_m]$ в точке $(\vartheta_1, \cdots, \vartheta_m)$. Соотношения (*) и (**) в совокупности называются *условиями оптимальности.*

С учетом (1.6) условие оптимальности (*) перепишем в виде

$$2\beta M_{\vartheta_i}[t, \overline{\vartheta}(t)] p_{\vartheta_i}^{-1}[t, \overline{\vartheta}(t)] = \int\limits_{\gamma} b(t,x)\omega(t,x)dx, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{2.2}$$

Условие оптимальности (**) содержит решение $\omega(t,x)$ сопряженной краевой задачи, что затрудняет проверку выполнения этого условия. В этой связи согласно (2.2) функцию $\omega(t,x)$ исключим из системы неравенств (**). Проведя несложные вычисления, систему неравенств (**) перепишем в виде

$$\prod_{i=1}^{k} p_{\vartheta_i}[t, \overline{\vartheta}(t)] \begin{vmatrix} \left(\frac{M_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]}\right)_{\vartheta_1} & \cdots & \left(\frac{M_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]}\right)_{\vartheta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{M_{\vartheta_k}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_k}[t,\overline{\vartheta}(t)]}\right)_{\vartheta_1} & \cdots & \left(\frac{M_{\vartheta_k}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_k}[t,\overline{\vartheta}(t)]}\right)_{\vartheta_k} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{2.3}$$

Нетрудно видеть, что система равенств (2.2) обладает свойством равных отношений:

$$2\beta \frac{M_{\vartheta_1}[t, \overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t, \overline{\vartheta}(t)]} = \cdots = 2\beta \frac{M_{\vartheta_m}[t, \overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_m}[t, \overline{\vartheta}(t)]} = \int\limits_{\gamma} b(t,x)\omega(t,x)dx.$$

Это обстоятельство существенно упрощает процедуру построения оптимального векторного управления, ибо в этом случае для определения компонентов оптимального векторного управления достаточно решить лишь одно скалярное нелинейное интегральное уравнение. Поэтому упрощается и процедура построения полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Сравнивая это с результатами работ [12; 13], убеждаемся в том, что свойство равных отношений в случае векторного управления является естественным и не зависит от природы управляемого процесса. Заметим, что неравенства (2.3) ограничивают класс функций $p[t, \overline{\vartheta}(t)]$ и $M[t, \overline{\vartheta}(t)]$, т. е. задача нелинейной оптимизации может иметь решение только для таких пар $(p[t, \overline{\vartheta}(t)], M[t, \overline{\vartheta}(t)])$, для которых выполняется система неравенств (2.3).

Решение сопряженной краевой задачи (2.1) ищем в виде ряда

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t,x)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3\ldots$ удовлетворяют линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода вида

$$\omega_n(t) = \lambda \int\limits_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds + q_n(t), \tag{2.5}$$

где

$$B_n(s,t) = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_t^T \sin \lambda_n(\tau - t) K(s,\tau) d\tau,$$

$$q_n(t) = -2\Big((V_n'(T) - \xi_{2n}) \cos \lambda_n(T-t) + \frac{1}{\lambda_n}(V_n(T) - \xi_{1n}) \sin \lambda_n(T-t)\Big).$$

Решение уравнения (2.5) находим по формуле [16, гл. 2, § 2.1; 17, гл. 3, § 13].

$$\omega_n(t) = \lambda \int\limits_0^T P_n(s,t,\lambda) q_n(s) ds + q_n(t),$$

где резольвента $P_n(s,t,\lambda)$ ядра $B_n(s,t)$ имеет вид

$$P_n(s,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(s,t), \quad B_{n,i+1}(s,t) = \int\limits_0^T B_n(\eta,t) B_{n,i}(s,\eta) d\eta, \quad i = 1,2,3,\dots ,$$

и при выполнении условия (1.12) является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценкам

$$|P_n(s,t,\lambda)| \leq \frac{\sqrt{T\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta}}{\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0 T^2}}, \quad \int\limits_0^T P_n^2(s,t,\lambda) ds \leq \frac{TK_0}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0 T^2}\right)^2}.$$

Далее, учитывая (1.16), решение сопряженной краевой задачи представим в виде

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\varepsilon_n^*(T-t)h_n + \int\limits_0^T \varepsilon_n^*(T-t) G_n(T-\tau,\lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau \Big] z_n(x),$$

