

УДК 517.977.5

**ОБ УПРАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹****И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин**

Исследуется задача оптимального управления для нелинейной динамической системы. Искомое управление должно удовлетворять заданным ограничениям и обеспечивать выполнение ряда требований к текущему фазовому состоянию системы. Для построения в этой задаче допустимых управлений предлагается подход, основанный на методологии решения задач управления с поводьрем. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, фазовые ограничения, допустимое управление, поводьрем, сопутствующие позиции.

I. N. Kandoba, I. V. Koz'min. On the control of a nonlinear dynamic system in a time-optimal problem with state constraints.

An optimal control problem for a nonlinear dynamic system is studied. The required control must satisfy given constraints and provide the fulfilment of a number of conditions on the current state of the system. For the construction of admissible controls in this problem, we propose an approach based on the ideas of solution of control problems with a guide. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: dynamic system, state constraints, admissible control, guide, accompanying positions.

MSC: 49J15, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-150-162

1. Введение

Работа инициирована одним из ведущих разработчиков систем управления для ракетно-космической техники (ФГУП Научно-производственное объединение автоматики им. акад. Н. А. Семихатова, г. Екатеринбург) и посвящена построению методов решения задачи оптимального управления для одной нелинейной динамической системы при ограничениях на управление и текущее фазовое состояние системы. Содержательно рассматриваемая динамическая система является математической моделью управляемого движения ракеты-носителя на безатмосферном участке ее траектории. Требуется построить программное управление, которое обеспечивает выведение максимальной массы ракеты-носителя на заданную околоземную эллиптическую орбиту с выполнением всех требований к текущему фазовому состоянию системы. Математическая модель включает уравнения поступательного движения центра масс ракеты-носителя и уравнения его вращательного движения как "твердого тела". В этой модели полагается, что двигательная установка носителя включает четыре подвижных рулевых двигателя. Эти двигатели помещены в одностепенные карданные подвесы, которые обеспечивают для каждого двигателя поворот продольной оси его камеры на некоторый угол. Скорости изменения этих углов используются в качестве управляющих параметров. Основное внимание в работе уделяется методам построения в указанной задаче допустимых управлений. Используются подходы, основанные на методологии решения задач управления с поводьрем [1; 2] и обратных задач динамики [3].

¹Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 15-16-1-14).

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, описывающую движение ракеты-носителя (РН) как “твёрдого тела” от некоторой точки на безатмосферном участке ее траектории до момента выхода РН на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Движение РН на промежутке $[t_s, t_f]$ в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = W_R(t, x, m, \vartheta, \psi, \varphi, \delta) + g(x), \quad \dot{m} = -\mu(t), \\ \dot{\omega} &= \Lambda(t, \omega) + M(t, x, \delta), \\ \dot{\delta} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= (\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi) \frac{1}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \omega_2 \cos \varphi - \omega_3 \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_1 + (\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi) \frac{\sin \psi}{\cos \psi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где t_s — время начала движения РН от рассматриваемой точки на безатмосферном участке траектории (например, от точки отделения последнего сбрасываемого элемента конструкции РН — головного обтекателя), t_f — момент времени выхода РН на заданную орбиту; $x, v \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс РН; m — масса РН, μ — заданная неотрицательная функция, описывающая расход топлива двигательной установки РН; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; ϑ, ψ, φ — углы тангажа, рыскания и крена соответственно, которые определяют пространственную ориентацию строительной оси РН; W_R и g — реактивное и гравитационное ускорения соответственно; Λ — вектор-функция, определяемая угловой скоростью и моментами инерции РН относительно осей связанной с ней прямоугольной системы координат; M — вектор-функция, определяемая моментами сил от рулевых двигателей. Выражения для Λ и M будут конкретизированы ниже.

Управлениями $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ служат скорости $u_i = \dot{\delta}_i$ изменения углов δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) поворота продольных осей камер рулевых двигателей

$$|u_i(t)| \leq u_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3)$$

В момент времени t_s для системы (2.1), (2.2) задаются начальные условия

$$x(t_s) = x_s, \quad v(t_s) = v_s, \quad m(t_s) = m_s, \quad \omega(t_s) = \omega_s, \quad \delta(t_s) = \delta_s, \quad \vartheta(t_s) = \vartheta_s, \quad \psi(t_s) = \psi_s, \quad \varphi(t_s) = \varphi_s. \quad (2.4)$$

Ракета-носитель должна быть выведена на заданную оскулирующую эллиптическую орбиту с требуемой точностью, т. е. должны быть выполнены терминальные ограничения

$$|i - \bar{i}| \leq \bar{\Delta}_i, \quad |\Omega - \bar{\Omega}| \leq \bar{\Delta}_\Omega, \quad |h_{\min} - \bar{h}_{\min}| \leq \bar{\Delta}_{h_{\min}}, \quad |h_{\max} - \bar{h}_{\max}| \leq \bar{\Delta}_{h_{\max}}, \quad |\omega_{\text{per}} - \bar{\omega}_{\text{per}}| \leq \bar{\Delta}_\omega, \quad (2.5)$$

где наклонение плоскости орбиты i , долгота восходящего узла Ω , минимальная h_{\min} и максимальная h_{\max} высоты орбиты соответственно, аргумент перигея ω_{per} — параметры, определяющие оскулирующую эллиптическую орбиту (вообще говоря, отличную от круговой). Отметим, что значения перечисленных параметров однозначно определяются [4, гл. 4] компонентами векторов $x(t_f)$, $v(t_f)$. Через \bar{i} , $\bar{\Omega}$, \bar{h}_{\min} , \bar{h}_{\max} , $\bar{\omega}_{\text{per}}$ обозначены значения соответствующих параметров заданной орбиты выведения, а через $\bar{\Delta}_i$, $\bar{\Delta}_\Omega$, $\bar{\Delta}_{h_{\min}}$, $\bar{\Delta}_{h_{\max}}$, $\bar{\Delta}_\omega$ — допустимые отклонения от этих параметров.

К управляемому движению РН предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие ограничений на текущее фазовое состояние системы (2.1), (2.2). Укажем наиболее существенные из них:

$$|\vartheta(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\psi(t)| \leq \psi^{\max}, \quad |\varphi(t)| \leq \varphi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]; \quad (2.6)$$

$$|\dot{\vartheta}(t)| \leq \dot{\vartheta}^{\max}, \quad |\dot{\psi}(t)| \leq \dot{\psi}^{\max}, \quad |\dot{\varphi}(t)| \leq \dot{\varphi}^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]; \quad (2.7)$$

$$|\delta_i(t)| \leq \delta_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.8)$$

Требуется построить программное управление \mathbf{u} , т.е. измеримую вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_s, t_f]$, которая удовлетворяет условию (2.3) и обеспечивает выведение на заданную орбиту максимальной массы РН (выведение РН с минимальным расходом топлива) с выполнением всех фазовых ограничений. Поскольку масса ракеты-носителя m не зависит от управления и является монотонно убывающей функцией времени, то эта задача сводится к следующей задаче быстрогодействия.

З а д а ч а 1 (Основная задача). Для управляемой системы (2.1), (2.2) с начальными условиями (2.4) в момент времени t_s найти программное управление \mathbf{u} , минимизирующее значение функционала $J_1[\mathbf{u}] = t_f$. При этом должны быть выполнены ограничения (2.3), (2.6)–(2.8), а также условия (2.5) на параметры орбиты.

Управления, удовлетворяющие в задаче 1 всем требованиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этой задаче.

3. Общий подход к построению допустимых управлений в основной задаче 1. Вспомогательная задача оптимального управления

Для построения в задаче 1 допустимого управления может быть применен следующий подход, основанный на методологии решения задач управления с поводырём [1, гл. 9]. Наряду с системой (2.1), (2.2) рассмотрим упрощенную систему, описывающую управляемое движение центра масс РН:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{v}, & \dot{\bar{v}} &= \bar{W}_R(t, \bar{x}, \bar{m}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) + g(\bar{x}), & \dot{\bar{m}} &= -\mu(t), \\ \dot{\bar{\vartheta}} &= \bar{U}_1, & \dot{\bar{\psi}} &= \bar{U}_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которой функция \bar{W}_R строится на основе W_R из (2.1) (например, $\bar{W}_R(t, \bar{x}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) = W_R(t, \bar{x}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}, 0, 0)$, т.е. полагается, что $\bar{\varphi} \equiv 0$ и $\delta_i \equiv 0$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, где $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$).

Для системы (3.1) в момент времени $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$ значениями соответствующих компонент фазового состояния системы (2.1), (2.2) задаются начальные условия

$$\bar{x}(\bar{t}_s) = x(\bar{t}_s), \quad \bar{v}(\bar{t}_s) = v(\bar{t}_s), \quad \bar{m}(\bar{t}_s) = m(\bar{t}_s), \quad \bar{\vartheta}(\bar{t}_s) = \vartheta(\bar{t}_s), \quad \bar{\psi}(\bar{t}_s) = \psi(\bar{t}_s). \quad (3.2)$$

В качестве управляющих параметров используются скорости \bar{U}_1 и \bar{U}_2 изменения углов тангажа $\bar{\vartheta}$ и рыскания $\bar{\psi}$:

$$|\bar{U}_1(t)| \leq \dot{\vartheta}^{\max}, \quad |\bar{U}_2(t)| \leq \dot{\psi}^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]. \quad (3.3)$$

На текущее фазовое состояние системы (3.1), (3.2) накладываются ограничения

$$|\bar{\vartheta}(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\bar{\psi}(t)| \leq \psi^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]. \quad (3.4)$$

Здесь и далее для того, чтобы отличать величины, относящиеся к системе (2.1), (2.2), от величин, имеющих отношение к упрощенной системе (3.1), (3.2), последние снабжаются сверху горизонтальной чертой.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления.

З а д а ч а 2 (Вспомогательная задача). Для управляемой системы (3.1) с заданными в момент времени \bar{t}_s начальными условиями (3.2) найти программное управление $\bar{\mathbf{U}}$ (измеримую вектор-функцию $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$), минимизирующее значение функционала $J_2[\bar{\mathbf{U}}] = \bar{t}_f$. При этом должны быть выполнены ограничения (3.3), (3.4), а также условия (2.5) на параметры орбиты.

Управления, удовлетворяющие во вспомогательной задаче 2 всем требованиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этой задаче.

Для вспомогательной задачи 2 известны [5;6] методы построения допустимых управлений. Ключевое место среди них занимает метод [5] построения субоптимального в задаче 2 управления \bar{U}^* , которое обеспечивает выведение центра масс РН на заданную орбиту за время, близкое к минимальному. Следует отметить, что это управление является разрывным. В [6] предложен численный алгоритм построения допустимых управлений в задаче 2, которые при определенных условиях могут оказаться непрерывными. Этот алгоритм оказался более трудоемким по сравнению с [5], но построенные управления в этой задаче обеспечивали выведение центра масс РН на заданную орбиту за практически то же время, что и упомянутое выше субоптимальное управление.

Далее систему (2.1), (2.2), описывающую управляемое движение РН как “твёрдого тела”, будем называть *полной* системой. Упрощенную систему (3.1), (3.2), описывающую управляемое движение центра масс РН, будем называть *поводырем* для полной системы, а *непрерывные* допустимые во вспомогательной задаче 2 управления $\bar{U}^b = (\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b)^\top$ для поводыря — *базовыми* управлениями. Через \mathbf{x} и $\bar{\mathbf{x}}$ будем обозначать “расширенные” векторы состояния $\mathbf{x} = (x^\top, v^\top, m, \omega^\top, \delta^\top, \vartheta, \psi, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^{17}$ и $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^\top, \bar{v}^\top, \bar{m}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi})^\top \in \mathbb{R}^9$ полной системы и поводыря соответственно.

Основная идея предлагаемого подхода к построению допустимых в основной задаче 1 управлений \mathbf{u} для полной системы (2.1), (2.2) заключается в следующем.