где символ “ $*$ ” — знак транспонирования,

$$h_n = (h_{1n}, h_{2n}), \quad h_{1n} = \xi_{2n} - \psi_{1n}\Big(-\lambda_n \sin\lambda_n T + \lambda \int\limits_0^T R'_{nt}(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\Big)$$

$$-\psi_{2n}\Big(\cos\lambda_n T + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int\limits_0^T R'_{nt}(T,s,\lambda) \sin\lambda_n s ds\Big)$$

$$-\int\limits_0^T \Big(\cos\lambda_n(T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n}\int\limits_\tau^T R'_{nt}(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau) ds\Big) g_n(\tau) d\tau,$$

$$h_{2n} = \xi_{1n} - \psi_{2n}\Big(\cos\lambda_n T + \lambda \int\limits_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\Big)$$

$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\Big(\sin\lambda_n T + \lambda_n \int\limits_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\Big)$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^T \Big(\sin\lambda_n(T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n}\int\limits_\tau^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau) ds\Big) g_n(\tau) d\tau;$$

$$G_(T-\tau,\lambda) = \big(G_{n1}(T-\tau,\lambda), G_{n2}(T-\tau,\lambda)\big),$$

$$G_{n1}(T-\tau,\lambda) = \cos\lambda_n(T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n}\int\limits_\tau^T R'_{nt}(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau) ds,$$

$$G_{n2}(T-\tau,\lambda)=\frac{1}{\lambda_n}\Big(\sin\lambda_n(T-\tau)+\lambda\int\limits_{\tau}^{T}R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\Big);$$

$$\varepsilon_n(T-t,\lambda)=\big(\varepsilon_{n1}(T-t,\lambda),\varepsilon_{n2}(T-t,\lambda)\big),$$

$$\varepsilon_{n1}(T-t,\lambda)=\cos\lambda_n(T-t)+\lambda\int\limits_0^T P_n(s,t,\lambda)\cos\lambda_n(T-s)ds,$$

$$\varepsilon_{n2}(T-t,\lambda)=\frac{1}{\lambda_n}\Big(\sin\lambda_n(T-t)+\lambda\int\limits_0^T P_n(s,t,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\Big);$$

$R'_{nt}(t,s,\lambda)$ — производная по переменной t резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$.

Лемма 1. *Функция* $h(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^*(T-t)h_nz_n(x)$ *является элементом гильбертова пространства* $H(Q_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\hbar^2(t,x)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_Q\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)h_nz_n(x)\Big)^2dxdt$$

$$=\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\big\langle\varepsilon_n(T-t,\lambda),h_n\big\rangle_{\mathbb{R}^2}\Big|^2dt\le\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\|\varepsilon_n(T-t,\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^2}\cdot\|h_n\|^2_{\mathbb{R}^2}dt$$

$$\le\int\limits_0^T\sum_{n=1}^{\infty}2\Big(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\big(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)$$

$$\times3\Big[\xi_{1n}^2+\xi_{2n}^2+2\Big(\frac{\lambda^2K_0T^2}{\big(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big)\Big((1+\lambda_n^2)\psi_{1n}^2+\Big(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\psi_{2n}^2\Big)\Big]dt$$

$$\le3T\varepsilon_0^2\Big[\|\xi_1(x)\|^2_{H(Q)}+\|\xi_2(x)\|^2_{H(Q)}+\varepsilon_0^2\Big(\|\psi_1(x)\|^2_{H_1(Q)}+\Big(1+\frac{1}{\lambda_1^2}\Big)\|\psi_2(x)\|^2_{H(Q)}\Big)\Big]<\infty,$$

где

$$\varepsilon_0^2=2\Big(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)\Big(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\big(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\big)^2}\Big),$$

символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^2$, из которого следует утверждение леммы. □

Лемма 2. *Функция*

$$\varepsilon(t,x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)\int\limits_0^T G_n(T-\tau,\lambda)b_n(\tau)p[\tau,\vartheta_1(\tau),\ldots,\vartheta_m(\tau)]d\tau z_n(x)$$

является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\int_0^T\int_0^T \varepsilon^2(t,x,\lambda)dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle \varepsilon_n(T-t,\lambda), \int_0^T G_n(T-\tau,\lambda)\, b_n(\tau)p[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]d\tau\right\rangle_{\mathbb{R}^2}\right|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n(T-t,\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^2}\left(\int_0^T \|G_n(T-\tau,\lambda)\|_{\mathbb{R}^2} b_n(\tau)p[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]d\tau\right)^2 dt$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n(T-t,\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^2}\int_0^T \|G_n(T-\tau,\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^2} b_n^2(\tau)d\tau \int_0^T p^2[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]d\tau dt$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_0^2 \int_0^T \varepsilon_0^2 b_n^2(\tau)d\tau \int_0^T p^2[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]d\tau dt$$

$$= T\varepsilon_0^4\|b(t,x)\|^2_{H(\gamma_T)}\,\|p[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]\|^2_{H(0,T)} < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы. □

Предложение 2. *Решение сопряженной краевой задачи* $\omega(t,x)$ *является элементом пространства* $H(Q_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение предложения согласно леммам 1 и 2 следует из представления $\omega(t,x) = -2(-h(t,x) + \varepsilon(t,x,\lambda))$. □

3. Система нелинейных интегральных уравнений оптимального управления

Пусть для функций $p[t,\overline{\vartheta}(t)]$ и $M[t,\overline{\vartheta}(t)]$ выполняется система неравенств (2.3). Тогда оптимальное векторное управление находим согласно условию оптимальности (2.2).