Зафиксируем некоторый момент времени $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$ и построим некоторое базовое управление $\bar{U}^b = \bar{U}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, для поводыря (3.1), (3.2) во вспомогательной задаче 2. Здесь \bar{t}_f — момент вывода центра масс РН в системе (3.1), (3.2) на заданную орбиту с помощью этого базового управления. Рассмотрим промежуток времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$: $\bar{t}_H = \bar{t}_s$, $\bar{t}_K \leq \bar{t}_f$. Используя базовое управление \bar{U}^b , определим на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функции

$$\begin{aligned} \omega_1^b(t) &= -\bar{U}_1^b(t) \sin \bar{\psi}^b(t), \\ \omega_2^b(t) &= \bar{U}_1^b(t) \cos \bar{\psi}^b(t) \sin \varphi_0 + \bar{U}_2^b(t) \cos \varphi_0, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \\ \omega_3^b(t) &= \bar{U}_1^b(t) \cos \bar{\psi}^b(t) \cos \varphi_0 - \bar{U}_2^b(t) \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_H)$. Эти функции строятся с помощью кинематических уравнений Эйлера (2.2) путем подстановки в них базового управления \bar{U}^b и соответствующих ему компонент фазового состояния $\bar{\mathbf{x}}$ поводыря с заменой в правых частях этих уравнений функции φ ее значением φ_0 в момент времени \bar{t}_H . Такая подстановка и приравнивание к нулю правой части третьего в (2.2) уравнения приводят к трем линейным относительно функций ω_k ($k = 1, 2, 3$) равенствам, из которых указанные функции могут быть выражены в аналитической форме единственным образом. Эта операция и приводит к задаваемым соотношениями (3.5) функциям ω_k^b ($k = 1, 2, 3$).

Будем на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ строить допустимое в основной задаче 1 управление \mathbf{u} для полной системы, при котором на этом промежутке функции ω_k в силу полной системы принимают такие же значения, как и функции ω_k^b ($k = 1, 2, 3$).

4. Управления, сопутствующие базовому на заданном промежутке времени

Рассмотрим некоторое базовое управление $\bar{U}^b = \bar{U}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, для поводыря и промежуток времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$: $\bar{t}_H = \bar{t}_s$, $\bar{t}_K \leq \bar{t}_f$.

О п р е д е л е н и е. Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, для полной системы (2.1), (2.2), при котором выполняются условия

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3,$$

будем называть управлением, сопутствующим базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

Заметим, что управления для полной системы, сопутствующие базовому \bar{U}^b на некотором промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, необязательно являются допустимыми в основной задаче 1. Но, как будет показано ниже, сопутствующие базовому управления, во-первых, обладают свойствами, которые обеспечивают выполнение ограничений (2.6) и (2.7) на фазовое состояние полной системы в основной задаче 1. Во-вторых, если базовое управление \bar{U}^b удовлетворяет ряду условий, то для него можно построить целое семейство сопутствующих ему управлений для полной системы, удовлетворяющих и ограничениям (2.8) в основной задаче 1. Из этого семейства управлений будем пытаться выделить те, которые на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ удовлетворяют ограничениям (2.3) (а на завершающем промежутке $[\bar{t}_H, t_f]$ и условиям (2.5) на параметры орбиты) в основной задаче 1.

Справедливо следующее

Утверждение. Пусть управление $u(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, для полной системы (2.1), (2.2) является сопутствующим базовому управлению \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ управление u обеспечивает выполнение следующих условий:

$$\vartheta(t) = \bar{\vartheta}^b(t), \quad \psi(t) = \bar{\psi}^b(t), \quad \varphi \equiv \varphi(\bar{t}_H), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Доказательство. Пусть управление u является управлением, сопутствующим базовому на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда из определения такого управления следует, что для управления u в полной системе (2.1), (2.2) выполняются равенства

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

С учетом (4.1) замена в кинематических уравнениях Эйлера (2.2) функций ω_k функциями ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \bar{U}_1^b \cos \bar{\psi}^b \frac{1}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \bar{U}_2^b = \dot{\bar{\psi}}^b, \\ \dot{\varphi} &= -\bar{U}_1^b \sin \bar{\psi}^b + \bar{U}_1^b \cos \bar{\psi}^b \frac{\sin \psi}{\cos \psi}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Принимая во внимание, что $\bar{\psi}^b(\bar{t}_H) = \psi(\bar{t}_H)$, из второго уравнения системы (4.2) следует, что $\psi(t) = \bar{\psi}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда первое и третье уравнения системы (4.2) принимают вид

$$\dot{\vartheta} = \bar{U}_1^b, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда с учетом $\bar{\vartheta}^b(\bar{t}_H) = \vartheta(\bar{t}_H)$ получаем

$$\vartheta(t) = \bar{\vartheta}^b(t), \quad \psi(t) = \bar{\psi}^b(t), \quad \varphi \equiv \varphi(\bar{t}_H) = \varphi_0, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Утверждение доказано.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий существования управлений, сопутствующих базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

Для построения на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ управлений, сопутствующих базовому \bar{U}^b , воспользуемся спецификой уравнений, описывающих в полной системе (2.1), (2.2) динамику компонент угловой скорости $\omega \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= R_1(t) (-\sin \delta_1 - \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4), \\ \dot{\omega}_2 &= G_2(t) \omega_1 \omega_3 + R_2(t) (\sin \delta_1 + \sin \delta_3), \\ \dot{\omega}_3 &= G_3(t) \omega_1 \omega_2 + R_3(t) (\sin \delta_2 + \sin \delta_4), \end{aligned} \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad (4.3)$$

где $R_k(t) < 0$ ($k = 1, 2, 3$), $G_k(t)$ ($k = 2, 3$), $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, — заданные функции².

Пусть выполнены следующие условия:

$$R_l, G_k \in C([\bar{t}_H, \bar{t}_K]), \quad l = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, \quad (4.4)$$

$$\bar{\vartheta}^b, \bar{\psi}^b \in C^2([\bar{t}_H, \bar{t}_K]), \quad \bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in C^1([\bar{t}_H, \bar{t}_K]). \quad (4.5)$$

Как уже отмечалось в разд. 3, существуют методы построения допустимых управлений в задаче 2, которые оказываются “довольно” гладкими [6, с. 213–214]. Для выполнения условия (4.5) можно воспользоваться различными методами сглаживания таких управлений. При этом требуется обеспечить, чтобы результирующие гладкие управления \bar{U}^b были допустимыми в задаче 2.

При условии (4.4) для любых начальных данных $\omega_k(\bar{t}_H)$ ($k = 1, 2, 3$) и непрерывных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система (4.3) имеет единственное решение ω_k ($k = 1, 2, 3$), определенное на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. При этом для заданных непрерывных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) при интегрировании на этом промежутке полной системы (2.1), (2.2) система (4.3) может интегрироваться независимо от остальных уравнений полной системы.

Формальная замена ω_k в уравнениях системы (4.3) соответствующими функциями ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1^b &= R_1(t) (-\sin \delta_1 - \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4), \\ \dot{\omega}_2^b &= G_2(t) \omega_1^b \omega_3^b + R_2(t) (\sin \delta_1 + \sin \delta_3), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \\ \dot{\omega}_3^b &= G_3(t) \omega_1^b \omega_2^b + R_3(t) (\sin \delta_2 + \sin \delta_4). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) полученные из (3.5) с учетом (4.5) выражения для $\dot{\omega}_k^b$ ($k = 1, 2, 3$), соотношения (4.6) можно записать в виде

$$s_1 + s_2 - s_3 - s_4 = Q_1, \quad s_1 + s_3 = Q_2, \quad s_2 + s_4 = Q_3, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{R_1} (\dot{\bar{U}}_1^b \sin \bar{\psi}^b + \bar{U}_1^b \dot{\bar{U}}_2^b \cos \bar{\psi}^b), \\ Q_2 &= \frac{1}{R_2} (\dot{\bar{U}}_1^b \cos \bar{\psi}^b \sin \varphi_0 + \dot{\bar{U}}_2^b \cos \varphi_0 - \bar{U}_1^b \bar{U}_2^b (1 + G_2) \sin \bar{\psi}^b \sin \varphi_0 + (\bar{U}_1^b)^2 G_2 \sin \bar{\psi}^b \cos \bar{\psi}^b \cos \varphi_0), \\ Q_3 &= \frac{1}{R_3} (\dot{\bar{U}}_1^b \cos \bar{\psi}^b \cos \varphi_0 - \dot{\bar{U}}_2^b \sin \varphi_0 - \bar{U}_1^b \bar{U}_2^b (1 - G_3) \sin \bar{\psi}^b \cos \varphi_0 + (\bar{U}_1^b)^2 G_3 \sin \bar{\psi}^b \cos \bar{\psi}^b \sin \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $s_k(t) = \sin(\delta_k(t))$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, ($k = 1, 2, 3, 4$).

Очевидно, что равенства (4.7) на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ могут задавать в аналитической форме бесконечно много вектор-функций $\mathbf{s}(t) = \{s_k(t) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Например, каждая такая конкретная непрерывная вектор-функция \mathbf{s} может быть определена на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ путем задания на этом промежутке одной из непрерывных функций s_k ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$s_1 = s_4 + \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2}, \quad s_2 = -s_4 + Q_3, \quad s_3 = -s_4 - \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2}. \quad (4.9)$$

Обозначим через \mathbf{S}_φ множество задаваемых соотношениями (4.8), (4.9) непрерывных вектор-функций \mathbf{s} , для которых справедливы неравенства

$$|s_k(t)| \leq s_k^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.10)$$

²Для ряда моделей РН $G_2(t) = \frac{J_2(t) - J_1(t)}{J_2(t)}$, $G_3(t) = -G_2(t)$; $R_k(t) = -\frac{c_k(t)P(t)}{J_k(t)}$ ($k = 1, 2, 3$), $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Здесь $P(t) > 0$ — заданная функция тяги рулевых двигателей РН; $J_k(t) > 0$ ($k = 1, 2, 3$) — известные моменты инерции РН относительно соответствующих осей связанной с РН прямоугольной системы координат: $J_2 \equiv J_3$; $c_k(t) > 0$ ($k = 1, 2, 3$) — заданные линейные функции.

где $s_k^{\max} = \sin(\delta_k^{\max})$ ($k = 1, 2, 3, 4$)³. Достаточными условиями существования непрерывной вектор-функции \mathbf{s} , определяемой выражениями (4.9) и удовлетворяющей неравенствам (4.10), например, являются

$$\begin{aligned} & \exists r \in (0, \bar{r}) : \\ & |Q_1(t) + Q_2(t)| \leq 2s_1^{\max} - (1+r)s_2^{\max}, \\ & |Q_1(t) - Q_2(t)| \leq 2s_3^{\max} - (1+r)s_2^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \\ & |Q_3(t)| \leq (1-r)s_2^{\max}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\bar{r} = \min\{1, \frac{s_4^{\max}}{s_2^{\max}}, 2\frac{s_1^{\max}}{s_2^{\max}} - 1, 2\frac{s_3^{\max}}{s_2^{\max}} - 1\}$ ⁴. При этом фигурирующая в (4.9) непрерывная функция $s_4(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, должна удовлетворять неравенству

$$|s_4(t)| \leq rs_2^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Предположим, что величина φ_0 и базовое управление \bar{U}^b обеспечивают на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ выполнение неравенств (4.11), т.е. множество \mathbf{S}_φ непусто. Тогда любая вектор-функция $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ определяет на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ непрерывные функции $\delta_k(t) = \arcsin(s_k(t))$ ($k = 1, 2, 3, 4$), для которых дифференциальные уравнения (4.6) описывают известную на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ динамику, задаваемую выражениями (3.5) для функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$). С другой стороны, для любых заданных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ непрерывных функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) правые части уравнений (4.3) идентичны правым частям соответствующих уравнений (4.6). Следовательно, для любой вектор-функции $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ при условии

$$\omega_k(\bar{t}_H) = \omega_k^b(\bar{t}_H), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.12)$$

справедливо

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3.$$

Если функции Q_k ($k = 1, 2, 3$), задаваемые выражениями (4.8), являются функциями ограниченной вариации на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($Q_k \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$ ($k = 1, 2, 3$))⁵, то и компоненты s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) любой вектор-функции $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ обладают этим же свойством. В этом случае для любой $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ функции $\delta_k(t) = \arcsin(s_k(t))$ ($k = 1, 2, 3, 4$) являются почти всюду дифференцируемыми на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Для полной системы (2.1), (2.2) на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ такие функции δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) определяют управление $\mathbf{u} = \dot{\delta}$, которое является сопутствующим базовому \bar{U}^b на указанном промежутке и удовлетворяет ограничениям (2.8) в основной задаче 1. Таким образом доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия

1. $R_l, G_k \in C([\bar{t}_H, \bar{t}_K])$ ($l = 1, 2, 3; k = 2, 3$).
2. $\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in C^1([\bar{t}_H, \bar{t}_K])$.
3. $\omega_k(\bar{t}_H) = \omega_k^b(\bar{t}_H)$ ($k = 1, 2, 3$).
4. Функции Q_k ($k = 1, 2, 3$), задаваемые выражениями (4.8), являются функциями ограниченной вариации на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ и удовлетворяют условию (4.11).