Решение сопряженной краевой задачи (2.1), определяемое равенствами (2.4) и (2.5), подставим в (2.2) и получим систему равенств вида

$$\beta\frac{M_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t,\overline{\vartheta}(t)]} = \dots = \beta\frac{M_{\vartheta_m}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_m}[t,\overline{\vartheta}(t)]}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)\left(-h_n + \int_0^T G_n(T-\tau,\lambda)b_n(\tau)p[\tau,\vartheta_1(\tau),\dots,\vartheta_m(\tau)]d\tau\right).$$

Нелинейные интегральные уравнения (3) решаются согласно методике, разработанной в [9;10]. Согласно свойствам равных отношений положим

$$\beta\frac{M_{\vartheta_i}[t,\overline{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_i}[t,\overline{\vartheta}(t)]} = u(t), \quad i = 1,2,3,\dots,m. \tag{3.1}$$

Согласно (2.3) ранг системы (3.1) равен m ($k = m$). Поэтому отсюда согласно известной теореме о системе неявно заданных функций [18, гл. 8, § 8] переменные $\vartheta_1(t),\dots,\vartheta_m(t)$ определяются однозначно, т. е. существуют функции $\varphi_i[\cdot]$, $i = 1,2,3,\dots,m$, такие, что

$$\vartheta_i(t) = \varphi_i[t,u(t),\beta], \quad i = 1,2,3,\dots,m. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) и (3.2) вместо системы уравнений (3) рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида

$$u(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)$$

$$\times\Big(-h_n + \int_0^T G_n(T-\tau,\lambda)b_n(\tau)p[\tau,\varphi_1(\tau,u(\tau),\beta),\dots,\varphi_m(\tau,u(\tau),\beta)]d\tau\Big),$$

которое перепишем в операторной форме

$$u = l - S(u), \tag{3.3}$$

где

$$l = l(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)h_n,$$

$$S(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\varepsilon_n^*(T-t,\lambda)\int_0^T G_n(T-\tau,\lambda)b_n(\tau)p\big[\tau,\varphi_1(\tau,u(\tau),\beta),\dots,\varphi_m(\tau,u(\tau),\beta)\big]d\tau.$$

Далее непосредственными вычислениями доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Функция $l(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$.*

Лемма 4. *Оператор $S(u)$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя.*

Лемма 5. *Пусть функции $p[t,\overline{\vartheta}(t)]$ и $\varphi[t,u(t),\beta]$ удовлетворяют следующим условиям Липшица:*

$$\begin{cases} \|p[t,\overline{\vartheta}(t)] - p[t,\tilde{\vartheta}(t)]\|_{H(0,T)} \le p_0\|\overline{\vartheta}(t)-\tilde{\vartheta}(t)\|_{H(0,T)}, \\ p_0 = (p_{01}^2+,\dots,+p_{0m}^2)^{1/2}, \quad p_{0i}>0, \quad i=1,2,3,\dots,m; \\ \|\varphi[t,u(t),\beta]-\varphi[t,\overline{u}(t),\beta]\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta)\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{H(0,T)}, \\ \varphi_0(\beta) = (\varphi_{01}^2(\beta)+,\dots,+\varphi_{0m}^2(\beta))^{1/2}, \quad \varphi_{0,i}(\beta)>0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Тогда при выполнении условия

$$\delta = \varepsilon_0^2\|b(t,x)\|_{H(\gamma_T)}^2\sqrt{m}p_0\varphi_0(\beta) < 1, \quad \beta>0, \tag{3.5}$$

оператор $S(u)$ является сжимающим.