Тогда на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ существуют управления $\mathbf{u} = \dot{\delta}$ для полной системы (2.1), (2.2), которые являются сопутствующими базовому \bar{U}^b на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ и удовлетворяют ограничениям (2.8) в основной задаче 1.

³Неравенства (4.10) отражают стремление построить управления, сопутствующие базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, которые удовлетворяют ограничениям (2.8) в основной задаче 1.

⁴Если $s_k^{\max} = \bar{s}$, то в (4.11) $\bar{r} = 1$ и правые части всех неравенств равны $(1-r)\bar{s}$.

⁵Функции Q_k ($k = 1, 2, 3$) обладают указанным свойством, если $R_l, G_k \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$ ($l = 1, 2, 3; k = 2, 3$) и $\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$, либо каждая из функций Q_k на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ представима в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

На основе этих утверждений в следующем разделе представлен алгоритм построения допустимых управлений для полной системы (2.1), (2.2), действующих на некотором промежутке времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

5. Алгоритм построения допустимых управлений в основной задаче 1

Зададим на промежутке времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ сетку $t_i \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$\bar{t}_H = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \bar{t}_K : \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Допустимые в задаче 1 управления для полной системы на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ строятся в результате реализации на этой сетке итерационной процедуры. На каждом шаге по $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ этой процедуры выполняются следующие операции.

Производится разностная аппроксимация уравнений (4.3) в i -м узле сетки, которая приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{1,i+1} - \omega_{1,i}}{\Delta t_i} &= R_{1,i+1} (-s_{1,i+1} - s_{2,i+1} + s_{3,i+1} + s_{4,i+1}), \\ \frac{\omega_{2,i+1} - \omega_{2,i}}{\Delta t_i} &= G_{2,i+1} \omega_{3,i+1} \omega_{1,i+1} + R_{2,i+1} (s_{1,i+1} + s_{3,i+1}), \\ \frac{\omega_{3,i+1} - \omega_{3,i}}{\Delta t_i} &= G_{3,i+1} \omega_{2,i+1} \omega_{1,i+1} + R_{3,i+1} (s_{2,i+1} + s_{4,i+1}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\omega_{k,j} \approx \omega_k(t_j)$ ($j = i, i+1$), $R_{k,i+1} = R_k(t_{i+1})$ ($k = 1, 2, 3$); $G_{k,i+1} = G_k(t_{i+1})$ ($k = 2, 3$); $s_{k,i+1} \approx s_k(t_{i+1}) = \sin(\delta_k(t_{i+1}))$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Подставляя в (5.1) вместо величин $\omega_{k,i+1}$ значения сопутствующих позиций $\omega_{k,i+1}^b = \omega_k^b(t_{i+1})$ ($k = 1, 2, 3$) [2, гл. 3], получаем недоопределенную систему трех линейных уравнений относительно четырех неизвестных $s_{k,i+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{1,i+1}^b - \omega_{1,i}}{\Delta t_i} &= R_{1,i+1} (-s_{1,i+1} - s_{2,i+1} + s_{3,i+1} + s_{4,i+1}), \\ \frac{\omega_{2,i+1}^b - \omega_{2,i}}{\Delta t_i} &= G_{2,i+1} \omega_{3,i+1}^b \omega_{1,i+1}^b + R_{2,i+1} (s_{1,i+1} + s_{3,i+1}), \\ \frac{\omega_{3,i+1}^b - \omega_{3,i}}{\Delta t_i} &= G_{3,i+1} \omega_{2,i+1}^b \omega_{1,i+1}^b + R_{3,i+1} (s_{2,i+1} + s_{4,i+1}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нетрудно проверить, что система (5.2) совместна и имеет однопараметрическое семейство решений $\mathbf{s}^{(i+1)}(p) = \{s_{k,i+1}(p) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, где параметром p является одна из четырех указанных выше неизвестных. Далее без потери общности можно считать, что $p = s_{4,i+1}$. Обозначим через Π множество значений параметра $p \in [-s_4^{\max}, s_4^{\max}]$, для которых

$$|s_{k,i+1}(p)| \leq s_k^{\max}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3)$$

где $s_k^{\max} = \sin(\delta_k^{\max})$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Для любого $p \in \Pi$ соответствующее ему частное решение $\mathbf{s}^{(i+1)}(p)$ системы (5.2) определяет для полной системы постоянное управление $\mathbf{u}^{(i)}(p) = \{u_{k,i}(p) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, действующее на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$

$$u_{k,i}(p) = \frac{\arcsin(s_{k,i+1}(p)) - \delta_{k,i}}{\Delta t_i}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.4)$$

где $\delta_{k,i} = \arcsin(s_{k,i}) \approx \delta_k(t_i)$.

Обозначим через Π_D множество значений $p \in \Pi$, для каждого из которых задаваемое формулами (5.4) управление для полной системы на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ является

допустимым в основной задаче 1. Множество $\Pi_{\text{д}}$ может быть построено в результате полного перебора конечного набора значений $p_j \in \Pi$ ($j = 1, 2, \dots, K$), задающих разбиение этого множества достаточно малого диаметра. Непустоту множества $\Pi_{\text{д}}$ можно обеспечить за счет уменьшения величины шага Δt_i в случае, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $|s_{k,i}| \leq s_k^{\max} - \varepsilon$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

В случае, если множество $\Pi_{\text{д}}$ оказывается пустым, то выполняется выход из итерационной процедуры и формулируется вывод о невозможности построения допустимых в основной задаче 1 управлений при заданных значениях параметров данной процедуры.

Если множество $\Pi_{\text{д}}$ непусто и не является одноэлементным, то из конечного набора действующих на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ допустимых в основной задаче 1 управлений, построенных по формулам (5.4) для всех $p \in \Pi_{\text{д}}$, может быть выделено наилучшее⁶ управление $\mathbf{u}^{(i)*} = \mathbf{u}^{(i)}(p^*)$, где

$$p^* = \arg \min_{p \in \Pi_{\text{д}}} F(p), \quad F(p) = \|\bar{x}(t_{i+1}) - x(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)}(p))\|^2. \quad (5.5)$$

Здесь $x(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)}(p))$ — положение центра масс РН в момент времени t_{i+1} , которое достигается в полной системе с помощью управления $\mathbf{u}^{(i)}(p)$.

С помощью управления $\mathbf{u}^{(i)*}$ полная система (2.1), (2.2) переводится из фазового состояния $\mathbf{x}(t_i)$ в фазовое состояние $\mathbf{x}(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)*})$.

В результате этой итерационной процедуры на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ строится допустимое в основной задаче 1 управление для полной системы, которое задается кусочно-постоянной вектор-функцией $\mathbf{u}^*(t) = \{\mathbf{u}^{(i)*} | t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Последовательное применение описанной выше процедуры на наборе промежутков времени $[\bar{t}_{\text{н}}^{(j)}, \bar{t}_{\text{к}}^{(j)}]$, $j = 1, 2, \dots, N$ ($\bar{t}_{\text{н}}^{(j+1)} = \bar{t}_{\text{к}}^{(j)}$, $\bar{t}_{\text{к}}^{(j+1)} \leq \bar{t}_{\text{ф}}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N-1$), либо приводит к некоторому допустимому в основной задаче 1 управлению \mathbf{u}^* для полной системы (2.1), (2.2), либо вынуждает сформулировать вывод о невозможности построения допустимых в этой задаче управлений при заданных значениях параметров (N , $\Delta \bar{t}^{(j)} = \bar{t}_{\text{к}}^{(j)} - \bar{t}_{\text{н}}^{(j)}$, $\Delta t_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$) данной процедуры.

Сделаем следующие замечания.

1. Решение на каждом элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ экстремальной задачи (5.5) для определения на соответствующем промежутке наилучшего управления $\mathbf{u}^{(i)*}$ отражает стремление удерживать пространственную траекторию полной системы (2.1), (2.2) как можно ближе к пространственной траектории поводыря (3.1), (3.2). Это позволяет с большей вероятностью избежать ухода полной системы (2.1), (2.2) в те фазовые состояния, для которых построение базового управления для поводыря либо невозможно, либо сопряжено со значительным увеличением времени выведения центра масс РН на заданную орбиту во вспомогательной задаче 2.

2. Выполнение условий (4.12) (условия 3 в теореме) может быть обеспечено в результате решения на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}]$ специальной частной задачи оптимального управления. Эта задача заключается в нахождении для полной системы (2.1), (2.2) управления, обеспечивающего за минимальное время $\delta \bar{t}_{\text{н}}$ достижения компонентами ω_k ее фазового состояния в момент времени $\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$ значений соответствующих функций $\omega_k^{\text{б}}$ ($k = 1, 2, 3$) (для $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}})$ в (3.5)). Для решения такой задачи используется аппарат нелинейного программирования [7]. После чего левый конец $\bar{t}_{\text{н}}$ промежутка $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ сдвигается в $\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$ ($\bar{t}_{\text{н}} = \bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$).

3. Условия теоремы накладывают достаточно жесткие ограничения на базовое управление $\bar{U}^{\text{б}}$, которое используется для построения допустимых в основной задаче 1 управлений на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$. Однако представляется возможным попытаться использовать в этом алгоритме и управление, которое на $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ имеет *конечное* число точек разрыва. В этом случае возникает необходимость в гладкой аппроксимации такого управления в окрестностях этих

⁶В соответствии с методологией экстремального сдвига (см. [1, гл. 9]).

точек. При этом используемые для гладкой аппроксимации методы должны обеспечивать допустимость в задаче 2 результирующего сглаженного управления \bar{U}^b и выполнение условия 4 теоремы. В разд. 6 приводятся результаты численного моделирования с применением такого подхода.

4. В описанной выше численной процедуре для разностной аппроксимации уравнений (4.3) применяется достаточно простая неявная схема (5.1). Ее использование позволяет свести задачу построения допустимых в основной задаче 1 управлений на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ к анализу однопараметрического семейства решений системы линейных алгебраических уравнений (5.2), что значительно упрощает численную реализацию предлагаемого алгоритма. Такой подход носит модельный характер, при решении же реальных задач следует использовать неявные разностные схемы большего порядка аппроксимации, которые приводят к необходимости численного анализа существенно более сложных, в общем случае нелинейных, систем.

6. Результаты численного моделирования

Ниже приводятся результаты вычислительного эксперимента, в рамках которого с использованием реальных данных численно апробировался предложенный алгоритм построения допустимых управлений в основной задаче 1. Такие управления для полной системы (2.1), (2.2) строились с использованием базового управления \bar{U}^b для поводыря на промежутке $[t_0, \bar{t}_f]$, где $t_0=239.47$ с — момент начала работы последней ступени РН. На этом промежутке описанная выше численная процедура последовательно применялась на двух “коротких” промежутках $[\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$ и $[\bar{t}_H^{(2)}, \bar{t}_K^{(2)}]$: $\bar{t}_H^{(1)} = t_0$, $\bar{t}_H^{(2)} = \bar{t}_K^{(1)}$, $\bar{t}_K^{(2)} = \bar{t}_f$.

В качестве базового управления \bar{U}^b использовался результат сглаживания упомянутого в разд. 4 субоптимального управления \bar{U}^* во вспомогательной задаче 2, которое строилось с помощью предложенного в [5] метода. На рис. 6.1 приведены графики компонент \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^* управления \bar{U}^* для поводыря на первом “коротком” промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K] = [\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$, у которого $\bar{t}_K=420$ с, $\Delta \bar{t}^{(1)} = \bar{t}_K - \bar{t}_H=180.53$ с. Как видно на рис. 6.1, каждая из компонент управления \bar{U}^* на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ имеет по одной точке разрыва, что приводит к нарушению требований гладкости этого управления в сформулированной выше теореме. Поэтому предварительно в малой окрестности (радиус окрестности — параметр процедуры) каждой из точек разрыва производилась гладкая аппроксимация соответствующей компоненты управления \bar{U}^* .