Утверждение леммы следует из неравенства

$$\|S[u(t)]-S[\tilde{u}(t)]\|_{H(0,T)} \le \varepsilon_0^2\|b(t,x)\|_{H(\gamma_T)}^2\sqrt{m}p_0\varphi_0(\beta)\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_{H(0,T)},$$

которое с учетом условий (3.4) доказывается непосредственным вычислением. □

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.6), (1.12), (2.3), (3.4), (3.5). *Тогда операторное уравнение* (3.3) *в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно леммам 3 и 4 операторное уравнение (3.3) можно рассматривать в пространстве $H(0,T)$. Поскольку гильбертово пространство $H(0,T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме о принципе сжимающих отображений [18, гл. 1, § 7] операторное уравнение (3.3) имеет единственное решение. □

Решение операторного уравнения (3.3) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. n-е приближение решения находится по формуле

$$u_n(t) = S[u_{n-1}(t)], \quad n=1,2,3,\dots,$$

где $u_0(t)$ — произвольный элемент пространства $H(0,T)$. Точное решение $u^0(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$u^0(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t),$$

причем имеет место оценка

$$\|u^0(t) - u_n(t)\|_{H_{(0,T)}} \le \frac{\delta^n}{1-\delta}\|S[u_0(t)] - u_0(t)\|_{H_{(0,T)}},$$

где $u_0(t)$ — произвольный элемент пространства $H(0,T)$.

Подставляя точное решение в (3.2), находим искомые оптимальные управления

$$\vartheta_i^0(t) = \varphi_i[t, u^0(t), \beta], \quad i = 1,2,3,\ldots,m,$$

т. е. оптимальное векторное управление

$$\overline{\vartheta}^0(t) = (\vartheta_1^0(t),\ldots,\vartheta_m^0(t)).$$

Решение $V^0(t,x)$ краевой задачи (1.2)–(1.4), соответствующее оптимальному векторному управлению $\overline{\vartheta}^0(t)$, находим по формуле

$$V^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)b_n(\tau)p[\tau,\vartheta^0(\eta)]d\eta\right)z_n(x).$$

Минимальное значение функционала (1.1) вычислим по формуле

$$I[\overline{\vartheta}^0(t)] = \int_Q \left(\left(V^0(T,x) - \xi_1(x)\right)^2 + \left(V_t^0(T,x) - \xi_2(x)\right)^2\right)dx + 2\beta\int_0^T M[t,\overline{\vartheta}^0(t)]dt, \quad \beta > 0.$$

Найденная тройка $\left\{\overline{\vartheta}^0(t), V^0(t,x), I[\overline{\vartheta}^0(t)]\right\}$ определяет полное решение нелинейной задачи оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: пер. с англ. / ред. П. И. Кузнецов. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. **Владимиров В.С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
3. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 500 с.
4. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
5. **Sachs E.W., Strauss A.K.** Efficient solution of partial integro-differential equation in finance // Appl. Numer. Math. 2008. Vol. 58, no. 11. P. 1687–1703.
6. **Kowalewski A.** Optimal control of an infinite order hyperbolic system with multiple time-varying lags // Automatyka. 2011. T. 15. P. 53–65.
7. **Thorwe J., Bhalekar S.** Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method // American J. Comput. Appl. Math. 2012. Vol. 2 (3). P. 101–104.
8. **Khurshudyan As. Zh.** On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations // Arch. Contol. Sci. 2014. Vol. 24 (60), no. 1. P. 5–25.
9. **Kerimbekov A.K.** On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations // Proc. World Congress on Engineering. London, 2011. Vol. 1. P. 270–275.

10. **Kerimbekov A.K.** On the solvability of a nonlinear optimal control problem for the thermal processes described by Fredholm integro-differential equations // Current Trends in Analysis and Its Applications: Proc. of the 9th ISAAC Congress (Krakyw 2013) / eds. V. V. Mityushev, M. V. Ruzhansky. London: Springer, 2015. P. 803–822. (A Series of Trends in Mathematics.)
11. **Комков В.** Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
12. **Керимбеков А.К., Баетов А.К.** О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий — аль Хорезми 2012: материалы Междунар. науч. конф. Ташкент, 2012. С. 301–303.
13. **Керимбеков А.К., Кабаева З.С.** Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящем векторном управлении // Тр. VI Междунар. науч. конф. / Актюбинский региональный ун-т им. К. Жубанова. Актобе, 2012. Ч. I. С. 100–104.
14. **Тихонов А.Н., Самарский А.А** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
15. **Плотников В.И.** Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций. // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 4. С. 743–755.
16. **Трикоми Ф.** Интегральные уравнения: пер. с англ. / ред. И. Н. Векуа. М.: ИЛ, 1960. 301 с.
17. **Краснов М.В.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.
18. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Керимбеков Акылбек Керимбекович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: akl7@rambler.ru

Поступила 20.01.2016

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт теоретической и прикладной математики НАН КР
Кыргызско-Турецкий Университет “Манас”
e-mail: efa_69@mail.ru