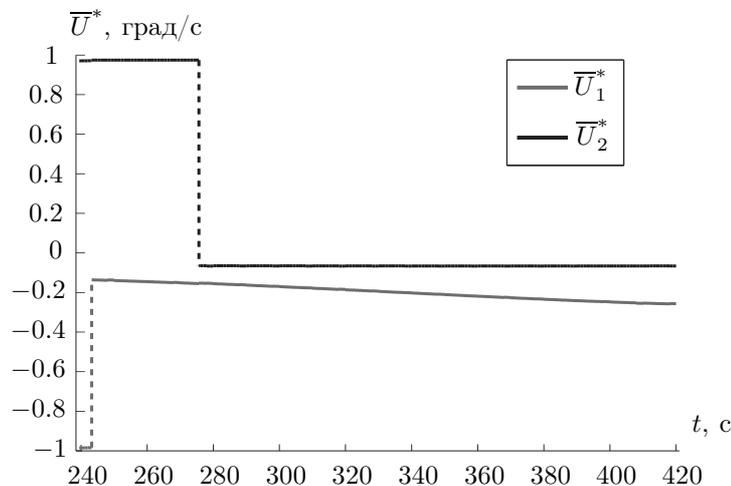


Рис. 6.1. Вспомогательная задача 2. Субоптимальное управление \bar{U}^* на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Графики функций $\bar{U}_1^*(t)$ и $\bar{U}_2^*(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Шаг $\Delta t_i = 1$ с ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Параметры целевой орбиты. Ошибки выведения

Значение параметра	Допустимая ошибка	Реализовавшаяся ошибка
$i = 97.372^\circ$	$\bar{\Delta}_i = 0.06'$	$\Delta_i = 0.0185'$
$\Omega = 55.4993^\circ$	$\bar{\Delta}_\Omega = 0.06'$	$\Delta_\Omega = 0.0437'$
$h_{\min} = 260000$ м	$\bar{\Delta}_{h_{\min}} = 60$ м	$\Delta_{h_{\min}} = -34.21$ м
$h_{\max} = 528400$ м	$\bar{\Delta}_{h_{\max}} = 60$ м	$\Delta_{h_{\max}} = -8.38$ м
$\omega_{\text{per}} = 68.942^\circ$	$\bar{\Delta}_\omega = 30'$	$\Delta_\omega = -13.99'$

Для этих целей применялось несколько известных методов. В частности, использовалась эрмитова интерполяция с помощью многочленов третьей степени.

В таблице приведены значения параметров заданной (целевой) околоземной эллиптической орбиты, допустимые отклонения значений орбиты выведения от значений соответствующих параметров целевой орбиты, а также реализовавшиеся в результате численного моделирования ошибки выведения в основной задаче 1 при использовании построенного для полной системы (2.1), (2.2), допустимого в этой задаче и сопутствующего базовому управлению. При этом время выведения центра масс РН во вспомогательной задаче 2 с помощью субоптимального управления \bar{U}^* , полученное независимо от основной задачи 1, составило $\bar{t}_f = 511.787$ с. Время t_f выведения РН как “твёрдого тела” в основной задаче 1 с помощью управления, включающего два сопутствующих базовому управлению на упомянутых выше “коротких” промежутках времени, получилось равным 511.815 с, т.е. практически идентичным указанному выше для упрощенной системы (3.1), (3.2) во вспомогательной задаче 2: $t_f - \bar{t}_f = 0.0282$ с.

Кратко прокомментируем полученные результаты вычислительного эксперимента.

На рис. 6.2 и 6.3 представлены некоторые результаты построения допустимого управления \mathbf{u} для полной системы (2.1), (2.2) в основной задаче 1. Это управление является сопутствующим базовому на первом “коротком” промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K] = [\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$.

На рис. 6.2 приведены графики второй компоненты $u_2(t)$ управления \mathbf{u} и соответствующей ей функции $\delta_2(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($\Delta t_i = 1$ с, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta t_i = 0.1$ с в окрестностях точек разрыва функций \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^*). Остальные компоненты этого управления имеют подобную структуру.

На рис. 6.3 попарно приведены графики функций $\omega_k(t)$ и $\omega_k^b(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($k = 1, 2, 3$). Здесь с помощью широких сплошных линий отображаются графики функций ω_k^b , а с помощью тонких пунктирных линий — графики функций ω_k ($k = 1, 2, 3$). Как видно на рис. 6.3, компонентам ω_k фазового состояния полной системы (2.1), (2.2) с помощью управления \mathbf{u}

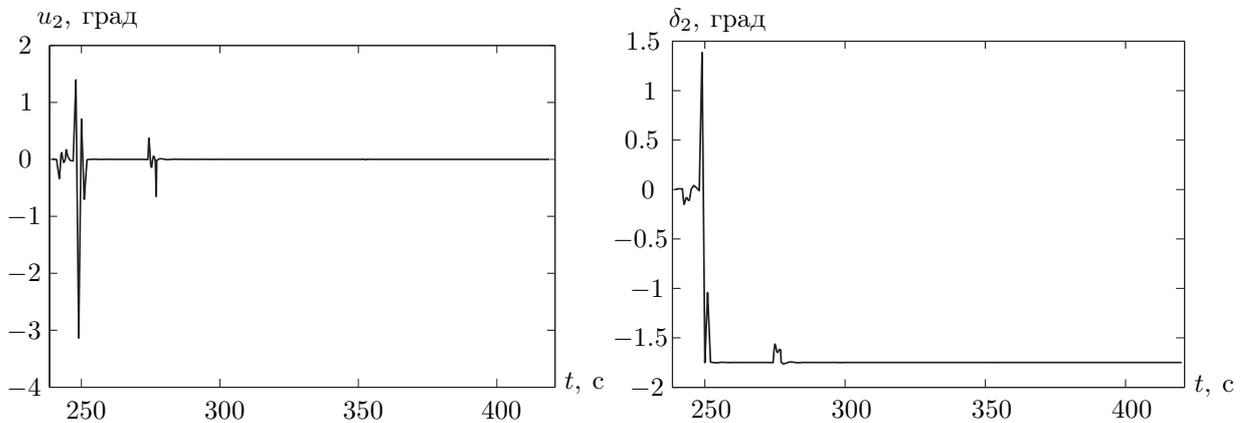


Рис. 6.2. Основная задача 1. Графики компоненты $u_2(t)$ управления \mathbf{u} и соответствующей ей функции $\delta_2(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

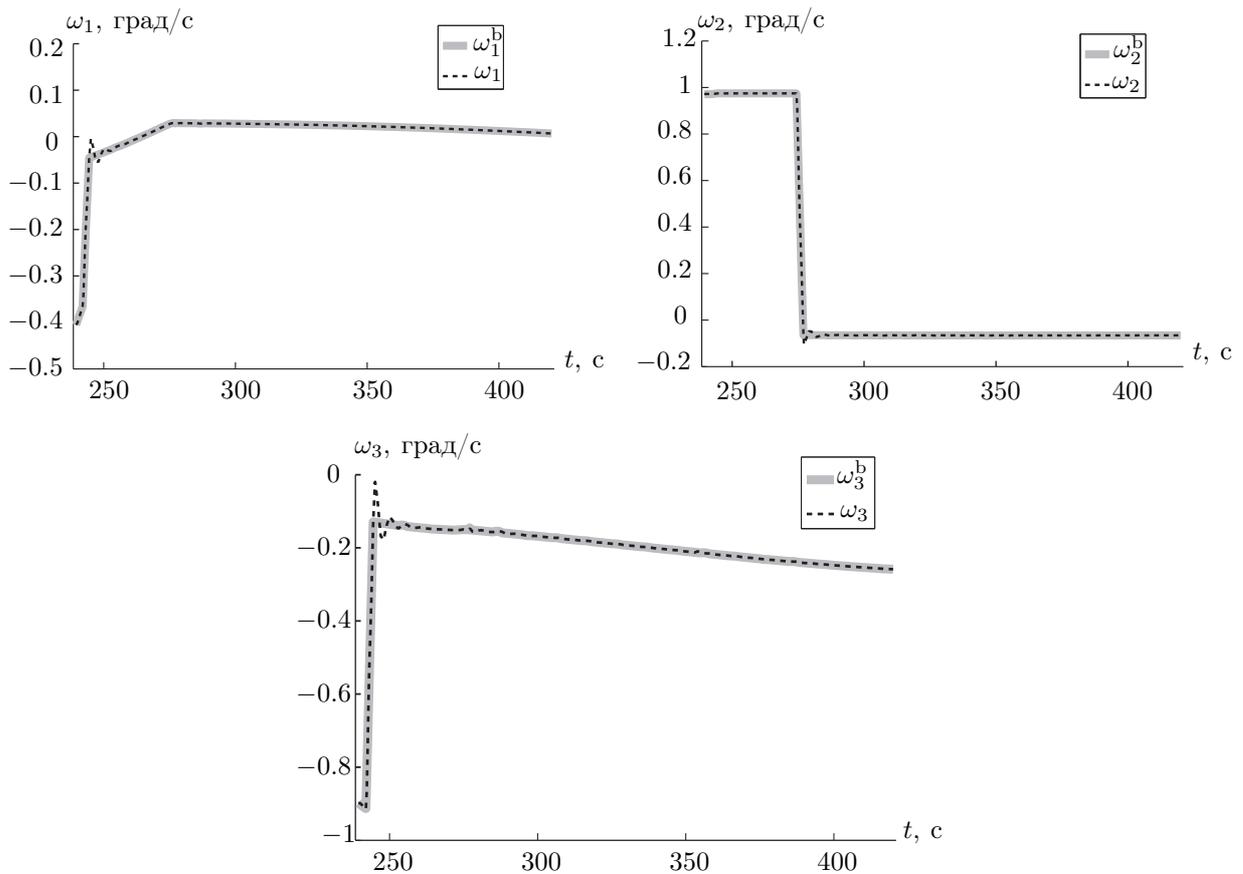


Рис. 6.3. Основная задача 1. Построение управления \mathbf{u} на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Графики функций $\omega_k^b(t)$ и $\omega_k(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($k = 1, 2, 3$). Шаг $\Delta t_i = 1$ с ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

удается на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ достаточно точно отслеживать значения соответствующих им функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$). Наблюдаются лишь незначительные колебания значений функций ω_k вокруг значений соответствующих им функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) в малых окрестностях точек разрыва компонент \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^* управления \bar{U}^* . Здесь значения функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ вычислялись с помощью формул (3.5) при $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_H) = 0$.

В заключение отметим следующее.

1. При построении на этом “коротком” промежутке времени управления \mathbf{u} на каждом шаге описанной выше итерационной процедуры множество Π_d оказывалось непустым.
2. Результирующее управление \mathbf{u} обеспечивало на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ практическую идентичность значений функций угла тангажа ϑ и $\bar{\vartheta}^b$, а также функций угла рыскания ψ и $\bar{\psi}^b$. При этом наблюдалось незначительное отклонение значений функции угла крена φ от $\varphi(\bar{t}_H) = 0$.
3. Значение величины $\Delta x(\bar{t}_K) = \|\bar{x}(\bar{t}_K) - x(\bar{t}_K)\|$ составило всего порядка ста метров для достаточно больших абсолютных значений скоростей v и \bar{v} к моменту \bar{t}_K в полной (2.1), (2.2) и упрощенной (3.1), (3.2) системах соответственно.
4. Уменьшение величины шага Δt_i не оказало существенного влияния на приведенные выше результаты численного моделирования.

7. Заключение

Рассматриваемая в работе задача оптимального выведения РН на заданную орбиту является примером не решенной в общем случае математической проблемы управления нелинейной динамической системой с фазовыми ограничениями.

В работе рассмотрен конечный безатмосферный участок траектории управляемого движения РН. Предложен подход к построению управлений для нелинейной динамической системы, описывающей на этом участке движение РН как “твердого тела”, по известным допустимым управлениям в задаче оптимального выведения на заданную орбиту центра масс РН. При выполнении условий теоремы полученные управления являются допустимыми в задаче 1. Результаты численного моделирования показывают, что удается построить допустимое управление в основной задаче 1, которое обеспечивает выведение РН как “твердого тела” на заданную орбиту за время, практически равное времени выведения центра масс РН с помощью субоптимального управления \bar{U}^* во вспомогательной задаче 2.

Следует отметить, что пока нерешенной остается проблема выбора наилучшего метода гладкой аппроксимации разрывных допустимых в задаче 2 управлений для получения базовых управлений, удовлетворяющих условиям теоремы. Для решения этой задачи требуется апробировать большое число известных методов аппроксимации, при необходимости их модифицировать, а также получить для них соответствующие оценки. Эта задача может быть одним из направлений будущих исследований.

Авторы выражают благодарность ведущему научному сотруднику ФГУП НПОА им. акад. Н. А. Семихатова, кандидату техн. наук В. И. Починскому за постановку задачи, конструктивные замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. **Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.** Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
5. **Мазгалин Д.В.** Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.
6. **Костоусова Е.К., Починский В.И.** О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т.17, № 3. С. 201–216.
7. **Enright P.J., Conway B.A.** Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1992. Vol. 15, no. 4. P. 994–1002.

Кандоба Игорь Николаевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Козьмин Иван Викторович

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

инженер

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Поступила 29.02.2016